



3.69. Чаму роўны вуглавы каэфіцыент прамой:

а) $y = -x + 3$; б) $y = x + 3$; в) $y = \frac{x}{5} + 3$; г) $y = -8$?

3.70. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{5^{-1} \cdot 3^{-1} \cdot (0,4)^{-2}}{6 - \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}$.

3.71. Рашыце ўраўненне:

а) $\sqrt{x^2 - 15} = \sqrt{4x - 3}$; б) $\sqrt[4]{x - 3} + 12 = \sqrt{x - 3}$.

3.72. Прымяніце формулы двайнога вугла і знайдзіце значэнне выразу:

а) $3 - 6\sin^2 \frac{5\pi}{12}$; б) $\cos \frac{7\pi}{8} \sin \frac{7\pi}{8}$; в) $\frac{4\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{11\pi}{12}}$.

3.73. Рашыце няроўнасць $(x^2 - 9)(x + 3) \geq 0$ метадам інтэрвалаў.

3.74. Высветліце, цотнай ці няцотнай з'яўляецца функцыя $f(x) = \frac{\cos 3x}{x^2 + 2}$.

§ 20. Геаметрычны сэнс выворнай. Сувязь паміж знакам выворнай функцыі і яе нарастаннем ці спаданнем



3.75. Для функцыі $y = (x - 1)^2 - 5$ знайдзіце:

а) найменшае значэнне; б) прамежак нарастання.

3.76. Параўнайце $f(-2\sqrt[4]{3})$ і $f(-3\sqrt[4]{3})$, калі $f(x) = \frac{9}{x}$.

3.77. Знайдзіце вуглавы каэфіцыент прамой і вызначце, які вугал (вос-тры ці тупы) утварае дадзеная прамая з воссю абсцыс:

а) $y = 3x + 1$; б) $y = -x + 5$; в) $y = 8 + 5x$.



Разгледзім уласцівасці выворнай функцыі, якія выкарыстоўваюць для вывучэння ўласцівасцей функцыі $y = f(x)$ (рыс. 128 на с. 240).

Прамую M_0M , што праходзіць праз два пункты графіка функцыі $y = f(x)$, называюць сякучай. Тангенс вугла β нахілу сякучай да восі абсцыс можна вызначыць з прамавугольнага трохвугольніка M_0MH : $\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Калі Δx імкнецца да нуля, то пункт M , рухаючыся па крывой, набліжаецца да пункта M_0 .

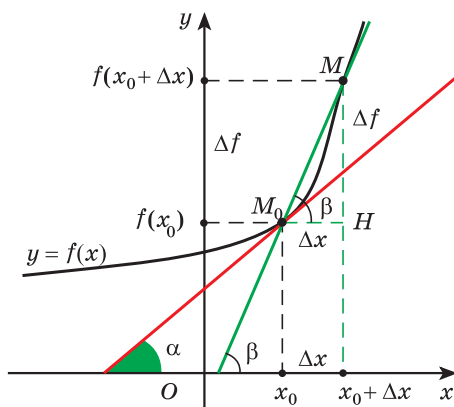


Рис. 128

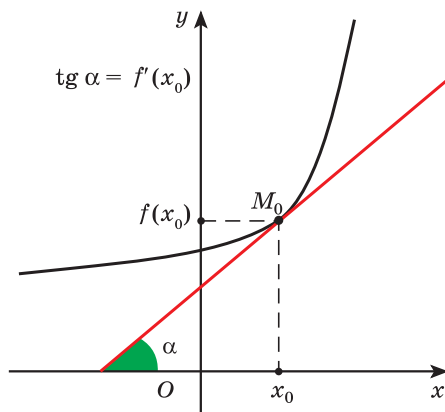


Рис. 129

У граничнім становішчы, калі пункт M супадае з пунктам M_0 , прамая M_0M зойме становішча **датычнай** да графіка функцыі ў пункце $M_0(x_0; f(x_0))$.

Тангенс вугла α нахілу датычнай да восі абсцыс роўны ліку, да якога імкнецца $\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ пры ўмове, што Δx імкнецца да нуля, г. зн. вытворнай функцыі $y = f(x)$ у пункце x_0 .

Геаметрычны сэнс вытворнай: калі функцыя $y = f(x)$ мае вытворную ў пункце x_0 , то **тангенс вугла нахілу да восі абсцыс датычнай**, праведзенай да графіка функцыі ў пункце $(x_0; f(x_0))$, **роўны вытворнай функцыі ў гэтым пункце**, г. зн. $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$ (рыс. 129).

✎ Для таго каб знайсці вугал нахілу датычнай да восі абсцыс, праведзенай да графіка функцыі $f(x)$ у пункце $(x_0; f(x_0))$, трэба:

- ① Знайсці вытворную функцыі $f'(x)$.
- ② Знайсці значэнне вытворнай у пункце x_0 , г. зн. $f'(x_0)$. Атрыманае значэнне роўна тангенсу вугла нахілу α датычнай да восі абсцыс, г. зн. $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$.
- ③ Параўнаць значэнне $f'(x)$ з нулём. Калі $f'(x_0) > 0$, то вугал α востры і $\alpha = \arctg f'(x_0)$; калі $f'(x_0) < 0$, то вугал α тупы і $\alpha = \pi - \arctg(-f'(x_0))$; калі $f'(x_0) = 0$, то $\alpha = 0$.

Знайдзіце вугал нахілу да восі абсцыс датычнай, праведзенай да графіка функцыі $f(x) = x^2$ у пункце з абсцысай $x_0 = 0,5$.

① $f'(x) = (x^2)' = 2x$.

② $f'(0,5) = 2 \cdot 0,5 = 1$.

$\operatorname{tg} \alpha = f'(0,5)$, г. зн. $\operatorname{tg} \alpha = 1$.

③ Паколькі $f'(x_0) > 0$, то вугал α востры і $\alpha = \arctg 1$, значыць, $\alpha = 45^\circ$.

Прыклад 1. Знайдзіце вугал нахілу да восі абсцыс датычнай, праведзенай да графіка функцыі $f(x) = 5x^2$ у пункце з абсцысай $x_0 = -1$.

