

**3.119.** Знайдзіце пункты экстрэмуму і экстрэмуму функцыі:

а)  $f(x) = 5 - 4x - x^2$ ;      б)  $f(x) = 3x - x^3$ ;      в)  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ .

**3.120.** Знайдзіце максімум функцыі  $f(x) = (x - 4)^2(x - 1)$ . Ці можна знайсці мінімум гэтай функцыі?

**3.121.** Знайдзіце прамежкі манатоннасці і пункты экстрэмуму функцыі:

а)  $f(x) = x^3 - 3x$ ;      б)  $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 5$ .

**3.122\*.** Знайдзіце прамежкі нарастання і прамежкі спадання, а таксама пункты экстрэмуму функцыі  $f(x) = \frac{x^2 + 9}{x}$ .



**3.123.** Выкарыстайце ўласцівасці каранёў  $n$ -й ступені і знайдзіце значэнні выразаў  $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$  і  $\sqrt[4]{m} : \sqrt[4]{n}$ , калі:

а)  $a = 25$ ,  $b = 5$ ,  $m = 3$ ,  $n = 243$ ;  
 б)  $a = 0,27$ ,  $b = 0,1$ ,  $m = 0,6$ ,  $n = 9,6$ ;  
 в)  $a = 3\frac{4}{7}$ ,  $b = \frac{5}{49}$ ,  $m = \frac{5}{8}$ ,  $n = \frac{2}{125}$ .

**3.124.** Знайдзіце прамежкі манатоннасці функцыі:

а)  $f(x) = (x - 3)^2 - 1$ ;      б)  $f(x) = -2(x + 5)^2 + 7$ .

**3.125.** Рашыце ўраўненне:

а)  $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} = 0$ ;      б)  $\sqrt{2} \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$ .

**3.126.** Выканайце дзеянні:

$$\left( \frac{3a}{a+5} - \frac{8a}{a^2+10a+25} \right) : \frac{3a+7}{a^2-25} + \frac{5a-25}{a+5}.$$

## § 21. Прымяненне вытворнай да даследавання функцый



**3.127.** Пабудуйце графік функцыі:

а)  $y = \frac{3}{x}$ ;      б)  $y = \sqrt{x}$ ;      в)  $y = x^3$ ;      г)  $y = |x|$ .

**3.128.** Прымяніце алгарытм пабудовы графіка функцыі

$$g(x) = -x^2 + 6x - 2.$$

**3.129.** Пабудуйце графік функцыі  $y = 3(x - 1)^2$ , выкарыстаўшы пераўтварэнне графіка функцыі  $y = 3x^2$ .



Даследаванне функцый з дапамогай вытворнай дазваляе вывучаць уласцівасці розных функцый, напрыклад цэлых рацыянальных і дробава-рацыянальных.



### Алгарытм даследавання функцыі з дапамогай вытворнай

- ① Знайсці абсяг вызначэння функцыі.
- ② Даследаваць функцыю на цотнасць.
- ③ Знайсці, калі магчыма, нулі функцыі (пункты перасячэння графіка з воссю абсцыс), для гэтага рашыць ураўненне  $f(x) = 0$ .
- ④ Знайсці пункт перасячэння графіка з воссю ардынат, для гэтага вылічыць значэнне функцыі ў пункце 0, г. зн.  $f(0)$ .
- ⑤ Знайсці прамежкі манатоннасці, пункты экстрэмуму і экстрэмуны функцыі.
- ⑥ Пабудаваць графік, выкарыстаўшы вынікі даследавання.

Разгледзім некаторыя прыклады даследавання функцый і пабудовы іх графікаў.

*Прыклад 1.* Даследуйце функцыю  $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$  і пабудуйце яе графік.

*Рашэнне.* ① Знайдзем абсяг вызначэння функцыі:  $D(f) = \mathbf{R}$ .

② Даследуем функцыю на цотнасць:  $f(-x) = (-x)^3 + 4(-x)^2 + 4(-x) = -x^3 + 4x^2 - 4x$ , г. зн.  $f(-x) \neq f(x)$  і  $f(-x) \neq -f(x)$ , значыць, функцыя не з'яўляецца ні цотнай, ні няцотнай.

③ Знайдзем нулі функцыі, для гэтага рэшым ураўненне  $f(x) = 0$ :

$$x^3 + 4x^2 + 4x = 0; \quad x(x^2 + 4x + 4) = 0; \quad x(x+2)^2 = 0; \quad \begin{cases} x = 0, \\ x = -2. \end{cases}$$

④ Знайдзем пункт перасячэння графіка з воссю ардынат, для гэтага вылічым:  $f(0) = 0^3 + 4 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 = 0$ .

