Глава 1

ТРИГОНОМЕТРИЯ

§ 1. Единичная окружность. Градусная и радианная мера произвольного угла

1.1. Определите, какие из данных точек координатной плоскости находятся на одинаковом расстоянии от начала координат: $A(-4;\ 3)$; $B(3;\ 4)$; $C(4;\ -3)$; $D(0{,}75;\ -0{,}4)$; $E\left(-\frac{3}{4};\ -\frac{2}{5}\right)$.

1.2. Назовите координаты точек, симметричных точкам $A(3;\ 1)$ и $B(-1;\ 5)$ относительно: а) оси ординат; б) оси абсцисс; в) начала координат.

На рисунке 2 изображены колебания маятника и показан график функции, описывающей смещение маятника от положения равновесия в зависимости от времени. Изучение процесса колебания маятника, а также многих других процессов в физике (механические, электромагнитные колебания, волны и т. д.) приводит к необходимости рассматривать тригонометрические функции действительного аргумента.

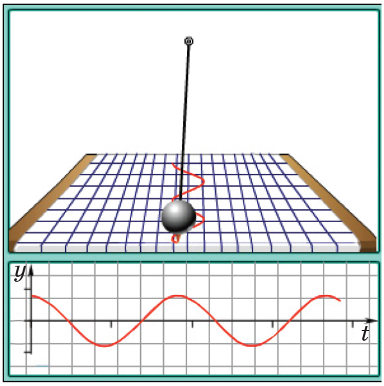


Рис. 2

Для изучения тригонометрических функций используется понятие единичной окружности.

Единичную окружность называют также координатной окружностью.

Определение. Окружность на координатной плоскости единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 3) называется **единичной окружностью.**

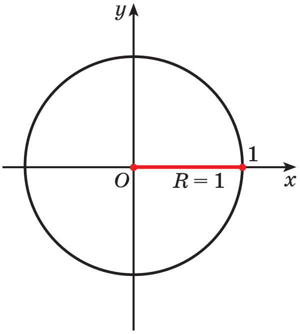


Рис. 3

Для того чтобы задать координатную окружность, нужно указать:

- начало отсчета — точку $P_0(1;\ 0)$;
- направление движения точки по окружности (против часовой стрелки — положительное, а по часовой стрелке — отрицательное (рис. 4)).

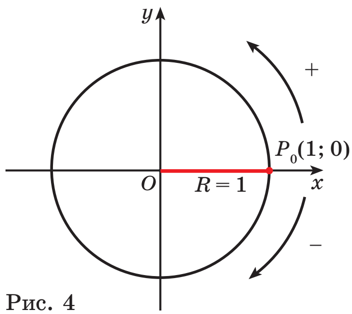


Рис. 4

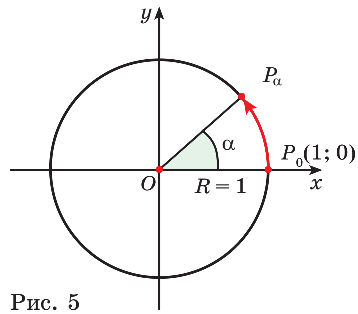


Рис. 5

Точки на окружности будем получать путем поворота точки $P_0(1;\ 0)$ единичной окружности вокруг начала координат на заданный угол.

Точка P_α (рис. 5) получена поворотом

● точки $P_0(1;\ 0)$ (указывается, какая точка поворачивается)

● вокруг начала координат (указывается центр поворота)

● на угол α (указывается, на какой угол выполняется поворот — угол поворота).

Таким образом, при повороте точки P_0 вокруг начала координат на угол α в заданном направлении получается точка P_α единичной окружности.

Пример 1. Построить на единичной окружности точку P_{120°.

Решение. Точку P_{120° получаем поворотом **против** часовой стрелки точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол 120° (рис. 6).

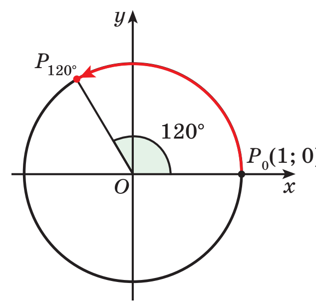


Рис. 6

Пример 2. Построить на единичной окружности точку P_{-120°.

Решение. Точку P_{-120° получаем поворотом **по** часовой стрелке точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол 120° (рис. 7).

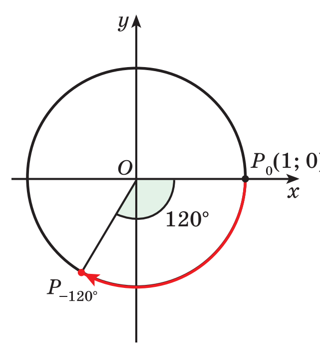


Рис. 7

Пример 3. Построить на единичной окружности точку:

а) P_{360°; б) P_{630°; в) P_{990°.

Решение. а) Так как поворот на 360° соответствует одному полному обороту, то необходимо выполнить поворот точки $P_0(1;\ 0)$ против часовой стрелки на 360° (полный оборот). Точка P_{360° совпадет с точкой P_0 (рис. 8, *а*).

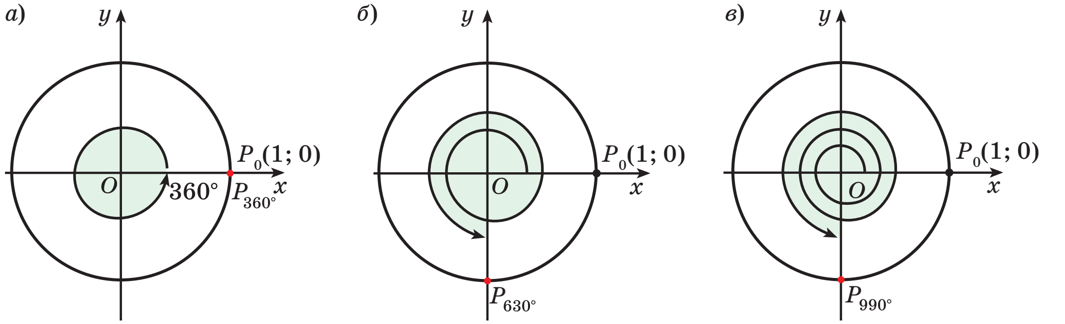


Рис. 8

б) Так как $630° = 360° + 270°$, то необходимо выполнить один полный оборот и еще поворот точки $P_0(1; 0)$ вокруг начала координат против часовой стрелки на угол 270° (рис. 8, *б*).

в) Так как $990° = 2 \cdot 360° + 270°$, то необходимо выполнить два полных оборота и еще поворот точки $P_0(1; 0)$ вокруг начала координат против часовой стрелки на угол 270° (рис. 8, *в*).

Пример 4. Построить на единичной окружности точку $P_{-1200°}$.

Решение. Так как $-1200° = -360° \cdot 3 + (-120°)$, то необходимо выполнить три полных оборота и еще поворот точки $P_0(1; 0)$ вокруг начала координат по часовой стрелке на угол 120° (рис. 9).

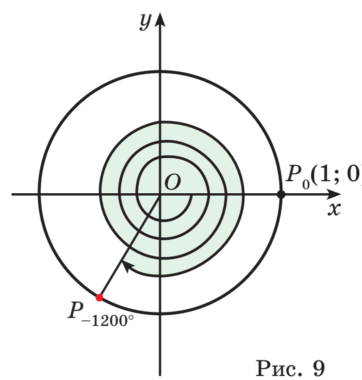


Рис. 9

Радианное измерение углов

По формуле длины окружности $C = 2\pi R$ получим, что длина единичной окружности ($R = 1$) равна 2π.

На единичной окружности (рис. 10) легко отметить точки $P_{\frac{\pi}{2}}$; P_{π}; $P_{\frac{3\pi}{2}}$; $P_{2\pi}$, соответствующие углам поворота 90° (четверть окружности), 180° (половина окружности), 270° (три четверти окружности), 360° (вся окружность).

Числа $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{3\pi}{2}$; 2π — это радианная мера углов, градусная мера которых соответственно равна 90°, 180°, 270°, 360°.

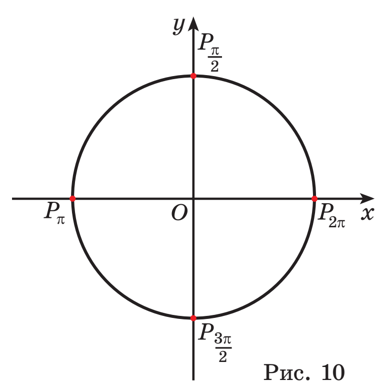


Рис. 10

Угол в 1 радиан (от лат. *radius* — луч, радиус) — это центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности.

На рисунке 11 отмечена точка единичной окружности, соответствующая углу в 1 радиан. Длина дуги единичной окружности, соответствующей углу в 1 радиан, равна 1.

Так как 2π радиан соответствует $360°$, то градусная мера угла в 1 радиан равна:

$$1 \text{ рад} = \frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi} \approx 57°.$$

Сокращенное обозначение радиана «рад» чаще всего опускают.