Рашэнне. ① Знойдзем вытворную функцыі:

$$f'(x) = (5x^2)' = 5 \cdot 2x = 10x.$$

② Знойдзем значэнне вытворнай у пункце $x_0 = -1$:

$$f'(-1) = 10 \cdot (-1) = -10.$$

Атрымаем тангенс вугла нахілу датычнай да восі абсцыс:

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(-1) = -10.$$

③ Паколькі $f'(x_0) < 0$, то вугал α тупы, значыць, $\alpha = \pi - \operatorname{arctg} 10$.

Заўважым, што ва ўраўненні прамой $y = kx + b$ каэфіцыент $k = \operatorname{tg} \alpha$, дзе α — вугал нахілу гэтай прамой да восі абсцыс (рыс. 130).

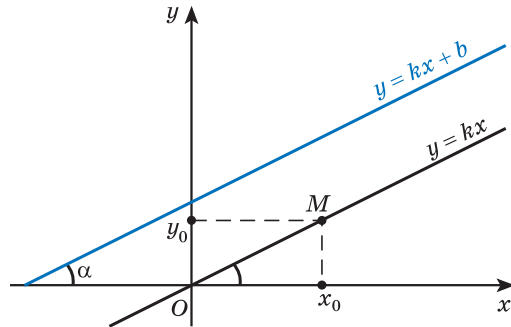
Прыклад 2. Складзіце ўраўненне датычнай да графіка функцыі $f(x) = x^3 + 1$ у пункце $x_0 = 1$.

Рашэнне. Запішам ураўненне прамой $y = kx + b$. Калі $y = kx + b$ з'яўляецца датычнай да графіка функцыі $y = f(x)$ у дадзеным пункце, то $k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$. Знойдзем значэнне вытворнай функцыі $f'(x) = x^3 + 1$ у пункце $x_0 = 1$: $f'(x) = 3x^2$, $f'(1) = 3$, значыць, $k = 3$. Тады $y = 3x + b$.

Знойдзем значэнне функцыі ў пункце $x_0 = 1$: $f(1) = 1^3 + 1 = 2$, г. зн. прамая $y = 3x + b$ праходзіць праз пункт з каардынатамі $(1; 2)$.

Падставім знойдзеныя значэнні ва ўраўненне прамой $y = 3x + b$ і атрымаем: $2 = 3 \cdot 1 + b$; $b = -1$.

Такім чынам, $y = 3x - 1$ — гэта ўраўненне датычнай, праведзенай да графіка функцыі $f(x) = x^3 + 1$ у пункце $x_0 = 1$.



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_0}{x_0} = k, \text{ паколькі } y_0 = kx_0$$

Рис. 130



Заўважым, што не ў любым пункце графіка функцыі можна правесці датычную. Напрыклад, у пункце $(0; 0)$ датычнай да графіка функцыі

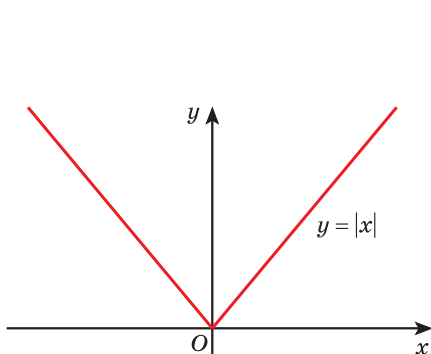


Рис. 131

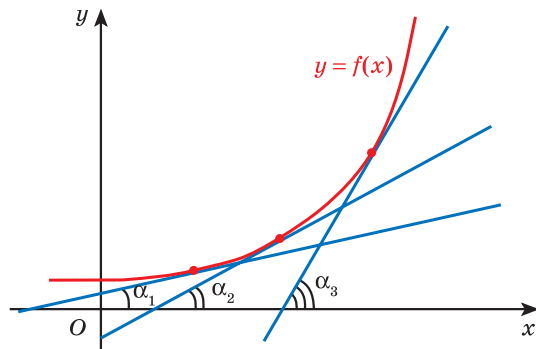


Рис. 132

$y = |x|$ не існуе (рис. 131), значыць, не існуе вытворнай у пункце $x_0 = 0$ функцыі $y = |x|$.

Разгледзім графік функцыі $y = f(x)$, якая нарастае на некаторым прамежку. Правядзём датычныя ў пунктах графіка гэтай функцыі (рис. 132) і заўважым, што вуглы, якія ўтвараюць гэтыя датычныя з воссю абсцыс, — вострыя. Такім чынам, вытворная гэтай функцыі ў кожным пункце гэтага прамежку дадатная. Справядлівая тэарэма, якую мы пры-
мем без доказу.

Тэарэма 1 (прымета нарастання функцыі)

Калі функцыя мае *дадатную вытворную* ў кожным пункце некаторага прамежку, то яна *нарастае* на гэтым прамежку.

Разгледзім графік функцыі $y = f(x)$, якая спадае на некаторым прамежку. Вуглы, якія ўтвараюць датычныя да графіка гэтай функцыі з воссю абсцыс, — тупыя (рис. 133). Значыць, вытворная гэтай функцыі ў кожным пункце гэтага прамежку адмоўная.

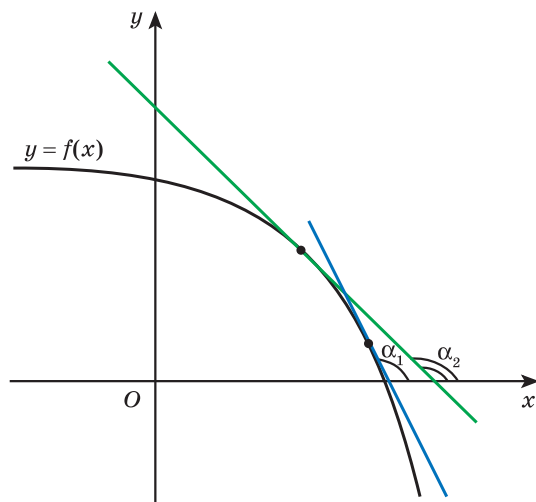


Рис. 133

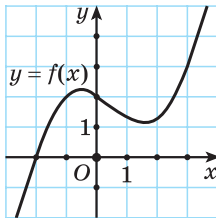
Тэарэма 2 (прымета спадання функцыі)

Калі функцыя мае *адмоўную вытворную* ў кожным пункце некаторага прамежку, то яна *спадае* на гэтым прамежку.

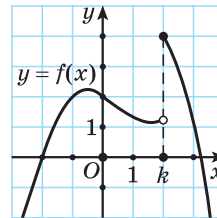


Прыметы нарастання і спадання функцыі сфармуляваны для непарыўных функцый.