⑤ Знайдзем прамежкі манатоннасці, пункты экстрэмуму і экстрэмуны функцыі:  $f'(x) = 3x^2 + 8x + 4$ ;  $f'(x) = 3(x+2)\left(x + \frac{2}{3}\right)$ .



$$x_{\max} = -2, \quad f_{\max} = f(-2) = (-2)^3 + 4 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) = 0;$$

$$x_{\min} = -\frac{2}{3}, \quad f_{\min} = f\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1\frac{5}{27}.$$

Атрыманыя вынікі запішам у табліцу.

|         |                                                                                               |                 |                                                                                             |                                |                                                                                                 |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $x$     | $(-\infty; -2)$                                                                               | $-2$            | $(-2; -\frac{2}{3})$                                                                        | $-\frac{2}{3}$                 | $(-\frac{2}{3}; +\infty)$                                                                       |
| $f'(x)$ | +                                                                                             | 0               | -                                                                                           | 0                              | +                                                                                               |
| $f(x)$  | нарастае<br> | 0<br><b>max</b> | спадае<br> | $-1\frac{5}{27}$<br><b>min</b> | нарастае<br> |

⑥ Пабудуем графік, выкарыстаўшы вынікі даследавання.

а) Адзначым пункты перасячэння графіка функцыі з восьмі каардынат па выніках пунктаў 3 і 4 даследавання (рыс. 153, а).

б) Адзначым экстрэмы па выніках пункта 5 даследавання (рыс. 153, б).

в) Дабудуем графік на прамежках нарастання і спадання функцыі (рыс. 153, в).

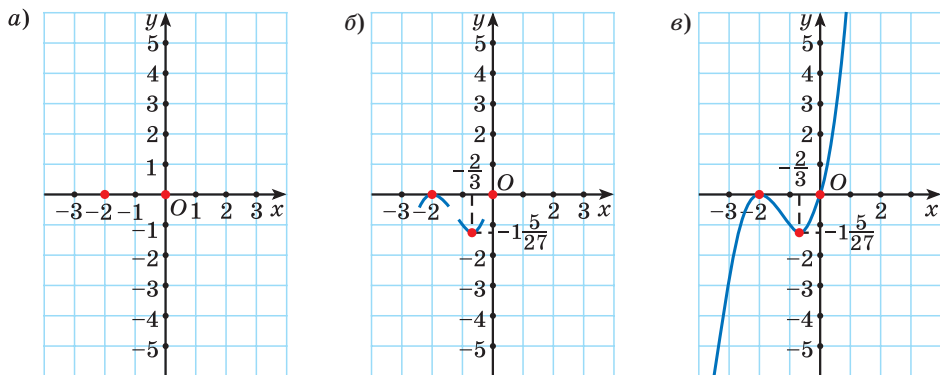


Рис. 153

**Прыклад 2.** Даследуйце функцыю  $f(x) = 0,75x^4 - x^3 - 3x^2$  і пабудуйце яе графік.

**Рашэнне.** Выкарыстаем алгарытм даследавання графіка функцыі з дапамогай вытворнай:

①  $D(f) = \mathbf{R}$ .

②  $f(-x) = 0,75(-x)^4 - (-x)^3 - 3(-x)^2 = 0,75x^4 + x^3 - 3x^2$ ,

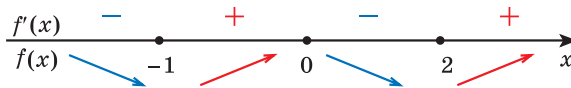
г. зн.  $f(-x) \neq f(x)$  і  $f(-x) \neq -f(x)$ , значыць, функцыя не з'яўляецца ні цотнай, ні няцотнай.

$$\textcircled{3} \quad 0,75x^4 - x^3 - 3x^2 = 0; \quad 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 = 0; \quad x^2(3x^2 - 4x - 12) = 0;$$

$$\begin{cases} x^2 = 0, \\ 3x^2 - 4x - 12 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ x = \frac{2 + 2\sqrt{10}}{3}, \\ x = \frac{2 - 2\sqrt{10}}{3}; \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ x \approx 2,8, \\ x \approx -1,4. \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \quad f(0) = 0,75 \cdot 0^4 - 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0.$$

$$\textcircled{5} \quad f'(x) = 3x^3 - 3x^2 - 6x; \quad f'(x) = 3x(x^2 - x - 2); \quad f'(x) = 3x(x - 2)(x + 1).$$



$$x_{\min} = -1, \quad f_{\min} = f(-1) = 0,75 \cdot (-1)^4 - (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 = -1,25;$$

$$x_{\max} = 0, \quad f_{\max} = f(0) = 0,75 \cdot 0^4 - 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0;$$

$$x_{\min} = 2, \quad f_{\min} = f(2) = 0,75 \cdot 2^4 - 2^3 - 3 \cdot 2^2 = -8.$$