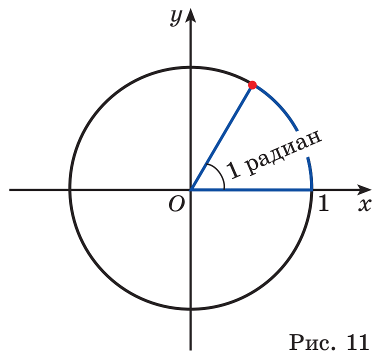


Рис. 11

$$180° = \pi \text{ рад};$$

$$1° = \frac{\pi}{180°} \text{ рад}; \; 1 \text{ рад} = \frac{180°}{\pi}$$

Чтобы выразить **градусную** меру угла $n°$ **в радианной**, нужно $n°$ умножить на $\frac{\pi}{180°}$.

Например,

$$30° = 30° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{6};$$

$$-450° = -450° \cdot \frac{\pi}{180°} = -\frac{5\pi}{2}.$$

$$120° = 120° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{2\pi}{3}$$

$$-225° = -225° \cdot \frac{\pi}{180°} = -\frac{5\pi}{4}$$

Чтобы выразить **радианную** меру угла α **в градусной**, нужно число α умножить на $\frac{180°}{\pi}$.

Например,

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{180°}{\pi} = 45°;$$

$$2 \text{ рад} = 2 \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 2 \cdot 57° = 114°.$$

$$-\frac{9\pi}{4} = -\frac{9\pi}{4} \cdot \frac{180°}{\pi} = -405°$$

$$5 \text{ рад} = 5 \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 5 \cdot 57° = 285°$$

На рисунке 12 показано соответствие между градусной и радианной мерой некоторых углов.

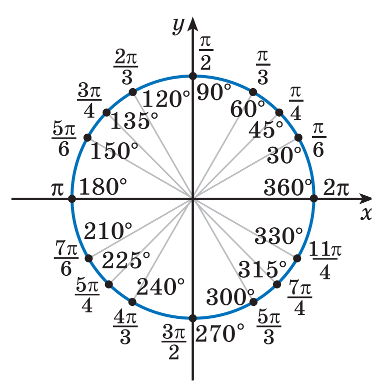


Рис. 12

Пример 5. Построить на единичной окружности точку $P_{\frac{2\pi}{3}}$.

Решение. Точку $P_{\frac{2\pi}{3}}$ получаем поворотом против часовой стрелки точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол $\frac{2\pi}{3} = 120°$ (рис. 13).

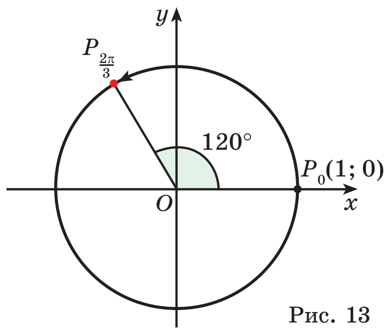


Рис. 13

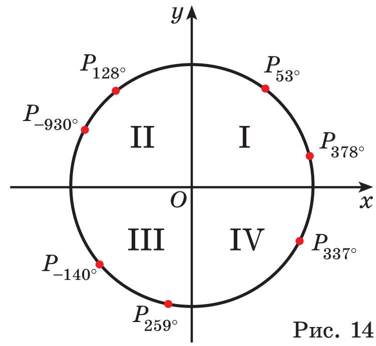


Рис. 14

В зависимости от того, в какую четверть координатной плоскости попадает точка P_α, говорят, что в такой же четверти находится угол α.

Например, углы 53° и 378° находятся в первой четверти, углы 128° и –930° находятся во второй четверти, углы 259° и –140° находятся в третьей четверти, а угол 337° находится в четвертой четверти (рис. 14).

Углы 0°; 90°; 180°; 270°; 360°; ... соответствуют границам четвертей.

Пример 6. Определите, в какой четверти находится угол 3 рад.

Решение. 3 рад $\approx 3 \cdot 57° = 171°$. Так как $90° < 171° < 180°$ $\left(\frac{\pi}{2} < 3 \text{ рад} < \pi\right)$, то данный угол находится во второй четверти.

Примеры основных заданий и их решения

1. На единичной окружности отметьте точку, получаемую поворотом точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол:

а) 50°; б) –220°; в) –90°; г) 190°.

Решение. а) Точку $P_{50°}$ получаем поворотом **против** часовой стрелки точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол 50° (рис. 15, *а*).

б) Точку $P_{-220°}$ получаем поворотом **по** часовой стрелке точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол 220° (см. рис. 15, *а*).

в) Точку $P_{-90°}$ получаем поворотом **по** часовой стрелке точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол 90° (рис. 15, *б*).

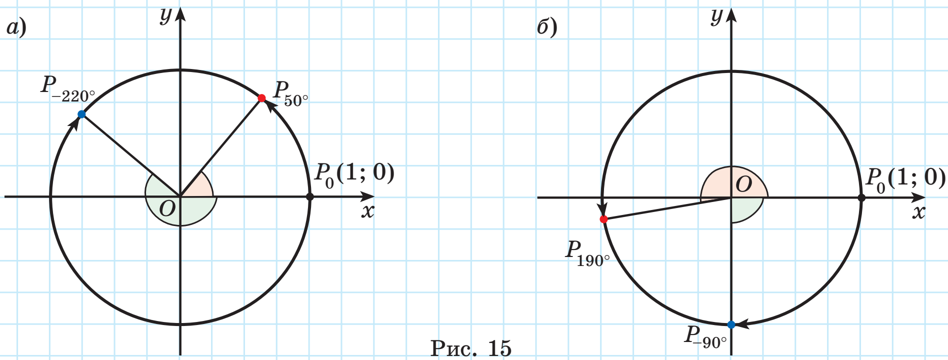


Рис. 15

г) Точку $P_{190°}$ получаем поворотом **против** часовой стрелки точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол 190° (см. рис. 15, *б*).

2. Покажите, что точки:
а) $P_{40°}$ и $P_{400°}$; б) $P_{-10°}$ и $P_{-730°}$ — единичной окружности совпадают.

Решение. а) Поскольку 400° = 360° + 40°, то, для того чтобы получить точку $P_{400°}$, нужно выполнить один полный оборот и еще поворот точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат против часовой стрелки на угол 40° (рис. 16, *а*).

б) –730° = –360° · 2 + (–10°) (рис. 16, *б*).

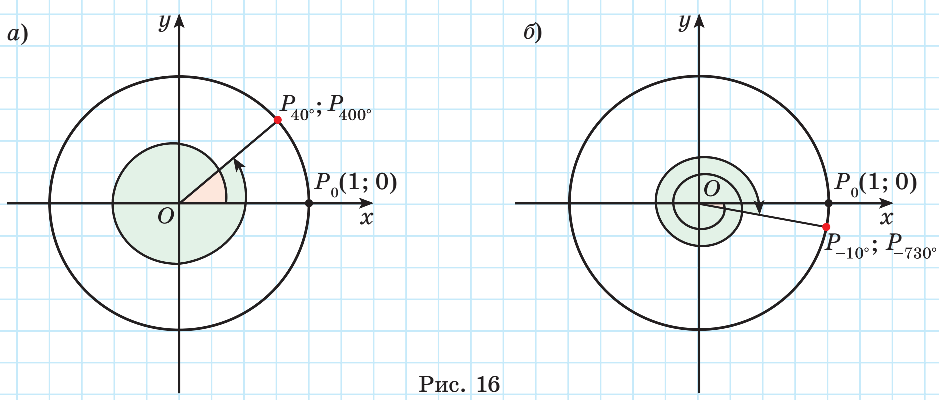


Рис. 16

3. На единичной окружности отметьте точку, получаемую поворотом точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол:
а) 550°; б) –1300°.

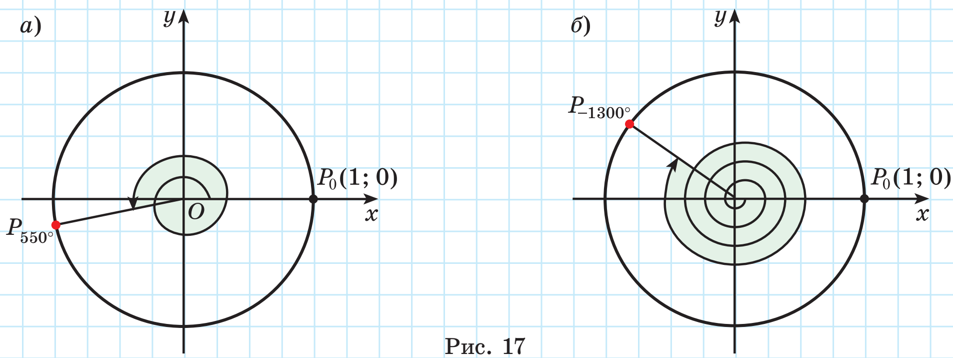


Рис. 17

Решение. а) Так как $550° = 360° + 190°$, то выполним один полный оборот и еще поворот точки $P_0(1; 0)$ вокруг начала координат против часовой стрелки на угол $190°$ (рис. 17, *а*).

б) Так как $-1300° = -360° \cdot 3 + (-220°)$, то выполним три полных оборота и еще поворот точки $P_0(1; 0)$ вокруг начала координат по часовой стрелке на угол $220°$ (рис. 17, *б*).

4. Запишите все углы α, для которых точка P_α совпадает с точкой:
а) $P_{90°}$; б) $P_{-217°}$.