Уяўленне аб непарыўнасці функцыі дае яе графік: яго можна начарціць, не адрываючы аловак ад паперы. Так, на рысунку 134 паказаны графік непарыўнай функцыі, а на рысунку 135 — графік функцыі, якая не з'яўляецца непарыўнай.



Рыс. 134



Рыс. 135



Для таго каб знайсці прамежкі манатоннасці функцыі $y = f(x)$, трэба:

- ① Знайсці абсяг вызначэння функцыі $D(f)$.
- ② Знайсці вытворную функцыі $f'(x)$.
- ③ Рашыць няроўнасці $f'(x) > 0$ і $f'(x) < 0$.

Знакі вытворнай і адпаведныя прамежкі манатоннасці функцыі адзначыць на схеме.

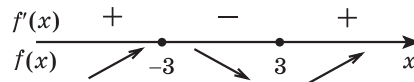
- ④ Запісаць адказ:

рашэнні няроўнасці $f'(x) > 0$ — гэта прамежкі нарастання дадзенай функцыі;
рашэнні няроўнасці $f'(x) < 0$ — гэта прамежкі спадання дадзенай функцыі.

Для непарыўных функцый канцы прамежкаў манатоннасці можна ўключыць у адказ.

Знайдзіце прамежкі манатоннасці функцыі $f(x) = x^3 - 27x$.

- ① $D(f) = \mathbf{R}$.
- ② $f'(x) = (x^3 - 27x)' = 3x^2 - 27$.
- ③ $f'(x) > 0$; $3x^2 - 27 > 0$; $x^2 - 9 > 0$;
 $(x - 3)(x + 3) > 0$; $x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$;
 $f'(x) < 0$ пры $x \in (-3; 3)$.



- ④ *Адказ:* функцыя нарастае на прамежках $(-\infty; -3]$ і $[3; +\infty)$; функцыя спадае на прамежку $[-3; 3]$.

Прыклад 3. Знайдзіце прамежкі манатоннасці функцыі

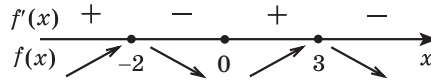
$$f(x) = 1 + 3x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}.$$

Рашэнне. ① $D(f) = \mathbf{R}$.

② $f'(x) = 6x + x^2 - x^3 = -x(x^2 - x - 6) = -x(x - 3)(x + 2)$.

③ $f'(x) > 0$ пры $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 3)$; $f'(x) < 0$ пры $x \in (-2; 0) \cup (3; +\infty)$.

Адзначым на схеме знакi вытворнай i адпаведныя прамежкі манатоннасці функцыі.



④ *Адказ:* функцыя нарастае на прамежках $(-\infty; -2]$ i $[0; 3]$ i спадае на прамежках $[-2; 0]$ i $[3; +\infty)$.

Разгледзім функцыю $y = f(x)$, задзеную графічна. Высветлім, якую асаблівасць маюць пункты A, B, C, D, M, K , адзначаныя на рысунку 136.

Паблізу ад абсцысы x_1 пункта A ва ўсіх пунктах значэнні функцыі (ардынаты пунктаў) большыя, чым у пункце A . Такую ж уласцівасць маюць пункты B, C i D . Пункты x_1, x_3, x_5, x_7 — **пункты мінімуму** дадзенай функцыі (абазначаецца $x_{\min}$).

Паблізу ад абсцысы x_2 пункта M ва ўсіх пунктах значэнні функцыі (ардынаты пунктаў) меншыя, чым у пункце M . Такую ж уласцівасць маюць пункты K i E . Пункты x_2, x_4, x_6 — **пункты максімуму** дадзенай функцыі (абазначаецца $x_{\max}$).

Пункты мінімуму i пункты максімуму называюць **пунктамі экстрэму** функцыі. Так, пункты $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ — пункты экстрэмуму дадзенай функцыі.

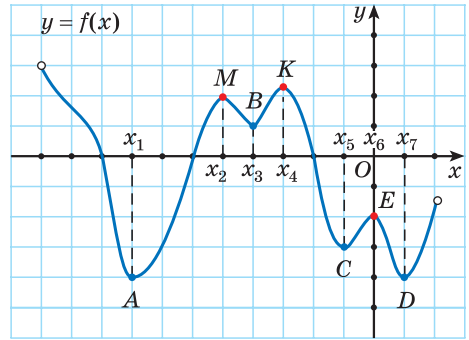


Рис. 136

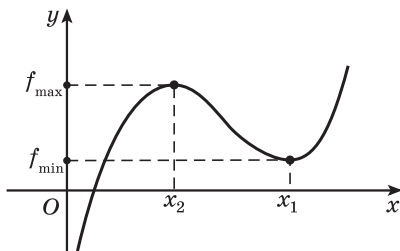


Рис. 137

На рысунку 137 пункт x_1 — пункт мінімуму функцыі $y = f(x)$. Значэнне функцыі ў пункце мінімуму $f(x_1)$ называюць **мінімумам функцыі** (абазначаюць $f_{\min}$).

Пункт x_2 — пункт максімуму функцыі $y = f(x)$. Значэнне функцыі ў пункце максімуму $f(x_2)$ называюць **максімумам функцыі** (абазначаюць $f_{\max}$).

Мінімумы i максімумы называюць **экстрэму** функцыі.

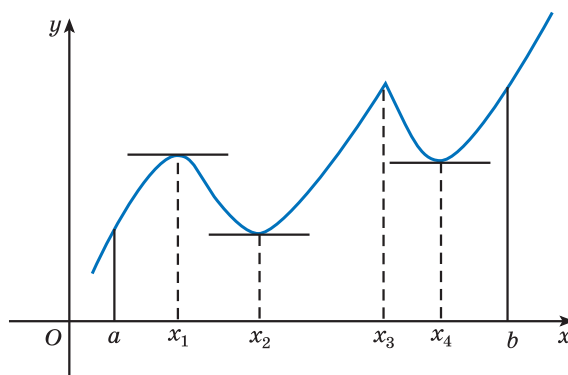


Рис. 138

У пунктах екстремуму дотичная да графіка функцыі або **паралельна восі абсцыс** (пункты x_1, x_2, x_4 на рысунку 138), тады вытворная ў гэтым пункце роўна нулю, або **не існуе** (пункт x_3), гэта азначае, што вытворная ў гэтым пункце **не існуе**.