Винікі дослідження записам у таблицю.

|         |                 |                |              |          |            |             |                |
|---------|-----------------|----------------|--------------|----------|------------|-------------|----------------|
| $x$     | $(-\infty; -1)$ | $-1$           | $(-1; 0)$    | $0$      | $(0; 2)$   | $2$         | $(2; +\infty)$ |
| $f'(x)$ | -               | 0              | +            | 0        | -          | 0           | +              |
| $f(x)$  | спадає<br>      | $-1,25$<br>min | наростає<br> | 0<br>max | спадає<br> | $-8$<br>min | наростає<br>   |

$\textcircled{6}$  Побудуем графік, викаристаўшы винікі дослідження (рис. 154).

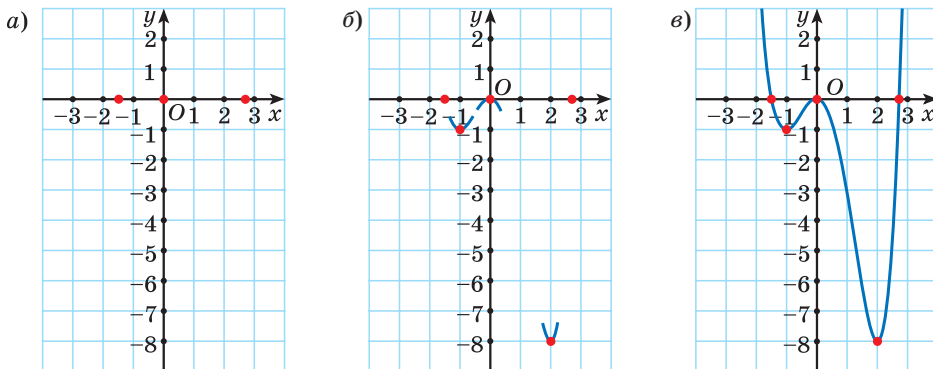


Рис. 154

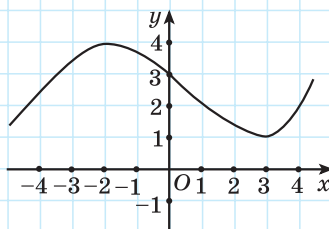


### Прыклады асноўных заданняў і іх рашэнні

1. Пабудуйце графік функцыі, калі некаторыя яе ўласцівасці адлюстраваны ў табліцы:

|         |                                                                                               |          |                                                                                             |          |                                                                                                |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $x$     | $(-\infty; -2)$                                                                               | $-2$     | $(-2; 3)$                                                                                   | $3$      | $(3; +\infty)$                                                                                 |
| $f'(x)$ | +                                                                                             | 0        | -                                                                                           | 0        | +                                                                                              |
| $f(x)$  | нарастае<br> | 4<br>max | спадае<br> | 1<br>min | нарастае<br> |

**Рашэнне.** Напрыклад:



2. Даследуйце функцыю  $f(x) = \frac{x^4}{2} - 4x^2 - 4,5$  і пабудуйце яе графік.

**Рашэнне.** Выкарыстаем алгарытм даследавання графіка функцыі з дапамогай вытворнай:

①  $D(f) = \mathbb{R}$ .

②  $f(-x) = \frac{(-x)^4}{2} - 4(-x)^2 - 4,5 = \frac{x^4}{2} - 4x^2 - 4,5 = f(x)$ , значыць, функцыя цотная, г. зн. яе графік сіметрычны адносна восі ардынаты.