Решение. а) Отметим на единичной окружности точку $P_{90°}$. Так как, например, $450° = 90° + 360°$, $810° = 90° + 2 \cdot 360°$, $-270° = 90° - 360°$ и т. п., то точки единичной окружности $P_{450°}$, $P_{810°}$, $P_{-270°}$ совпадают с точкой $P_{90°}$ единичной окружности. Очевидно, что существует бесконечно много углов α, для которых точки единичной окружности P_α и $P_{90°}$ совпадают. Эти углы могут быть получены в результате поворота точки $P_{90°}$ на целое число полных оборотов по или против часовой стрелки (рис. 18), таким образом, $\alpha = 90° + 360° \cdot n, n \in \boldsymbol{Z}$.

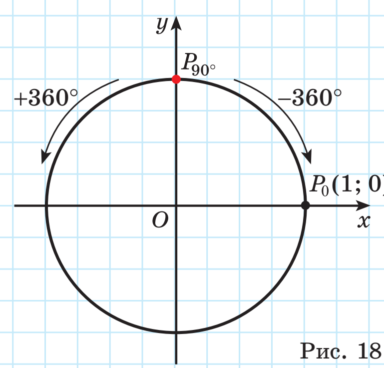


Рис. 18

б) $\alpha = -217° + 360° \cdot n, n \in \boldsymbol{Z}$.

5. Выразите в радианах угол:
а) $150°$; б) $20°$; в) $-80°$; г) $2000°$.

Решение.

а) $150° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{5\pi}{6}$; б) $20° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{9}$;

в) $-80° \cdot \frac{\pi}{180°} = -\frac{4\pi}{9}$; г) $2000° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{100\pi}{9}$.

6. Выразите в градусах угол:

а) $\frac{\pi}{2}$; б) $-\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{7\pi}{18}$; г) $\frac{4\pi}{3}$; д) 4; е) −3.

Решение.

а) $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{180°}{\pi} = 90°$; б) $-\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} \cdot \frac{180°}{\pi} = -45°$;

в) $\frac{7\pi}{18} = \frac{7\pi}{18} \cdot \frac{180°}{\pi} = 70°$; г) $\frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{180°}{\pi} = 240°$;

д) 4 рад $\approx 4 \cdot 57° = 228°$; е) −3 рад $\approx -3 \cdot 57° = -171°$.

7. На единичной окружности отметьте точку, получаемую поворотом точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол:

а) $\frac{5\pi}{6}$; б) $\frac{13\pi}{6}$.

Решение. а) Так как $\frac{5\pi}{6} = 150°$, то выполним поворот точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол 150° (рис. 19, *а*).

б) Поскольку $\frac{13\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{6}$, то точка $P_{\frac{13\pi}{6}}$ совпадает с точкой $P_{\frac{\pi}{6}}$ (рис. 19, *б*).

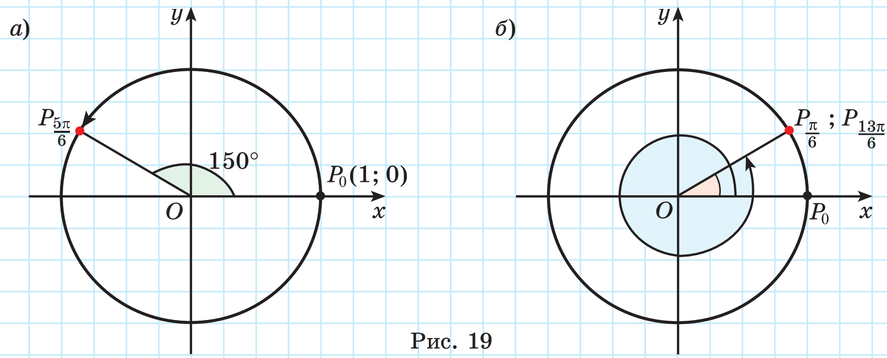


Рис. 19

1. Выберите углы, соответствующие точке $P_0(1;\ 0)$ единичной окружности:

а) 0°; б) 180°; в) 90°; г) −360°.

2. Какие из данных точек единичной окружности совпадают:

а) P_α; б) $P_{\alpha + 180°}$; в) $P_{\alpha + 360°}$; г) $P_{\alpha + 90°}$?

1.3. Найдите градусную меру угла, изображенного на рисунке 20.

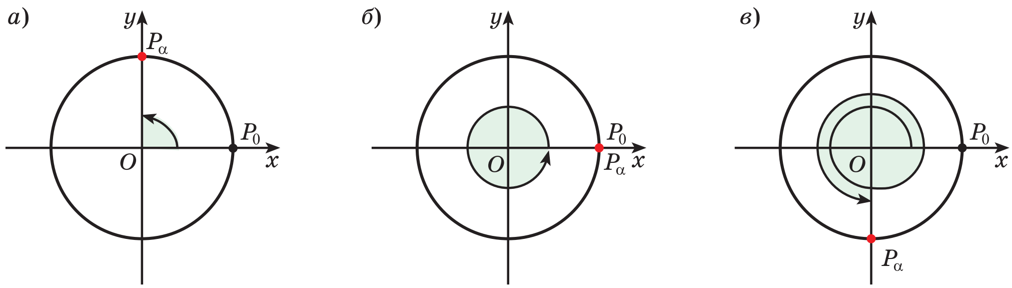


Рис. 20

1.4. Начертите единичную окружность и постройте точки, получаемые поворотом точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол:

а) 150°; 210°; 540°; –45°; –135°; –720°;

б) –43°; 137°; –456°; 280°; –189°; 763°.

1.5. На единичной окружности отмечены точки P_α, P_β и P_γ, соответствующие углам поворота α, β и γ (рис. 21). Запишите градусные меры углов α, β и γ, если известно, что они заключены в промежутке:

а) от 0° до 360°;

б) от –360° до 0°;

в) от 720° до 1080°.

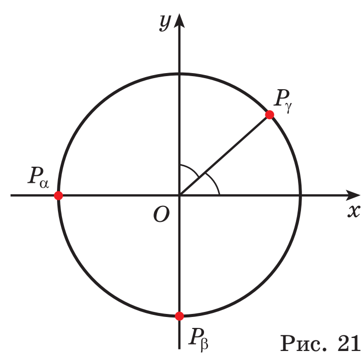


Рис. 21

1.6. Запишите два положительных и два отрицательных угла α, для которых точка P_α совпадает с точкой:

а) $P_{45°}$; б) $P_{-330°}$.

1.7. Среди углов поворота α, равных 770°; 480°; –50°; 1560°; –240°; –310°, найдите такие, для которых точка P_α совпадает с точкой:

а) $P_{50°}$; б) $P_{120°}$.

1.8. На единичной окружности отмечены точки P_α и P_β, соответствующие углам поворота α и β (рис. 22). Запишите все такие углы α и β.

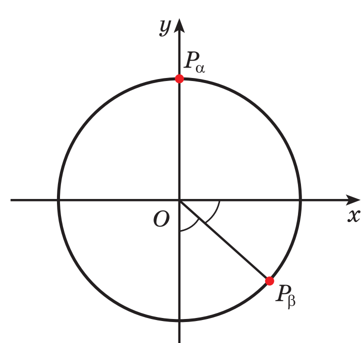


Рис. 22

1.9. Запишите все углы α, для которых точка P_α совпадает с точкой:
а) $P_{180°}$; б) $P_{117°}$; в) $P_{245°}$; г) $P_{-107°}$.

1.10. Выразите в градусах угол, радианная мера которого равна:
а) $-\pi$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{7\pi}{12}$; г) $-\frac{3\pi}{5}$.

1.11. Выразите в радианах угол:
а) 10°; б) –135°; в) –1200°; г) 720°.

1.12. Выразите в градусах угол:
а) 3 рад; б) 0,8 рад; в) –6 рад; г) –1,1 рад.

1.13. Начертите единичную окружность и постройте точки, получаемые поворотом точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол: $\frac{\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{6}$; $-\frac{9\pi}{4}$; $-\frac{7\pi}{6}$. Сколько различных точек получилось?

1.14. Определите, углом какой четверти является угол α, если:
а) $\alpha = 126°$; б) $\alpha = -189°$; в) $\alpha = 722°$; г) $\alpha = \frac{\pi}{3}$; д) $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$;
е) $\alpha = \frac{11\pi}{5}$; ж) $\alpha = 2$; з) $\alpha = -4$; и) $\alpha = 7$; к) $\alpha = -3$.

1.15. Определите, в какой четверти находится угол α, если:
а) $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; в) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; г) $-\frac{3\pi}{2} < \alpha < -\pi$.

1.16. На единичной окружности отмечены точки P_α и P_β, соответствующие углам поворота α и β (рис. 23). Запишите радианные меры углов α и β, если известно, что они заключены в промежутке:
а) от 0 до 2π; б) от -2π до 0; в) от 2π до 4π.

1.17. На единичной окружности отмечены точки P_α и P_β, соответствующие углам поворота α и β (рис. 24). Запишите (в радианах) все такие углы α и β.

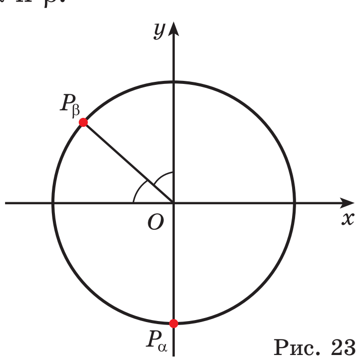


Рис. 23

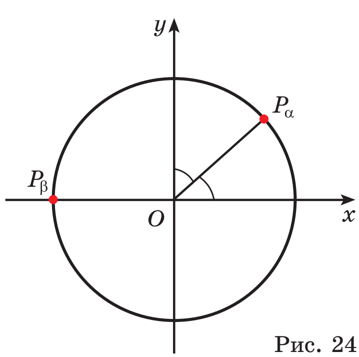


Рис. 24

1.18. Начертите единичную окружность и постройте точки, получаемые поворотом точки $P_0(1; 0)$ вокруг начала координат на угол 1 рад; 3 рад; –4 рад; 6 рад.