Заўважым, што злева ад пункта максімуму функцыі $y = f(x)$ значэнні вытворнай дадатныя (функцыя нарастае), а справа — адмоўныя (функцыя спадае).

Гавораць: *«пры пераходзе праз пункт максімуму вытворная мяняе знак з «плюса» на «мінус»* (рыс. 139).

Калі x_0 — пункт мінімуму функцыі $y = f(x)$, то значэнні вытворнай злева ад гэтага пункта адмоўныя (функцыя спадае), а справа — дадатныя (функцыя нарастае).

Гавораць: *«пры пераходзе праз пункт мінімуму вытворная мяняе знак з «мінуса» на «плюс»* (рыс. 140).

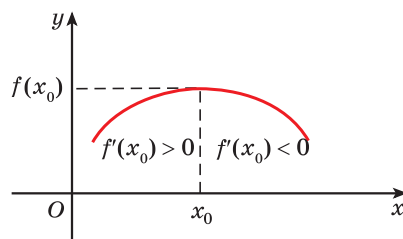


Рис. 139

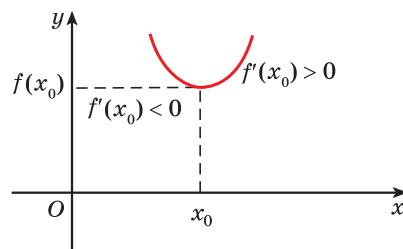


Рис. 140

Тэарэма 3 (прымета пункта максімуму функцыі)

Калі функцыя $f(x)$ непарыўная ў пункце x_0 , а вытворная мяняе знак з «плюса» на «мінус» пры пераходзе праз гэты пункт, то гэты пункт — пункт максімуму функцыі.

Тэарэма 4 (прымета пункта мінімуму функцыі)

Калі функцыя $f(x)$ непарыўная ў пункце x_0 , а вытворная мяняе знак з «мінуса» на «плюс» пры пераходзе праз гэты пункт, то гэты пункт — пункт мінімуму функцыі.



Для таго каб знайсці пункты экстрэмуму функцыі $y = f(x)$, трэба:

- ① Знайсці абсяг вызначэння функцыі $D(f)$.
- ② Знайсці вытворную функцыі $f'(x)$.
- ③ Знайсці пункты з абсягу вызначэння, у якіх вытворная роўна нулю або не існуе.
- ④ Калі функцыя непарыўная ў пункце x_0 , а вытворная пры пераходзе праз гэты пункт x_0 мяняе знак:
 - з «+» на «-», то гэты пункт — пункт максімуму функцыі;
 - з «-» на «+», то гэты пункт — пункт мінімуму функцыі.

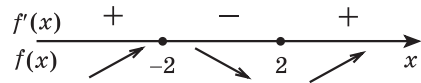
Знайдзіце пункты экстрэмуму функцыі $f(x) = 2x^3 - 24x$.

① $D(f) = \mathbb{R}$.

② $f'(x) = (2x^3 - 24x)' = 6x^2 - 24$.

③ $f'(x) = 0$; $6x^2 - 24 = 0$; $x^2 - 4 = 0$;
 $(x - 2)(x + 2) = 0$; $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

$f'(x)$ існуе на ўсім абсягу вызначэння функцыі $y = f(x)$.



④ $x_{\max} = -2$, $x_{\min} = 2$.

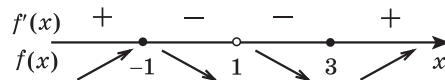
Прыклад 4. Знайдзіце пункты экстрэмуму і экстрэмумы функцыі

$$f(x) = \frac{3x + x^2}{x - 1}.$$

Рашэнне. ① $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

② $f'(x) = \frac{(3 + 2x)(x - 1) - 1 \cdot (3x + x^2)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} = \frac{(x - 3)(x + 1)}{(x - 1)^2}.$

③ $f'(x) = 0$ пры $x = -1$ і $x = 3$.



④ $x_{\max} = -1$; $x_{\min} = 3$.

$$f_{\max} = f(-1) = \frac{3 \cdot (-1) + (-1)^2}{-1 - 1} = 1; \quad f_{\min} = f(3) = \frac{3 \cdot 3 + 3^2}{3 - 1} = 9.$$

Адказ: $x_{\max} = -1$; $f_{\max} = 1$; $x_{\min} = 3$; $f_{\min} = 9$.



На рисунках 141, а, б, в показаны датычныя да графікаў функцый у пункце x_0 . Яны паралельны восі абсцыс, значыць, вытворная ў пункце x_0 роўна нулю ва ўсіх трох выпадках.

Але вытворная функцыі, паказанай на рысунку 141, в, не мяняе знак пры пераходзе праз гэты пункт, таму ў дадзеным выпадку пункт x_0 не з'яўляецца пунктам экстрэмуму функцыі (яна называецца пунктам перагібу).

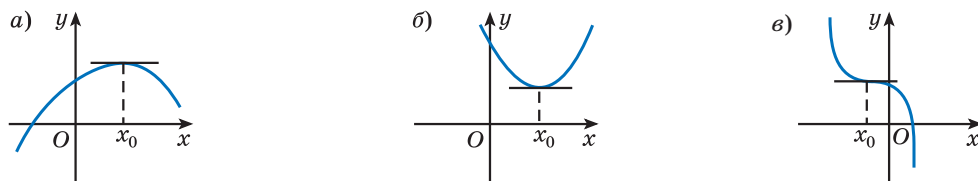


Рис. 141

На рисунках 142, а, б, в показаны графікі функцый, датычная ў пункце x_0 да якіх не існуе, г. зн. не існуе вытворная ў пункце x_0 ва ўсіх трох выпадках. Але на рысунках 142, а, б гэтыя пункты з'яўляюцца пунктамі экстрэмуму, а на рысунку 142, в — пункт x_0 не з'яўляецца пунктам экстрэмуму функцыі.