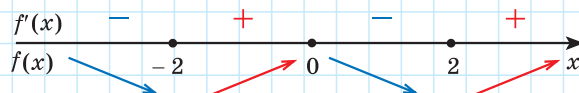
③  $\frac{x^4}{2} - 4x^2 - 4,5 = 0$ ;  $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ . Няхай  $t = x^2$ , тады ўраўненне прымае выгляд

$$t^2 - 8t - 9 = 0; \begin{cases} t = 9, \\ t = -1; \end{cases} \begin{cases} x^2 = 9, \\ x^2 = -1; \end{cases} \begin{matrix} x^2 = 9; \\ \end{matrix} \begin{cases} x = 3, \\ x = -3. \end{cases}$$

Графік функцыі перасякае вось абсцыс у пунктах  $(3; 0)$  і  $(-3; 0)$ .

④  $f(0) = \frac{0^4}{2} - 4 \cdot 0^2 - 4,5 = -4,5$ . Графік функцыі перасякае вось ардынаты ў пункце  $(0; -4,5)$ .

⑤  $f'(x) = 2x^3 - 8x$ ;  $f'(x) = 2x(x^2 - 4)$ ;  $f'(x) = 2x(x - 2)(x + 2)$ .



$$x_{\min} = -2, f_{\min} = f(-2) = \frac{(-2)^4}{2} - 4 \cdot (-2)^2 - 4,5 = -12,5;$$

$$x_{\max} = 0, f_{\max} = f(0) = \frac{0^4}{2} - 4 \cdot 0^2 - 4,5 = -4,5;$$

$$x_{\min} = 2, f_{\min} = f(2) = \frac{2^4}{2} - 4 \cdot 2^2 - 4,5 = -12,5.$$

| $x$     | $(-\infty; -2)$ | $-2$           | $(-2; 0)$    | $0$           | $(0; 2)$   | $2$            | $(2; +\infty)$ |
|---------|-----------------|----------------|--------------|---------------|------------|----------------|----------------|
| $f'(x)$ | -               | 0              | +            | 0             | -          | 0              | +              |
| $f(x)$  | спадає<br>      | $-12,5$<br>min | наростає<br> | $-4,5$<br>max | спадає<br> | $-12,5$<br>min | наростає<br>   |

⑥ Побудуем графік функції (рис. 155).

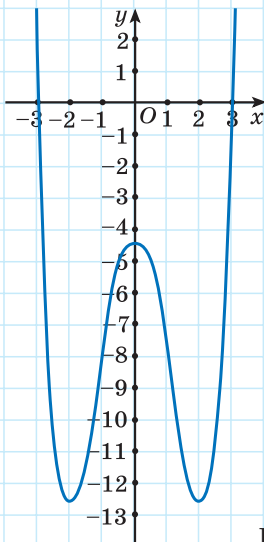


Рис. 155

3. Даследуйце функцыю  $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 4$  і пабудуйце яе графік.

**Рашэнне.** Выкарыстаем алгарытм даследавання графіка функцыі з дапамогай вытворнай:

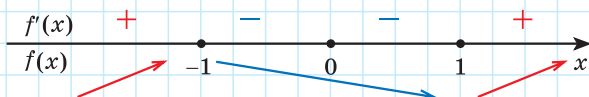
①  $D(f) = \mathbb{R}$ .

②  $f(-x) = 3(-x)^5 - 5(-x)^3 + 4 = -3x^5 + 5x^3 + 4$ , паколькі  $f(-x) \neq f(x)$  і  $f(-x) \neq -f(x)$ , то функцыя не з'яўляецца ні цотнай, ні няцотнай.

③ Графік функцыі перасякае вось абсцыс паміж пунктамі  $-2$  і  $-1$ , паколькі  $f(-2) < 0$ , а  $f(-1) > 0$ .

④  $f(0) = 3 \cdot 0^5 - 5 \cdot 0^3 + 4 = 4$ . Графік функцыі перасякае вось ардынат у пункце  $(0; 4)$ .

⑤  $f'(x) = 15x^4 - 15x^2$ ;  $f'(x) = 15x^2(x^2 - 1)$ ;  $f'(x) = 15x^2(x - 1)(x + 1)$ .



$$x_{\max} = -1, f_{\max} = f(-1) = 3 \cdot (-1)^5 - 5 \cdot (-1)^3 + 4 = 6;$$

$$x_{\min} = 1, f_{\min} = f(1) = 3 \cdot 1^5 - 5 \cdot 1^3 + 4 = 2.$$

| $x$     | $(-\infty; -1)$   | $-1$            | $(-1; 0)$  | $0$                     | $(0; 1)$   | $1$             | $(1; +\infty)$    |
|---------|-------------------|-----------------|------------|-------------------------|------------|-----------------|-------------------|
| $f'(x)$ | +                 | 0               | -          | 0                       | -          | 0               | +                 |
| $f(x)$  | нарас-<br>тае<br> | 6<br><b>max</b> | спадае<br> | 4<br>*пункт<br>перагібу | спадае<br> | 2<br><b>min</b> | нарас-<br>тае<br> |

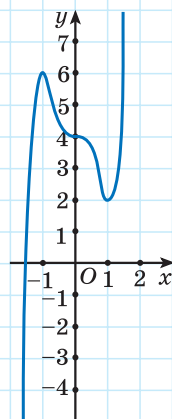


Рис. 156

⑥ Пабудуем графік функцыі (рис. 156).