1.19. Сколько полных оборотов содержит угол, радианная мера которого равна: 4π; -6π; 12π; -100π? В каком направлении точка $P_0(1; 0)$ движется по окружности в каждом случае?

1.20. Как расположены на единичной окружности точки, полученные поворотом точки $P_0(1; 0)$ на углы:

а) α и $\alpha + 2\pi$;

б) α и $\alpha + \pi$;

в) α и $-\alpha$?

1.21. Определите вид треугольника, если радианная мера двух его углов равна $\frac{2\pi}{5}$ и $\frac{3\pi}{10}$.

1.22. Выразите в градусах и радианах угол, на который поворачивается минутная стрелка часов за 15, 20, 30 и 60 минут.

1.23. Выразите в градусах и радианах угол, на который в течение одних суток поворачивается:

а) часовая стрелка часов;

б) минутная стрелка часов.

1.24. Найдите градусную меру угла, изображенного на рисунке 25.

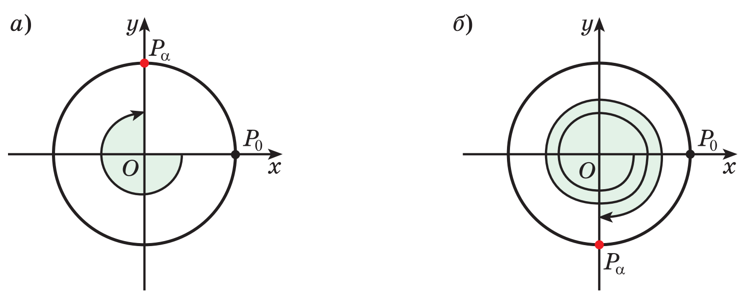


Рис. 25

1.25. Начертите единичную окружность и постройте точки, получаемые поворотом точки $P_0(1; 0)$ вокруг начала координат на угол:

а) 120°; –90°; 450°; 240°;

б) 38°; 185°; –295°; 724°.

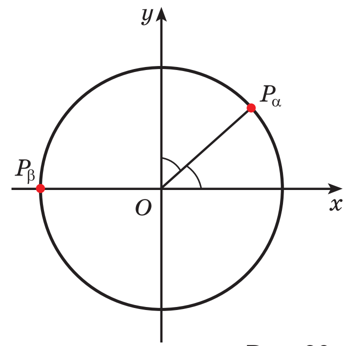


Рис. 26

1.26. На единичной окружности отмечены точки P_α и P_β, соответствующие углам поворота α и β (рис. 26). Запишите градусные меры углов α и β, если известно, что они заключены в промежутке:

а) от $0°$ до $360°$; б) от $-360°$ до $0°$;
в) от $360°$ до $720°$.

1.27. Запишите два положительных и два отрицательных угла α, для которых точка P_α совпадает с точкой: а) $P_{225°}$; б) $P_{-60°}$.

1.28. Запишите все углы α, для которых точка P_α совпадает с точкой:

а) $P_{90°}$; б) $P_{-68°}$; в) $P_{318°}$; г) $P_{-125°}$.

1.29. Выразите в градусах угол: а) $\frac{\pi}{4}$; б) $-\frac{11\pi}{18}$; в) $-\frac{5\pi}{2}$.

1.30. Выразите в радианах угол: а) $18°$; б) $-60°$; в) $-1080°$.

1.31. Выразите в градусах угол: а) 4 рад; б) $-0{,}5$ рад.

1.32. Начертите единичную окружность и постройте точки, получаемые поворотом точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол: $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$; π; $\frac{7\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{3}$.

1.33. Определите, углом какой четверти является угол α, если:

а) $\alpha = 213°$; б) $\alpha = -352°$; в) $\alpha = \frac{7\pi}{10}$; г) $\alpha = -\frac{\pi}{6}$;
д) $\alpha = 4$; е) $\alpha = -1$; ж) $\alpha = 9$; з) $\alpha = -5$.

1.34. Определите, в какой четверти находится угол α, если:

а) $0° < \alpha < 90°$; б) $180° < \alpha < 270°$;
в) $-180° < \alpha < -90°$; г) $360° < \alpha < 450°$.

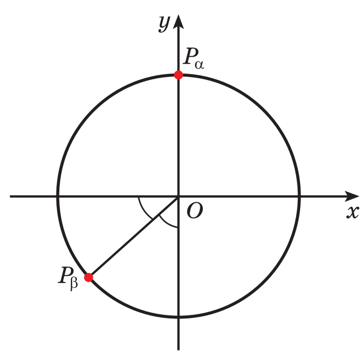


Рис. 27

1.35. На единичной окружности отмечены точки P_α и P_β, соответствующие углам поворота α и β (рис. 27). Запишите все такие углы α и β, используя радианную меру.

1.36. Найдите градусную меру всех углов треугольника, если радианная мера двух его углов равна $\frac{\pi}{15}$ и $\frac{3\pi}{15}$.

1.37. Выразите в градусах и радианах угол, на который в течение двух часов повернется:

а) минутная стрелка часов;
б) секундная стрелка часов.

1.38. Из данных точек выберите точку с отрицательной абсциссой:
а) $A(-2;\ 3)$; б) $B(5;\ -8)$; в) $C(0;\ -7)$; г) $D(4;\ 0)$.

1.39. Найдите значение выражения:
а) $9 + 2\frac{3}{8}$; б) $9 - 2\frac{3}{8}$; в) $2\frac{3}{8} - 9$; г) $-9 - 2\frac{3}{8}$; д) $-2\frac{3}{8} + 9$.

§ 2. Определение синуса и косинуса произвольного угла

1.40. Из точек $A(-4;\ 0)$; $B(0;\ 3)$; $C(4;\ 1)$; $D(1;\ 0)$; $E\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$ выберите точки, лежащие на оси:
а) абсцисс; б) ординат.

1.41. Из точек $A(-4;\ 6)$; $B(3;\ -7)$; $C(-1;\ -10)$; $D(0{,}1;\ -0{,}4)$; $E(-0{,}3;\ -0{,}4)$; $F(1;\ 0{,}5)$ выберите точки, лежащие:
а) в первой четверти; б) во второй четверти;
в) в третьей четверти; г) в четвертой четверти.

1.42. Назовите несколько точек, лежащих:
а) на оси ординат; б) на оси абсцисс;
в) в третьей четверти; г) в четвертой четверти.

При изучении геометрии вы рассматривали отношения сторон в прямоугольном треугольнике и познакомились с понятиями синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла (рис. 28).

Построим точку $P_\alpha(x_\alpha;\ y_\alpha)$ единичной окружности поворотом точки P_0 вокруг начала координат на угол α (рис. 29).

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$;

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$;

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$;

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$

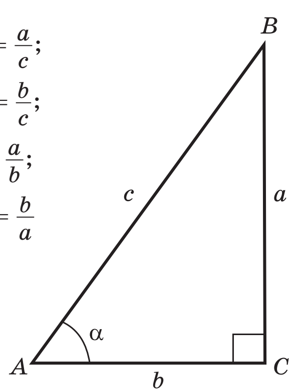


Рис. 28

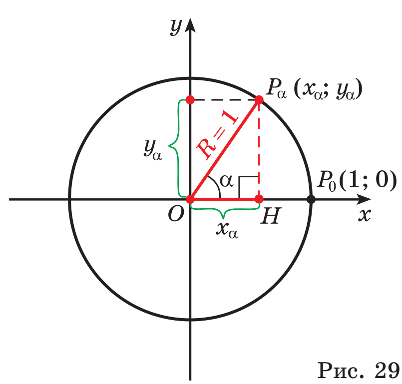


Рис. 29

Рассмотрим прямоугольный треугольник $P_\alpha OH$, в котором гипотенуза $P_\alpha O$ равна 1 (радиусу единичной окружности). По определению синуса и косинуса острого угла получим: $\sin\alpha = \dfrac{P_\alpha H}{P_\alpha O} = \dfrac{y_\alpha}{1} = y_\alpha$, $\cos\alpha = \dfrac{OH}{P_\alpha O} = \dfrac{x_\alpha}{1} = x_\alpha$.

Таким образом, синус угла α равен ординате точки P_α, а косинус угла α равен абсциссе точки P_α.

Поскольку в тригонометрии рассматриваются углы $\alpha \in (-\infty; +\infty)$, то определим синус и косинус для любого угла α.