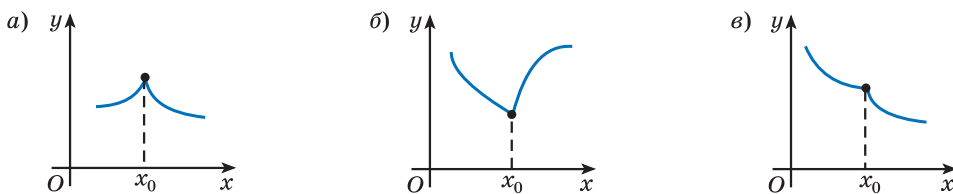


Рис. 142



Унутраныя пункты абсягу вызначэння функцыі, у якіх вытворная роўна нулю або не існуе, называюцца яе **крытычнымі пунктамі**.



Прыклады асноўных заданняў і іх рашэнні

1. Знайдзіце тангенс вугла нахілу да восі абсцыс датычнай, праведзенай да графіка функцыі $f(x) = x^2 + 5x$ у пункце $x_0 = -1$.

Рашэнне. 1) Знайдзем вытворную функцыі: $f'(x) = (x^2 + 5x)' = 2x + 5$.

- 2) Знайдзем значэнне вытворнай у пункце $x_0 = -1$:

$$f'(-1) = 2 \cdot (-1) + 5 = 3.$$

- 3) $\operatorname{tg} \alpha = f'(-1)$, г. зн. $\operatorname{tg} \alpha = 3$.

2. Знайдзіце вугал нахілу да восі абсцыс датычнай, праведзенай да графіка функцыі $f(x) = \frac{1}{x}$ у пункце $N(1; 1)$.

Рашэнне. ① Знайдзем вытворную функцыі: $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

② Знайдзем значэнне вытворнай у пункце $x_0 = 1$: $f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$.

③ $\operatorname{tg} \alpha = f'(1) = -1$.

④ Паколькі $f'(x_0) < 0$, то вугал α тупы, значыць, $\alpha = \pi - \arctg 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

3. Складзіце ўраўненне датычнай да графіка функцыі $f(x) = 3x - x^2$ у пункце з абсцысай $x_0 = 1$.

Рашэнне. Ураўненне прамой, якая з'яўляецца датычнай да графіка дадзенай функцыі ў дадзеным пункце, мае выгляд $y = kx + b$. Паколькі $k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$, то знайдзем значэнне вытворнай дадзенай функцыі ў пункце $x_0 = 1$: $f'(x) = 3 - 2x$; $f'(1) = 3 - 2 \cdot 1 = 1$, значыць, $k = 1$. Тады $y = x + b$. Знайдзем значэнне функцыі ў пункце $x_0 = 1$: $f(1) = 3 \cdot 1 - 1^2 = 2$, г. зн. прамая $y = x + b$ праходзіць праз пункт з каардынатамі $(1; 2)$. Падставім знайдзеныя значэнні ва ўраўненне прамой $y = x + b$ і атрымаем: $2 = 1 + b$; $b = 1$. Такім чынам, $y = x + 1$ — гэта ўраўненне шуканай датычнай.

4. Функцыя $y = h(x)$ зададзена графічна (рыс. 143). Вызначце значэнне вытворнай дадзенай функцыі ў пунктах x_1, x_2, x_3 .

Рашэнне. Паколькі датычныя да графіка функцыі ў пунктах x_1, x_2, x_3 паралельны восі абсцыс, то вугал нахілу датычных у гэтых пунктах да восі абсцыс роўны нулю, г. зн. $\alpha = 0$, тады $\operatorname{tg} 0 = 0$, а паколькі $\operatorname{tg} \alpha = h'(x_0)$, то $h'(x_1) = h'(x_2) = h'(x_3) = 0$.

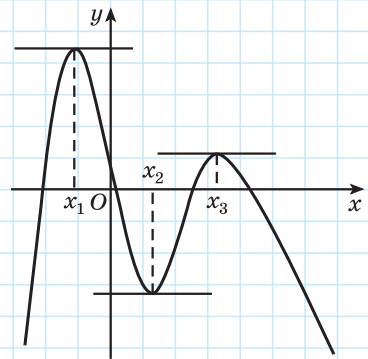
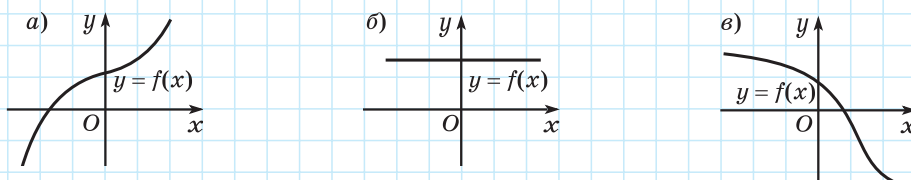


Рис. 143

5. Для графіка функцыі, паказанага на рысунку 144, выберыце правільныя сцверджанні:

1) $f'(x) = 0$; 2) $f'(x) < 0$; 3) $f'(x) > 0$.



Рыс. 144

Рашэнне. а) На рысунку 144, а паказаны графік нарастаўчай функцыі. На гэтым графіку няма пункта, у якім датычная да графіка паралельна восі абсцыс, значыць, вытворная функцыі дадатная $f'(x) > 0$. Правільнае сцверджанне 3).

б) На рысунку 144, б паказаны графік пастаяннай функцыі, значыць, $f'(x) = 0$. Правільнае сцверджанне 1).

в) На рысунку 144, в паказаны графік спадаўчай функцыі. На гэтым графіку няма пункта, у якім датычная да графіка паралельна восі абсцыс, значыць, вытворная функцыі адмоўная $f'(x) < 0$. Правільнае сцверджанне 2).

6. Знайдзіце прамежкі манатоннасці функцыі:

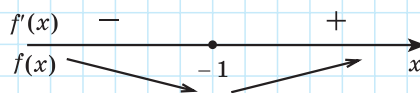
а) $f(x) = x^2 + 2x - 3$; б) $f(x) = -x^3 - 4x^2$.

Рашэнне. а) ① $D(f) = \mathbf{R}$.

② $f'(x) = (x^2 + 2x - 3)' = 2x + 2$.

③ $f'(x) > 0$; $2x + 2 > 0$; $x > -1$; $x \in (-1; +\infty)$;

$f'(x) < 0$ пры $x \in (-\infty; -1)$.



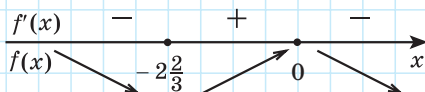
④ **Адказ:** функцыя нарастае на прамежку $[-1; +\infty)$; функцыя спадае на прамежку $(-\infty; -1]$.