1. Калі на некаторым прамежку з абсягу вызначэння вытворная функцыі  $f(x)$  дадатная, то:

а)  $f(x) > 0$  на гэтым прамежку;

б) графік функцыі  $f(x)$  не перасякае вось абсцыс на гэтым прамежку;

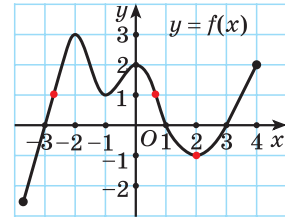
в) функцыя  $f(x)$  не спадае.

Выберыце правільныя адказы.

2. Функцыя  $y = f(x)$  зададзена графічна (рыс. 157). Вызначце знак:

а) функцыі  $f(x)$ ;

б) вытворнай функцыі  $f'(x)$  у адзначаных на графіку пунктах.



Рыс. 157

**3.130.** Выкарыстайце алгарытм даследавання графіка функцыі з дапамогай вытворнай і пабудуйце графік функцыі:

а)  $f(x) = x^3 - 3x$ ;      б)  $f(x) = x^3 - 3x^2$ ;

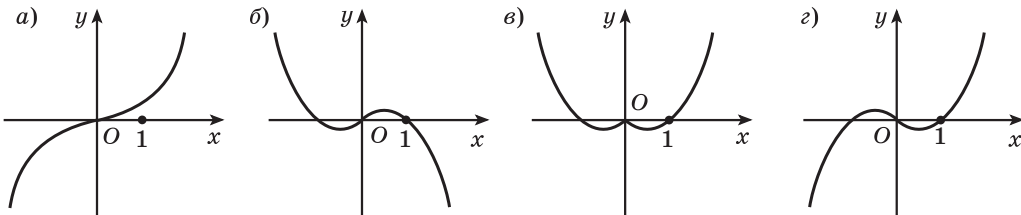
в)  $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2$ ;      г)  $f(x) = 2x^2 - x^3$ .

**3.131.** Даследуйце функцыю і пабудуйце яе графік:

а)  $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$ ;      б)  $f(x) = 2x^2 - x^3 - x$ ;

в)  $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4$ ;      г)  $f(x) = -\frac{x^3}{3} + 4x + 4$ .

**3.132.** З графікаў функцый, паказаных на рысунку 158, выберыце графік функцыі  $f(x) = x^3 - x$ .



Рыс. 158

**3.133.** Вызначце, колькі агульных пунктаў мае прамая  $y = 2$  і графік функцыі:

а)  $f(x) = x^4 - 2x^2$ ;      б)  $f(x) = 2x^4 - x$ ;

в)  $f(x) = 5x^4 - 4x^5$ ;      г)  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 9$ .

**3.134.** Даследуйце функцыю і пабудуйце яе графік:

а)  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 8$ ;      б)  $f(x) = 24x^2 + 9x^4 - 2x^6$ .

**3.135.** Даследуйце функцыю, пабудуйце яе графік і знайдзіце колькасць каранёў ураўнення  $f(x) = -5$ , калі:

а)  $f(x) = (x-1)^2(x+1)$ ;      б)  $f(x) = 4x^2(x-2)^2$ .

**3.136.** Даследуйце функцыю  $y = \frac{x^3}{3} + \frac{9}{4}x^2 + 2x - 3$  і пабудуйце яе графік.

**3.137.** З графікаў функцый, паказаных на рысунку 159, выберыце графік функцыі  $f(x) = x^3 - x^2 - x$ .

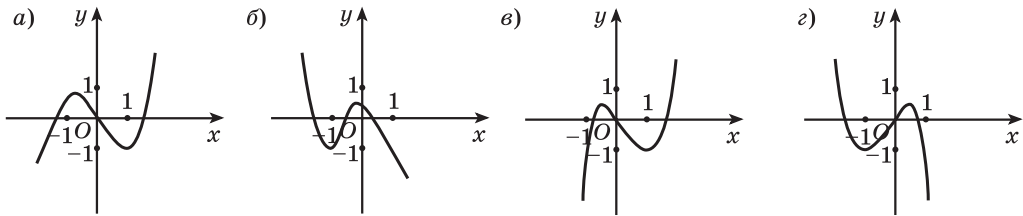


Рис. 159



**3.138.** Выкарыстаўце алгарытм даследавання графіка функцыі з дапамогай вытворнай і пабудуйце графік функцыі:

а)  $f(x) = x^3 - 3x$ ;      б)  $f(x) = 9x - x^3$ .