> **Определение. Синусом** угла α называется **ордината** точки P_α, полученной поворотом точки $P_0(1; 0)$ единичной окружности вокруг начала координат на угол α:
>
> $$\sin\alpha = y_\alpha \text{ (рис. 30).}$$
>
> **Косинусом** угла α называется **абсцисса** точки P_α, полученной поворотом точки $P_0(1; 0)$ единичной окружности вокруг начала координат на угол α:
>
> $$\cos\alpha = x_\alpha \text{ (см. рис. 30).}$$

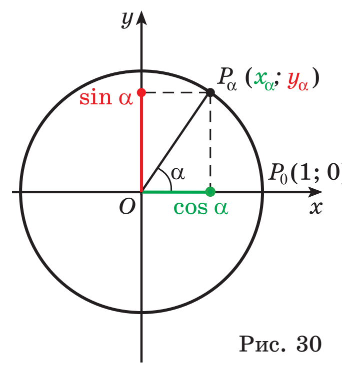
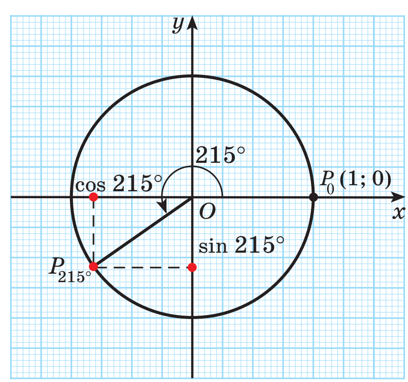


Рис. 30

Для того чтобы найти синус и косинус произвольного угла α, нужно:

① Построить точку P_α единичной окружности.	Найдите синус и косинус угла $\alpha = 215°$. ① 
② Найти ординату точки P_α: $\sin\alpha = y_\alpha$.	② $\sin 215° = y_{215°} \approx 0{,}6$.
③ Найти абсциссу точки P_α: $\cos\alpha = x_\alpha$.	③ $\cos 215° = x_{215°} \approx 0{,}8$.

Значения синуса и косинуса произвольного угла с помощью единичной окружности в основном можно указать только приближенно.

Однако для некоторых углов значения синуса и косинуса можно указать точно. Определим значения синуса и косинуса для углов, которые соответствуют точкам пересечения окружности с осями координат (0; $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{3\pi}{2}$ и 2π). Найдем $\sin\frac{\pi}{2}$ и $\cos\frac{\pi}{2}$. Углу $\alpha = \frac{\pi}{2}$ соответствует точка $P_{\frac{\pi}{2}}$, имеющая координаты (0; 1). По определению синус угла $\alpha = \frac{\pi}{2}$ равен ординате точки $P_{\frac{\pi}{2}}$, значит, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Косинус угла $\alpha = \frac{\pi}{2}$ равен абсциссе точки $P_{\frac{\pi}{2}}$, т. е. $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ (рис. 31).

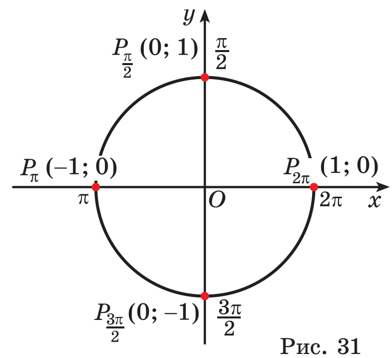


Рис. 31

Пользуясь определением синуса и косинуса угла α, получим, что: $\sin 0 = 0$; $\cos 0 = 1$; $\sin\pi = 0$; $\cos\pi = -1$; $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$; $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$; $\sin 2\pi = 0$; $\cos 2\pi = 1$.

Так как ординаты и абсциссы точек единичной окружности изменяются от –1 до 1, то значения синуса и косинуса произвольного угла принадлежат промежутку [–1; 1], т. е. $-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$ и $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$.

$$-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$$
$$-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$$

Например, выясним, может ли $\sin\alpha$ принимать значения, равные: $\frac{1}{3}$; $\sqrt{3}$; -2; $-0{,}7$.

Значения синуса произвольного угла принадлежат отрезку [–1; 1], значит, $\sin\alpha$ может принимать значения, равные $\frac{1}{3}$ и –0,7, так как $\frac{1}{3} \in [-1; 1]$ и $-0{,}7 \in [-1; 1]$. Поскольку $\sqrt{3} \notin [-1; 1]$ и $-2 \notin [-1; 1]$, то $\sin\alpha$ не может принимать значения, равные $\sqrt{3}$ и –2.

По определению синуса и косинуса угла α, синус угла α равен ординате точки P_α, а косинус угла α равен абсциссе этой точки. Значит, знаки $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ совпадают со знаками ординаты и абсциссы точки P_α соответственно.

Пример 1. Определите знак выражения:

а) $\sin 130°$; б) $\cos 258°$; в) $\sin(-150°)$; г) $\cos(-340°)$.

Решение. а) Так как 130° — угол второй четверти (рис. 32), а ординаты точек единичной окружности, находящихся во второй четверти, положительны, то $\sin 130° > 0$.

б) Так как 258° — угол третьей четверти (см. рис. 32), а абсциссы точек единичной окружности, находящихся в третьей четверти, отрицательны, то $\cos 258° < 0$.

в) Так как –150° — угол третьей четверти (см. рис. 32), а ординаты точек единичной окружности, находящихся в третьей четверти, отрицательны, то $\sin(-150°) < 0$.

г) Так как –340° — угол первой четверти (см. рис. 32), а абсциссы точек единичной окружности, находящихся в первой четверти, положительны, то $\cos(-340°) > 0$.

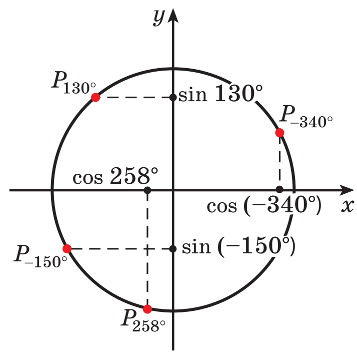


Рис. 32

Из геометрии нам известны значения синусов и косинусов острых углов (см. табл.).

Градусы	30°	45°	60°
Радианы	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

С помощью этих значений можно находить значения синусов и косинусов некоторых других углов α.

Пример 2. Вычислите:

а) $\sin(-60°)$ и $\cos(-60°)$; б) $\sin 120°$ и $\cos 120°$;

в) $\sin 240°$ и $\cos 240°$; г) $\sin 420°$ и $\cos 420°$.

Решение. а) Отметим на единичной окружности точку $P_{60°}$. Поскольку известно, что $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а $\cos 60° = \frac{1}{2}$, то ордината точки $P_{60°}$ равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$, а абсцисса этой точки равна $\frac{1}{2}$.

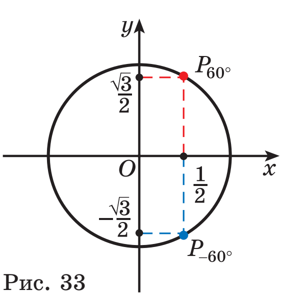


Рис. 33

Точки $P_{60°}$ и $P_{-60°}$ единичной окружности симметричны относительно оси абсцисс (рис. 33), значит, их ординаты (синусы углов 60° и –60°) противоположны, а абсциссы (косинусы углов 60° и –60°) равны. Таким образом, $\sin(-60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, а $\cos(-60°) = \frac{1}{2}$.

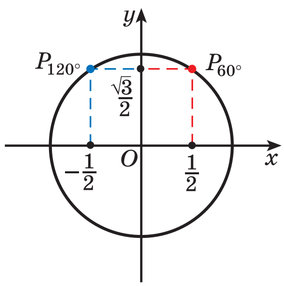


Рис. 34

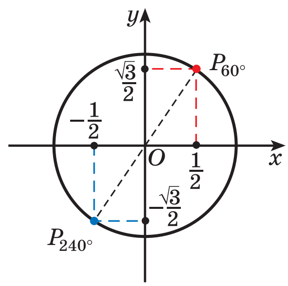


Рис. 35

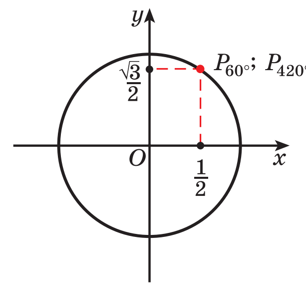


Рис. 36

б) Так как $120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$, то точки P_{60° и P_{120° единичной окружности симметричны относительно оси ординат (рис. 34). Тогда их ординаты (синусы углов 60° и 120°) равны, а абсциссы (косинусы углов 60° и 120°) противоположны. Значит, $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$.

в) Точки P_{60° и P_{240° единичной окружности симметричны относительно начала координат (рис. 35), поскольку $240^\circ = 180^\circ + 60^\circ$. Тогда и их ординаты противоположны, и их абсциссы противоположны, т. е. $\sin 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, а $\cos 240^\circ = -\frac{1}{2}$.

г) Поскольку $420^\circ = 60^\circ + 360^\circ$, то точки P_{60° и P_{420° единичной окружности совпадают (рис. 36), а значит, их координаты равны. Тогда $\sin 420^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а $\cos 420^\circ = \frac{1}{2}$.

*Пример 3**. Вычислите:

а) $\cos\frac{9\pi}{4}$; б) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

Решение. а) Так как $\frac{9\pi}{4} = \frac{8\pi + \pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$, то точка $P_{\frac{9\pi}{4}}$ единичной окружности совпадает с точкой $P_{\frac{\pi}{4}}$ (рис. 37).