б) ① $D(f) = \mathbf{R}$.

② $f'(x) = (-x^3 - 4x^2)'$; $f'(x) = (-x^3)' - (4x^2)'$;

$f'(x) = -3x^2 - 8x$; $f'(x) = -x(3x + 8)$.

③ $f'(x) > 0$ пры $x \in \left(-2\frac{2}{3}; 0\right)$; $f'(x) < 0$ пры $x \in \left(-\infty; -2\frac{2}{3}\right) \cup (0; +\infty)$.



④ *Адказ:* функцыя нарастае на прамежку $\left[-2\frac{2}{3}; 0\right]$; функцыя спадае на прамежках $\left(-\infty; -2\frac{2}{3}\right]$ і $[0; +\infty)$.

7. Па графіку функцыі $y = f(x)$ (рыс. 145) знайдзіце пункты экстрэмуму і экстрэмумы функцыі.

Рашэнне. Пункты мінімуму:

$-6; -4; 1$ і 3 .

Мінімумы функцыі роўны:

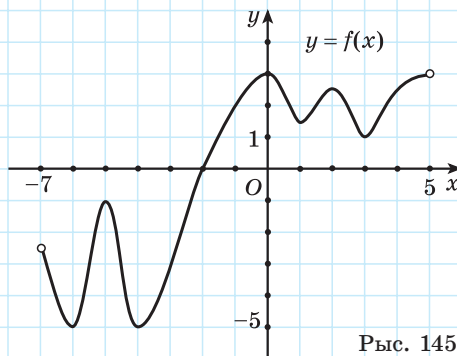
$$f(-6) = -5; f(-4) = -5;$$

$$f(1) = 1,5; f(3) = 1.$$

Пункты максімуму: $-5; 0$ і 2 .

Максімумы функцыі роўны:

$$f(-5) = -1; f(0) = 3; f(2) = 2,5.$$



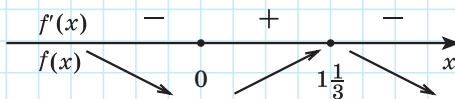
Рыс. 145

8. Знайдзіце пункты экстрэмуму функцыі $f(x) = -x^3 + 2x^2$.

Рашэнне. а) ① $D(f) = \mathbf{R}$.

② $f'(x) = -3x^2 + 4x$.

③ $f'(x) = 0; -3x^2 + 4x = 0; 3x^2 - 4x = 0; x(3x - 4) = 0; x = 0, x = 1\frac{1}{3}$.



④ $x_{\max} = 1\frac{1}{3}, x_{\min} = 0$.

9. Знайдзіце пункты максімуму і мінімуму функцыі $f(x) = 3x^4 - 6x^3 - 1$.

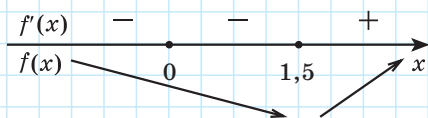
Рашэнне. ① $D(f) = \mathbf{R}$.

② $f'(x) = 12x^3 - 18x^2$.

③ $f'(x) = 0; 12x^3 - 18x^2 = 0; 2x^3 - 3x^2 = 0; x^2(2x - 3) = 0;$

$x = 0, x = 1,5$.

Пры пераходзе праз пункт 0 знак вытворнай не мяняецца.

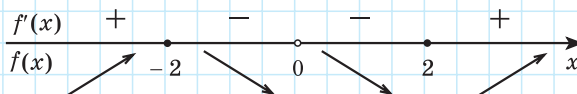


④ $x_{\min} = 1,5$, пунктаў максімуму функцыя не мае.

10. Знайдзіце прамежкі манатоннасці, пункты экстрэмуму і экстрэмумы функцыі $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$.

Рашэнне. $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 4)'x - x'(x^2 + 4)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 4}{x^2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x^2}.$$



Функцыя нарастае на прамежках $(-\infty; -2]$ і $[2; +\infty)$.

Функцыя спадае на прамежках $[-2; 0]$ і $(0; 2]$.

$x_{\min} = 2$; $x_{\max} = -2$.

$$f_{\min} = f(2) = \frac{2^2 + 4}{2} = 4; \quad f_{\max} = f(-2) = \frac{(-2)^2 + 4}{-2} = -4.$$



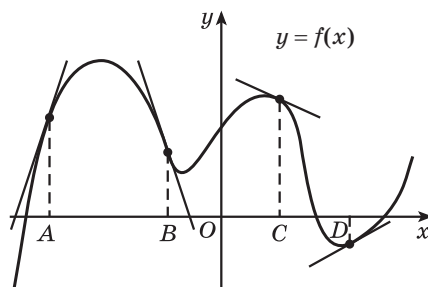
1. Калі вытворная ў пункце функцыі $y = f(x)$ роўна:

а) 2; б) -1; в) 0; г) 0,1, — то вугал, які ўтварае датычная да графіка функцыі ў гэтым пункце:

1) тупы; 2) востры; 3) прамы; 4) роўны нулю.

Выберыце правільныя адказы.

2. Вызначце знак вытворнай функцыі $y = f(x)$ у пунктах A, B, C, D на рысунку 146.



Рыс. 146



3.78. Знайдзіце тангенс вугла нахілу датычнай да графіка функцыі $f(x) = x^2 - 4x$ у пункце:

а) $x_0 = 5$;

б) $x_0 = -2$;

в) $x_0 = 1$;

г) $x_0 = 2$.

3.79. На рисунку 147 показаны графік функції $y = f(x)$. Запишіть некалькі пунктаў, у якіх дотичная да графіка дадзенай функцыі ўтварае з воссю абсцыс:

- а) востры вугал; б) тупы вугал.

У якіх пунктах дотичная да графіка дадзенай функцыі паралельна восі абсцыс?

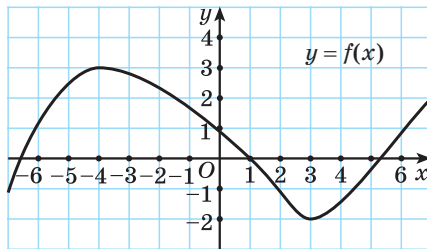


Рис. 147

3.80. Знайдзіце тангенс вугла нахілу дотичнай да графіка функцыі $y = f(x)$ у пункце $x_0 = 1$, калі:

- а) $f(x) = x^3 - 3x^2$; б) $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{x}$; в) $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$.