**3.139.** Даследуйце функцыю і пабудуйце яе графік:

а)  $f(x) = 5x^3 - 3x^5$ ;      б)  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ .

**3.140.** Вызначце, колькі агульных пунктаў маюць прамая  $y = -1$  і графік функцыі  $f(x) = x^6 - 3x^4 - 9x^2$ .

**3.141.** Даследуйце функцыю  $f(x) = (2x-4)(x+1)^2$ , пабудуйце яе графік і знайдзіце колькасць каранёў ураўнення  $f(x) = 4$ .

**3.142.** Даследуйце функцыю  $y = 6 - \frac{x^3}{3} - \frac{7}{4}x^2 - \frac{5}{2}x$  і пабудуйце яе графік.

**3.143.** З графікаў функцый, паказаных на рысунку 159, выберыце графік функцыі  $f(x) = -x^3 - x^2 + x$ .



**3.144.** Дакажыце тоеснасць  $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos \alpha$ .

**3.145.** Рашыце ўраўненне:

а)  $\sqrt{x} = x - 2$ ;      б)  $\sqrt{x^2 + x - 1} = \sqrt{x}$ .

3.146. Вылічыце:

а)  $\frac{16^2 \cdot 3^5}{12^4}$ ;      б)  $\frac{8^5 \cdot 3^4}{48^3}$ ;      в)  $\frac{15^{10}}{25^4 \cdot 3^9}$ ;      г)  $\frac{10^3 \cdot 6^2}{4^4 \cdot 5^4}$ .

3.147. Скараціце дроб:

а)  $\frac{7x^2 - 6x - 1}{7x + 1}$ ;      б)  $\frac{1 - 4x^2}{2x^2 - 5x - 3}$ .

## § 22. Найбольшае і найменшае значэнні функцыі



3.148. Знайдзіце найменшае значэнне функцыі:

а)  $y = x^2 - 2x - 3$ ;      б)  $y = 2\cos 3x$ ;  
в)  $y = 3\sin x - 1$ ;      г)  $y = |x| - 5$ .

3.149. Знайдзіце найбольшае значэнне функцыі:

а)  $g(x) = -x^2 + 6x - 2$ ;      б)  $y = 5\cos x$ ;  
в)  $y = -2\sin x - 1$ ;      г)  $y = -|x| - 1$ .



Разгледзім задачу. Для ўпакоўкі падарунка вырабілі скрыначку, якая мае форму прамавугольнага паралелепіпеда з квадратнай асновай. Скрыначку ўпрыгожылі, абклеіўшы ўсе яе канты каляровай стужкай (рыс. 160). Усяго спатрэбілася 3,6 м стужкі. Знайдзіце памеры скрыначкі, калі вядома, што яе аб'ём найбольшы.



Рыс. 160

*Рашэнне.* Абазначым старану асновы скрыначкі праз  $x$  м ( $x > 0$ ), а вышыню — праз  $b$  м. Тады даўжыня стужкі роўна суме даўжынь усіх кантаў скрыначкі:  $8x + 4b = 3,6$ .

Аб'ём скрыначкі роўны  $V(x) = x^2b$ . З роўнасці  $8x + 4b = 3,6$  выразім  $b = 0,9 - 2x$ , тады  $V(x) = x^2(0,9 - 2x)$  і  $0,9 - 2x > 0$ , г. зн.  $x < 0,45$ .

Атрымалі функцыю  $V(x) = x^2(0,9 - 2x)$ , для якой трэба знайсці найбольшае значэнне пры  $0 < x < 0,45$ .

Для рашэння задач на адшуканне найбольшага (найменшага) значэння функцыі карыстаюцца вытворнай функцыі.

Разгледзім функцыю  $y = f(x)$  для  $x \in [a; b]$ . Калі ўнутры адрэзка  $[a; b]$  няма крытычных пунктаў, тады яна нарастае ці спадае на адрэзку  $[a; b]$