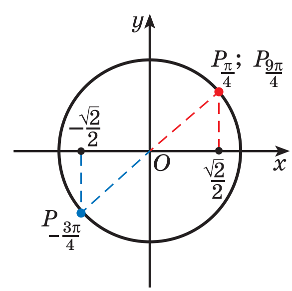


Рис. 37

Поскольку $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $\cos\frac{9\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

б) Точки $P_{-\frac{3\pi}{4}}$ и $P_{\frac{\pi}{4}}$ единичной окружности симметричны относительно начала координат (см. рис. 37), а значит, их абсциссы (косинусы углов $\frac{\pi}{4}$ и $-\frac{3\pi}{4}$) отличаются только знаком. Так как $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Пример 4. Постройте один из углов, если:

а) $\sin\alpha = \frac{1}{4}$; б) $\cos\alpha = 0{,}8$.

Решение. а) Так как $y_\alpha = \sin\alpha$, то на оси ординат отметим $\frac{1}{4}$. Проведем прямую, параллельную оси абсцисс, и найдем на единичной окружности точки P_{α_1} и P_{α_2}, ордината каждой из которых равна $\frac{1}{4}$. Отметим один из углов, соответствующих точкам P_{α_1} или P_{α_2} (рис. 38, *а*).

б) Так как $x_\alpha = \cos\alpha$, то на оси абсцисс отметим 0,8. Проведем прямую, параллельную оси ординат, и найдем на единичной окружности точки P_{α_1} и P_{α_2}, абсцисса каждой из которых равна 0,8. Отметим один из углов, соответствующих точкам P_{α_1} или P_{α_2} (рис. 38, *б*).

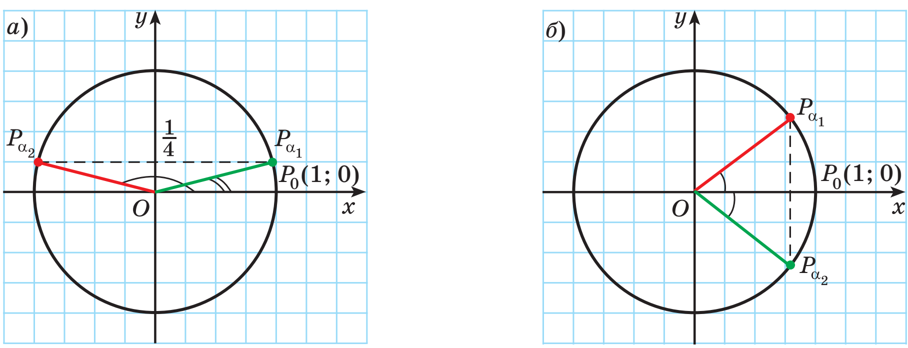


Рис. 38

Примеры основных заданий и их решения

1. Точка P_α единичной окружности имеет координаты $P_\alpha\left(\frac{1}{5};\ -\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)$. Используя определение синуса и косинуса произвольного угла, найдите $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

Решение. Синусом угла α называется ордината точки P_α, полученной поворотом точки $P_0(1;\ 0)$ единичной окружности вокруг начала координат на угол α. По условию ордината точки P_α равна $-\frac{2\sqrt{6}}{5}$, значит, $\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Косинусом угла α называется абсцисса точки P_α, полученной поворотом точки $P_0(1;\ 0)$ единичной окружности вокруг начала координат на угол α. По условию абсцисса точки P_α равна $\frac{1}{5}$, значит, $\cos\alpha = \frac{1}{5}$.

2. Если $\sin\alpha = -1$, то угол α может быть равен:

а) $180°$; б) $90°$; в) $-90°$;
г) $-180°$; д) $-270°$.

Выберите правильный ответ.

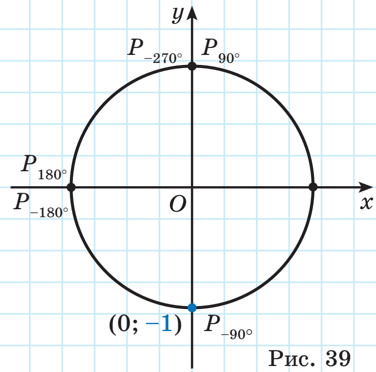


Рис. 39

Решение. Так как синусом угла α называется ордината точки P_α, полученной поворотом точки $P_0(1;\ 0)$ единичной окружности вокруг начала координат на угол α, то нужно найти точку единичной окружности, ордината которой равна -1. Эта точка лежит на оси ординат, и из данных углов ей соответствует угол $\alpha = -90°$ (рис. 39). Правильный ответ в).

3. Если $\cos\alpha = 0$, то угол α может быть равен:

а) $180°$ б) $360°$; в) $450°$;
г) $900°$; д) $-360°$.

Выберите правильный ответ.

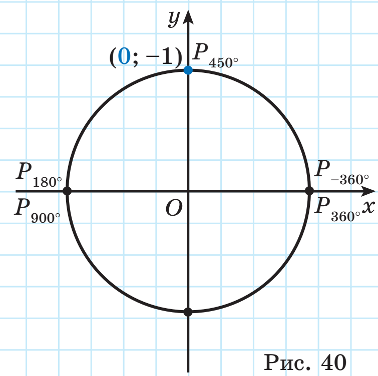


Рис. 40

Решение. Так как косинусом угла α называется абсцисса точки P_α, полученной поворотом точки $P_0(1;\ 0)$ единичной окружности вокруг начала координат на угол α, то нужно найти точку единичной окружности, абсцисса которой равна 0. Эта точка лежит на оси ординат, и из данных углов ей соответствует угол $\alpha = 450°$ (рис. 40). Правильный ответ в).

4. Найдите значение выражения:

а) $\cos 180° + \sin 90°$; б) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$.

Решение. а) Абсцисса точки $P_{180°}$, соответствующей углу $180°$, равна -1 (рис. 41), значит, $\cos 180° = -1$. Ордината точки $P_{90°}$, соответстветствующей углу $90°$, равна 1 (см. рис. 41), т. е. $\sin 90° = 1$. Значит, $\cos 180° + \sin 90° = -1 + 1 = 0$.

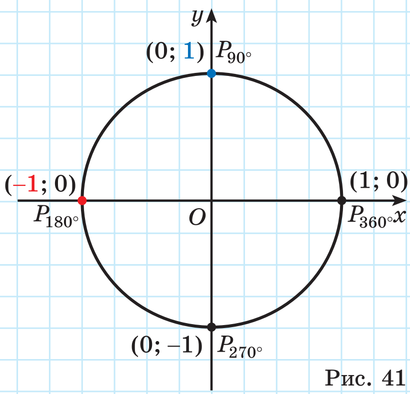


Рис. 41

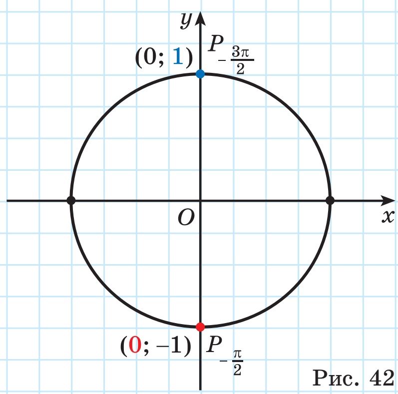


Рис. 42

б) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, а $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1$ (рис. 42), тогда $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = $
$= 0 - 1 = -1$.

5. Может ли $\cos\alpha$ быть равным:

а) $1{,}2$; б) $0{,}89$; в) $-\sqrt{5}$; г) $-\frac{3}{7}$?

Решение. Поскольку $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$, то $\cos\alpha$:

а) не может быть равным $1{,}2$, так как $1{,}2 \notin [-1;\ 1]$;

б) может быть равным $0{,}89$, так как $0{,}89 \in [-1;\ 1]$;

в) не может быть равным $-\sqrt{5}$, так как $-\sqrt{5} \notin [-1;\ 1]$;

г) может быть равным $-\frac{3}{7}$, так как $-\frac{3}{7} \in [-1;\ 1]$.

6. Определите знак выражения:

а) $\cos(-49°)$; б) $\cos(-297°)$; в) $\sin\frac{18\pi}{19}$; г) $\sin 6$.

Решение. а) $\cos(-49°) > 0$, так как $-49°$ — угол четвертой четверти, а косинус в четвертой четверти положителен;

б) $\cos(-297°) > 0$, так как $-297°$ — угол первой четверти, а косинус в первой четверти положителен;

в) $\sin\frac{18\pi}{19} > 0$, так как $\frac{18\pi}{19}$ — угол второй четверти, а синус во второй четверти положителен;

г) $\sin 6 < 0$, так как 6 радиан — угол четвертой четверти, а синус в четвертой четверти отрицателен.

7. Сравните: а) $\sin 122°$ и $\sin 170°$; б) $\cos\frac{\pi}{8}$ и $\cos\frac{10\pi}{9}$.

Решение. а) Отметим на единичной окружности точки, соответствующие углам 122° и 170°, и сравним ординаты этих точек. Ордината точки $P_{122°}$ больше ординаты точки $P_{170°}$ (рис. 43), значит, $\sin 122° > \sin 170°$.

б) Сравним абсциссы точек единичной окружности $P_{\frac{10\pi}{9}}$ и $P_{\frac{\pi}{8}}$. Так как абсцисса точки $P_{\frac{\pi}{8}}$ больше абсциссы точки $P_{\frac{10\pi}{9}}$ (рис. 44), то $\cos\frac{\pi}{8} > \cos\frac{10\pi}{9}$.