3.81. Да графіка функцыі $y = f(x)$ у пункце з абсцысай x_0 праведзена дотичная (рис. 148). Знайдзіце $f'(x_0)$.

3.82. Выкарыстайце алгарытм і знайдзіце вугал нахілу да восі абсцыс дотичнай, праведзенай да графіка функцыі:

- а) $f(x) = x^2$ у пункце $x_0 = 0,5$;
 б) $f(x) = \frac{x^2}{2} - 1$ у пункце $x_0 = \sqrt{3}$;
 в) $f(x) = -x^3 + x^2$ у пункце $x_0 = 1$;
 г) $f(x) = \frac{6-x}{x}$ у пункце $x_0 = -2$.

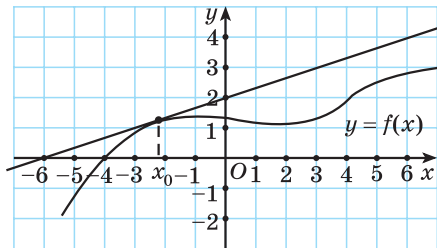


Рис. 148

3.83. Ці праўда, што дотичная да графіка функцыі $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$ у пункце $x_0 = 1$ утварае тупы вугал з воссю абсцыс?

3.84. У якім пункце графіка функцыі $f(x) = 2x^2 + \sqrt{3}x - 3$ дотичная да графіка дадзенай функцыі нахілена да восі абсцыс пад вуглом 60° ?

3.85. Складзіце ўраўненне дотичнай да графіка функцыі $y = f(x)$ у пункце з абсцысай x_0 :

- а) $f(x) = x^2 + 4x + 2$, $x_0 = 1$; б) $f(x) = 3x - x^2$, $x_0 = 0$;
 в) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x$, $x_0 = -2$; г) $f(x) = x^4 - 9x^2$, $x_0 = -1$.

3.86. Вызначце паслядоўнасць дзеянняў і складзіце ўраўненне дотичнай да графіка функцыі $f(x) = \frac{2}{x-1}$ у пункце $x_0 = -1$.

3.87. Визначце, ці належыць пункт графіку функцыі $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$, складзіце ўраўненне датычнай да графіка дадзенай функцыі ў пункце:

- а) $A(1; 0,5)$; б) $A(0; -2)$.

3.88. Визначце парадак дзеянняў і складзіце ўраўненне датычнай да графіка функцыі $y = x^3 + 3x^2 - 5$ у пункце перасячэння гэтага графіка з восьсю ардынат.

3.89. На рысунку 149 паказаны графік функцыі $y = f(x)$. Знайдзіце значэнні аргумента, пры якіх:

- а) $f'(x) > 0$; б) $f'(x) < 0$.

3.90. Выкарыстайце алгарытм і знайдзіце прамежкі манатоннасці функцыі:

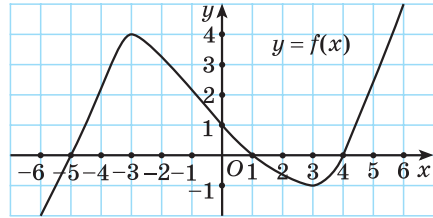


Рис. 149

а) $f(x) = 2x^2 - 5$;

б) $f(x) = x^3 - 3x$;

в) $f(x) = x^4 - 2x^2$; г) $f(x) = 8 - 6x^2 - x^4$.

3.91. Знайдзіце прамежкі спадання функцыі $f(x) = \frac{3}{x} - 8x$.

3.92. Прымяніце алгарытм і вызначце прамежкі манатоннасці функцыі:

а) $f(x) = x^3 - x^2 - x - 7$; б) $f(x) = 4x - x^4$;

в) $f(x) = 5 + 3x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$.

3.93. Знайдзіце прамежкі нарастання і прамежкі спадання функцыі:

а) $f(x) = \frac{x+4}{x}$; б) $f(x) = \frac{x-5}{2x+3}$.

3.94. Дакажыце, што функцыя $y = f(x)$ нарастае на ўсім абсягу вызначэння:

а) $f(x) = 6x - 5$; б) $f(x) = x^3 + 7x$;

в) $f(x) = x^3 - x^2 + 6x + 5$; г) $f(x) = x^7 - x^4 + x + 5$.

3.95. Прывядзіце прыклад функцыі, якая спадае на ўсім абсягу вызначэння.

3.96. Выкарыстайце алгарытм і знайдзіце пункты экстрэмуму функцыі:

а) $f(x) = x^2 - 4x + 7$; б) $f(x) = x^3 - \frac{3x^2}{2}$;

в) $f(x) = 5 + 3x - x^2 - \frac{x^3}{3}$; г) $f(x) = 2x^4 - x$.

3.97. На рисунку 150 показаны графік функції $y = f(x)$, задане на проміжку $[-7; 7]$. Знайдіть значення аргумента, при яких $f'(x) = 0$.

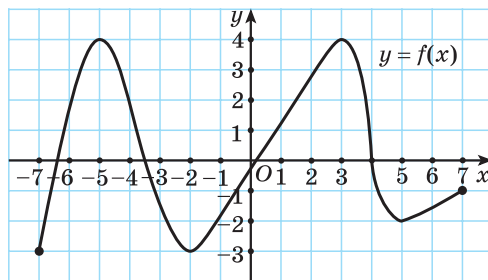


Рис. 150

3.98. Функція $y = f(x)$ визначена на множині раціональних лікаў. Вядома, што $f'(x) = (x - 2)(x + 3)(x - 1)$. Знайдіть проміжки наростання функції.

3.99. Використайте алгоритм і знайдіть точки екстремуму і екстремуми функції:

а) $f(x) = 8 - 6x - x^2$; б) $f(x) = 4x^2 - x^4$;

в) $f(x) = x + \frac{9}{x}$; г) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$.

3.100. Доведіть, що функція $f(x) = -x^5 - 4x^3$ не має екстремуму.

3.101. Знайдіть мінімум функції $f(x) = (x + 1)(x - 2)^2$.

3.102. Знайдіть проміжки монотонності і точки екстремуму функції:

а) $f(x) = 12x - x^3$; б) $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1$.

3.103. Знайдіть проміжки наростання і проміжки спадання, а також точки екстремуму функції $f(x) = \frac{x^2 - 8x}{x + 1}$.