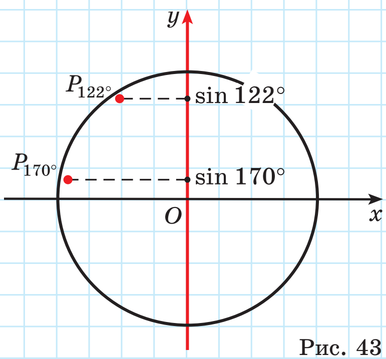


Рис. 43

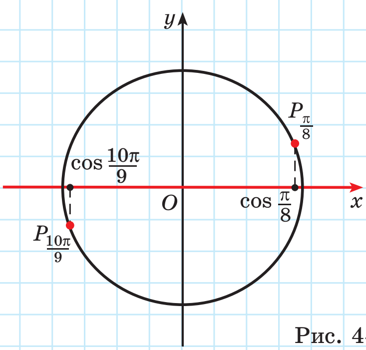


Рис. 44

8. С помощью единичной окружности найдите значение:

а) $\sin\frac{5\pi}{6}$; б) $\cos\frac{5\pi}{6}$.

Решение. а) Ордината точки $P_{\frac{5\pi}{6}}$ равна ординате точки $P_{\frac{\pi}{6}}$ (рис. 45), поэтому $\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

б) Абсцисса точки $P_{\frac{5\pi}{6}}$ противоположна абсциссе точки $P_{\frac{\pi}{6}}$ (см. рис. 45), поэтому $\cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

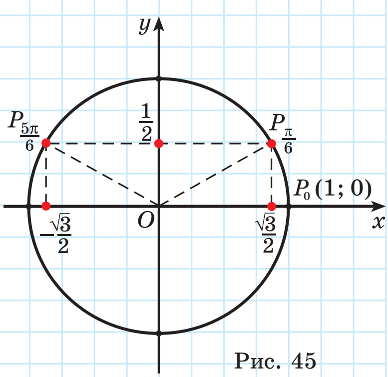


Рис. 45

1. Абсцисса точки P_α единичной окружности равна 0,3. Тогда верно равенство:
а) $\sin\alpha = 0{,}3$; б) $\sin\alpha = -0{,}3$; в) $\cos\alpha = 0{,}3$; г) $\cos\alpha = -0{,}3$.
Выберите правильный ответ.

2. Известно, что углам α и β соответствуют точки $P_\alpha\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ и $P_\beta\left(-\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$. Выберите все верные равенства:

а) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; б) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; в) $\cos\beta = -\frac{1}{4}$; г) $\cos\beta = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

1.43. Используя определение синуса и косинуса произвольного угла, найдите $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если известно, что точка P_α единичной окружности имеет координаты:

а) $P_\alpha\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$; б) $P_\alpha\left(-\frac{5}{13}; -\frac{12}{13}\right)$;

в) $P_\alpha\left(\frac{1}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$; г) $P_\alpha(-0{,}8; 0{,}6)$.

В какой координатной четверти расположена каждая точка?

1.44. С помощью единичной окружности (рис. 46) найдите приближенные значения синуса и косинуса угла: а) $40°$; б) $170°$; в) $250°$; г) $-70°$.

1.45. С помощью единичной окружности (рис. 47) найдите приближенное значение выражения:

а) $\sin\frac{2\pi}{5}$; б) $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$; в) $\sin\frac{13\pi}{10}$; г) $\cos 0{,}6\pi$.

1.46. Для некоторого угла α известно, что $\sin\alpha = 1$. Тогда угол α может быть равным: а) $90°$; б) $270°$; в) $-180°$; г) $450°$. Выберите правильный ответ.

Назовите еще два положительных и два отрицательных угла α, для которых верно равенство $\sin\alpha = 1$.

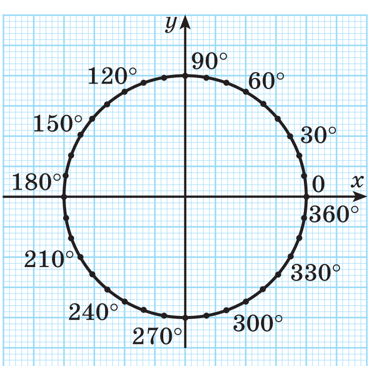


Рис. 46

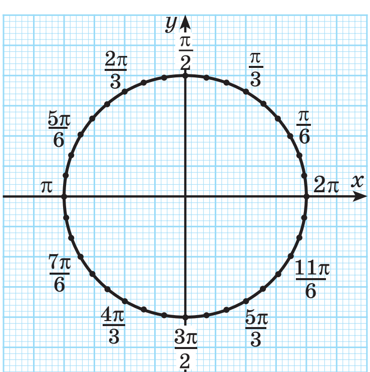


Рис. 47

1.47. Изобразите на единичной окружности точки, соответствующие всем таким углам α, для каждого из которых справедливо равенство:

а) $\sin\alpha = 0$; б) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; в) $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$;

г) $\cos\alpha = 1$; д) $\cos\alpha = \frac{2}{5}$; е) $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.

1.48. Найдите значение выражения:

а) $\cos 180° - \sin 270°$; б) $\sin 0° - \cos 0°$;
в) $2\cos(-180°) - \sin 360°$; г) $\sin(-180°) + 5\sin(-270°)$;
д) $-\sin 90° + 3\cos 0°$; е) $8\sin 180° - 6\cos(-270°)$.

1.49. Вычислите:

а) $\cos 360° \cdot \cos 30° \cdot \sin 45°$; б) $\sin(-90°) - \cos 60° + \sin 30°$;

в) $\cos(-90°) + \cos^2 30°$; г) $\sin 450° - \cos 60° + \sin^2 45°$.

1.50. Найдите значение выражения:

а) $\sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; б) $\cos\pi + \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$;

в) $\sin\frac{3\pi}{2} + 2\cos\pi$; г) $2\sin(-2\pi) + \cos(-\pi)$;

д) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\pi \cdot \cos 2\pi$; е) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 8\sin(-\pi) - \cos 2\pi$.

1.51. Вычислите:

а) $\sin\frac{3\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{6}$; б) $-\cos 2\pi \cdot \cos\frac{\pi}{4}$;

в) $\sin\pi + \sin^2\frac{\pi}{4}$; г) $3\cos(-5\pi) + \sin\frac{\pi}{6} \cdot \cos\frac{\pi}{3}$.

1.52. Верно ли, что:

а) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2}$; б) $\sin\frac{3\pi}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$;

в) $\cos(-\pi) = -\cos\pi$; г) $\cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2}$?

1.53. Какие значения может принимать синус произвольного угла? Из чисел $\frac{3}{7}$; -5; $1{,}2$; $-0{,}8$; $\sqrt{3}$; 0; $\frac{1}{\sqrt{5}}$ выберите числа, которым может быть равен $\sin\alpha$.

1.54. На единичной окружности отмечены точки P_α, P_β, P_γ и P_φ, соответствующие углам поворота α, β, γ и φ (рис. 48). Сравните с нулем значения синуса и косинуса этих углов.

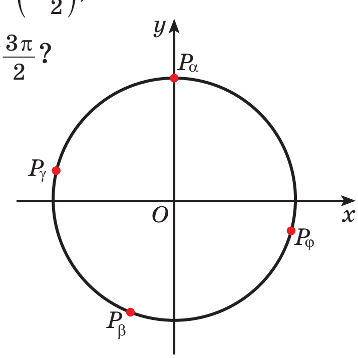


Рис. 48

1.55. Определите знак выражения:

а) $\cos 811°$; б) $\sin\left(-\frac{2\pi}{9}\right)$;

в) $\sin 4$; г) $\cos 6$.

1.56. Определите знак выражения:

а) $\cos 451° \cdot \sin(-92°)$; б) $\sin\left(-\frac{7\pi}{9}\right) \cdot \cos 1{,}1\pi$.

1.57. Углом какой четверти является угол α, если:

а) $\sin\alpha > 0$ и $\cos\alpha > 0$; б) $\sin\alpha < 0$ и $\cos\alpha > 0$?

1.58. Сравните:

а) $\sin 40°$ и $\sin 50°$; б) $\sin 100°$ и $\sin 110°$;
в) $\sin(-20°)$ и $\sin(-40°)$; г) $\sin 192°$ и $\sin 48°$.

1.59. Сравните:

а) $\cos\frac{\pi}{8}$ и $\cos\frac{5\pi}{8}$; б) $\cos 0{,}7\pi$ и $\cos 0{,}8\pi$;

в) $\cos\left(-\frac{3\pi}{10}\right)$ и $\cos\left(-\frac{7\pi}{10}\right)$; г) $\cos 1{,}1\pi$ и $\cos 0{,}1\pi$.

1.60. Сравните:

а) $\sin 3$ и $\sin\pi$; б) $\cos 4$ и $\cos 5$; в) $\sin 1$ и $\cos 1$.

1.61. Верно ли, что:

а) $\sin(-45°) = -\sin 45°$; б) $\cos(-60°) = -\cos 60°$;
в) $\sin 120° = \sin 60°$; г) $\cos 135° = -\cos 45°$?

1.62. С помощью единичной окружности найдите:

а) $\sin(-30°)$ и $\cos(-30°)$; б) $\sin 150°$ и $\cos 150°$;
в) $\sin 210°$ и $\cos 210°$; г) $\sin 390°$ и $\cos 390°$.

1.63. Из углов $60°$; $120°$; $300°$; $-60°$; $-210°$; $420°$; $-780°$ выберите те, косинусы которых равны $\frac{1}{2}$.

1.64. Постройте один из углов α, для которого:

а) $\sin\alpha = 0{,}6$; б) $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$.