3.104. Знайдіть тангенс кута нахилу дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 + 2x$ у точці: а) $x_0 = 2$; б) $x_0 = -1$; в) $x_0 = -3$.

3.105. Знайдіть тангенс кута нахилу дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці $x_0 = -2$, калі:

а) $f(x) = 2x^3 - x^2$;

б) $f(x) = 3x - \frac{1}{x}$;

в) $f(x) = \frac{x - 5}{x - 1}$.

3.106. До графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисой x_0 проведена дотична (рис. 151). Знайдіть $f'(x_0)$.

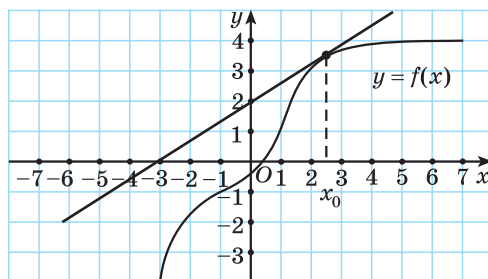


Рис. 151

3.107. Выкарыстайце алгарытм і знайдзіце вугал нахілу да восі абсцыс датычнай, праведзенай да графіка функцыі:

а) $f(x) = \frac{x^2}{2} - x$ у пункце $x_0 = -1$; б) $f(x) = x^3 - 3x^2$ у пункце $x_0 = 1$.

3.108. Вызначце паслядоўнасць дзеянняў і знайдзіце, у якім пункце графіка функцыі $f(x) = x^2 + 6x + 5$ датычная да графіка дадзенай функцыі нахілена да восі абсцыс пад вуглом 45° .

3.109. Складзіце ўраўненне датычнай да графіка функцыі $y = f(x)$ у пункце з абсцысай x_0 :

а) $f(x) = x^2 - 3x + 7$, $x_0 = 2$; б) $f(x) = \frac{x^4}{4} - 3x$, $x_0 = 0$.

3.110. Складзіце ўраўненне датычнай да графіка функцыі $f(x) = 2 - \frac{4}{x}$ у пункце $x_0 = 2$.

3.111. Складзіце ўраўненне датычнай да графіка функцыі $f(x) = \frac{7-x}{x-3}$ у пункце графіка $A(4; 3)$.

3.112. Выберыце паслядоўнасць дзеянняў і складзіце ўраўненне датычнай да графіка функцыі $y = 3x^3 + 2x + 5$ у пункце перасячэння гэтага графіка з воссю ардынат.

3.113. Знайдзіце прамежкі манатоннасці функцыі:

а) $f(x) = 4x^2 + 2x$; б) $f(x) = x^4 - 8x^2$; в) $f(x) = 3x - x^3$.

3.114. Знайдзіце прамежкі нарастання функцыі $f(x) = 5x - \frac{4}{x}$. Ці можна запісаць прамежкі спадання гэтай функцыі?

3.115. Знайдзіце прамежкі спадання функцыі $f(x) = 1 + x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{3x^4}{4}$.

3.116. Выкарыстайце алгарытм і знайдзіце прамежкі спадання і прамежкі нарастання функцыі

$$f(x) = \frac{4x+3}{x-1}.$$

3.117. На рысунку 152 паказаны графік функцыі $y = f(x)$, зададзенай на прамежку $[-7; 7]$. Знайдзіце значэнні аргумента, пры якіх $f'(x) = 0$.

3.118. Выкарыстайце алгарытм і знайдзіце пункты экстрэмуму функцыі:

а) $f(x) = x^2 + 6x - 4$;

б) $f(x) = 3x^2 - x^3$.

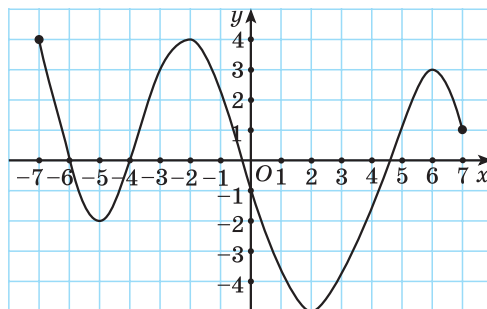


Рис. 152

3.119. Знайдзіце пункты экстрэмуму і экстрэмуму функцыі:

а) $f(x) = 5 - 4x - x^2$; б) $f(x) = 3x - x^3$; в) $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

3.120. Знайдзіце максімум функцыі $f(x) = (x - 4)^2(x - 1)$. Ці можна знайсці мінімум гэтай функцыі?

3.121. Знайдзіце прамежкі манатоннасці і пункты экстрэмуму функцыі:

а) $f(x) = x^3 - 3x$; б) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 5$.

3.122*. Знайдзіце прамежкі нарастання і прамежкі спадання, а таксама пункты экстрэмуму функцыі $f(x) = \frac{x^2 + 9}{x}$.



3.123. Выкарыстайце ўласцівасці каранёў n -й ступені і знайдзіце значэнні выразаў $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ і $\sqrt[4]{m} : \sqrt[4]{n}$, калі:

а) $a = 25$, $b = 5$, $m = 3$, $n = 243$;
 б) $a = 0,27$, $b = 0,1$, $m = 0,6$, $n = 9,6$;
 в) $a = 3\frac{4}{7}$, $b = \frac{5}{49}$, $m = \frac{5}{8}$, $n = \frac{2}{125}$.

3.124. Знайдзіце прамежкі манатоннасці функцыі:

а) $f(x) = (x - 3)^2 - 1$; б) $f(x) = -2(x + 5)^2 + 7$.

3.125. Рашыце ўраўненне:

а) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} = 0$; б) $\sqrt{2} \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$.

3.126. Выканайце дзеянні:

$$\left(\frac{3a}{a+5} - \frac{8a}{a^2+10a+25} \right) : \frac{3a+7}{a^2-25} + \frac{5a-25}{a+5}.$$

§ 21. Пряманенне вытворнай да даследавання функцый



3.127. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = \frac{3}{x}$; б) $y = \sqrt{x}$; в) $y = x^3$; г) $y = |x|$.

3.128. Пряманіце алгарытм пабудовы графіка функцыі

$$g(x) = -x^2 + 6x - 2.$$

3.129. Пабудуйце графік функцыі $y = 3(x - 1)^2$, выкарыстаўшы пераўтварэнне графіка функцыі $y = 3x^2$.