1.65*. С помощью единичной окружности и значений синусов и косинусов углов $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{3}$ (см. табл. на с. 21) вычислите:

а) $\sin\frac{3\pi}{4}$; б) $\cos\frac{7\pi}{6}$;

в) $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$; г) $\cos\frac{19\pi}{6}$.

1.66. Используя определение синуса и косинуса произвольного угла, найдите $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если известно, что точка P_α единичной окружности имеет координаты: а) $P_\alpha(-0{,}6; 0{,}8)$; б) $P_\alpha\left(-\frac{8}{17}; -\frac{15}{17}\right)$.

В какой координатной четверти расположена каждая точка?

1.67. С помощью единичной окружности (см. рис. 46) найдите приближенные значения синуса и косинуса угла:

а) $70°$; б) $220°$; в) $-80°$.

1.68. С помощью единичной окружности (см. рис. 47) найдите приближенное значение выражения:

а) $\cos\frac{\pi}{5}$; б) $\sin\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$; в) $\cos\frac{11\pi}{9}$.

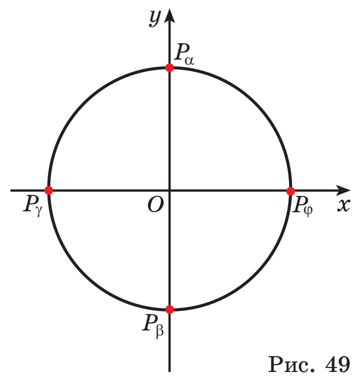


Рис. 49

1.69. На единичной окружности отмечены точки P_α, P_β, P_γ и P_φ, соответствующие углам поворота α, β, γ и φ (рис. 49). Найдите:

а) $\sin\alpha$; б) $\cos\varphi$; в) $\sin\gamma$;
г) $\cos\gamma$; д) $\sin\beta$; е) $\cos\beta$.

1.70. Назовите два положительных и два отрицательных угла α, для которых верно равенство $\sin\alpha = 0$.

1.71. Изобразите на единичной окружности точки, соответствующие всем углам α, для каждого из которых справедливо равенство:

а) $\cos\alpha = 0$; б) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$; в) $\sin\alpha = -1$; г) $\sin\alpha = -\frac{1}{4}$.

1.72. Найдите значение выражения:

а) $\sin 90° + \cos 180°$; б) $\cos(-180°) - 2\sin 270°$;
в) $\sin 180° - 5\cos(-270°)$; г) $\cos 180° + \cos 60°$;
д) $\cos 0° \cdot \sin 45° \cdot \cos 45°$; е) $\sin(-90°) + \sin^2 60°$.

1.73. Вычислите:

а) $\sin\frac{\pi}{2} + 2\cos(-\pi)$; б) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos\frac{3\pi}{2}$;
в) $\cos(-2\pi) + 2\cos\frac{\pi}{3}$; г) $\cos\pi \cdot \cos\frac{\pi}{6}$;
д) $\sin\frac{3\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{6} \cdot \sin\frac{\pi}{3}$; е) $\sin\pi - \cos^2\frac{\pi}{4}$.

1.74. Какие значения может принимать косинус произвольного угла? Из чисел $\frac{2}{5}$; -3; $2{,}4$; $-0{,}3$; $\sqrt{2}$; 1; $\frac{1}{\sqrt{7}}$ выберите числа, которым может быть равен $\cos\alpha$.

1.75. На единичной окружности отмечены точки P_α, P_β, P_γ и P_φ, соответствующие углам α, β, γ и φ (рис. 50). Сравните с нулем значения синуса и косинуса этих углов.

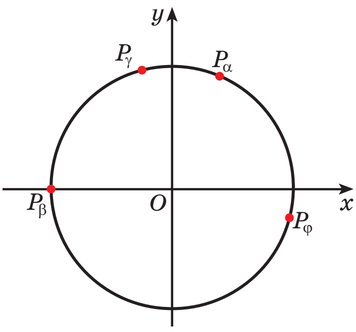


Рис. 50

1.76. Определите знак выражения:

а) $\cos 1125°$; б) $\sin\left(-\frac{12\pi}{17}\right)$;

в) $\sin 3$; г) $\cos\frac{15\pi}{8}$.

1.77. Сравните:

а) $\sin 130°$ и $\sin 140°$; б) $\cos 40°$ и $\cos 50°$;

в) $\cos(-80°)$ и $\cos(-81°)$; г) $\sin(-22°)$ и $\sin(-43°)$.

1.78. Углом какой четверти является угол α, если:

а) $\sin\alpha > 0$ и $\cos\alpha < 0$; б) $\sin\alpha < 0$ и $\cos\alpha < 0$?

1.79. С помощью единичной окружности найдите:

а) $\sin(-45°)$ и $\cos(-45°)$; б) $\sin 135°$ и $\cos 135°$;

в) $\sin 225°$ и $\cos 225°$; г) $\sin 405°$ и $\cos 405°$.

1.80. Из углов $30°$; $120°$; $-60°$; $-210°$; $-330°$; $750°$ выберите те, синусы которых равны $\frac{1}{2}$.

1.81. Постройте один из углов α, для которого: а) $\cos\alpha = \frac{3}{4}$; б) $\sin\alpha = -0{,}2$.

1.82*. Вычислите:

а) $\cos\frac{2\pi}{3}$; б) $\sin\frac{7\pi}{6}$; в) $\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; г) $\cos\frac{21\pi}{4}$.

1.83. Для функции $g(x) = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{(x-1)^2}$ найдите, если это возможно:

а) $g(0)$; б) $g(-1)$; в) $g(-2)$; г) $g(1)$.

1.84. Выберите функцию, график которой получен из графика функции $y = -7x^2$ сдвигом его на 4 единицы вниз вдоль оси ординат:

а) $y = -7x^2 + 4$; б) $y = -7(x + 4)^2$;

в) $y = -7x^2 - 4$; г) $y = -(7x + 4)^2$.

§ 3. Определение тангенса и котангенса произвольного угла

1.85. Из данных выражений выберите выражения, области определения которых совпадают:

а) $\dfrac{4}{x(x+2)}$; б) $x^3 - 4x^2 + 2$; в) $\dfrac{8}{x^2} - \dfrac{3x}{7x+14}$;

г) $\dfrac{12x-1}{x^2+1}$; д) $\dfrac{15}{x^2-4}$.

1.86. Найдите область определения функции $y = \sqrt{(x-1)(x+3)}$.

1.87. Из данных функций выберите функции, достигающие наименьшего значения при $x = 1$:

а) $f(x) = 2(x-1)^2$; б) $f(x) = -3(x-1)^2$;
в) $f(x) = (x-1)^2 - 5$; г) $f(x) = (x-1)^2 + 5$.

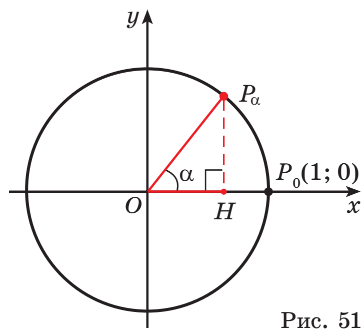


Рис. 51

Построим точку $P_\alpha(x_\alpha; y_\alpha)$ единичной окружности поворотом точки P_0 вокруг начала координат на угол α. Рассмотрим прямоугольный треугольник $P_\alpha OH$, в котором гипотенуза $P_\alpha O$ равна 1 (радиусу единичной окружности), а его катеты равны: $OH = \cos\alpha$, $HP_\alpha = \sin\alpha$ (рис. 51).

По определению тангенса острого угла получим: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{HP_\alpha}{OH} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Определение. Тангенсом угла α называется отношение синуса угла α к косинусу угла α: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Например, $\operatorname{tg}0 = \dfrac{\sin 0}{\cos 0} = \dfrac{0}{1} = 0$, $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \dfrac{1}{2} : \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Используя определение тангенса угла и значения синуса и косинуса этого угла, найдем также значения тангенсов углов $\dfrac{\pi}{4}$ и $\dfrac{\pi}{3}$:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = 1,\quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}.$$

Поскольку $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$, то $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}$ не существует.

Через точку P_0 проведем прямую, перпендикулярную оси абсцисс, и продолжим луч OP_α до пересечения с этой прямой в точке A (рис. 52). Получим треугольник OAP_0, подобный треугольнику $OP_\alpha H$.

Из подобия треугольников OAP_0 и $OP_\alpha H$ запишем равенство отношений их сторон: $\frac{AP_0}{OP_0} = \frac{P_\alpha H}{OH}$, или $\frac{AP_0}{1} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Поскольку $AP_0 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$, то ордината точки A равна тангенсу угла α.

Прямая, перпендикулярная оси абсцисс, проходящая через точку P_0, называется **осью тангенсов.**

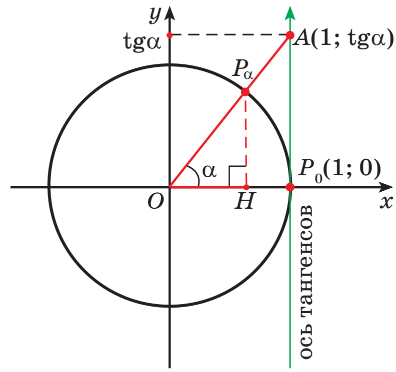


Рис. 52

Для того чтобы найти тангенс произвольного угла α с помощью оси тангенсов, нужно:

<table>
<tr>
<td>

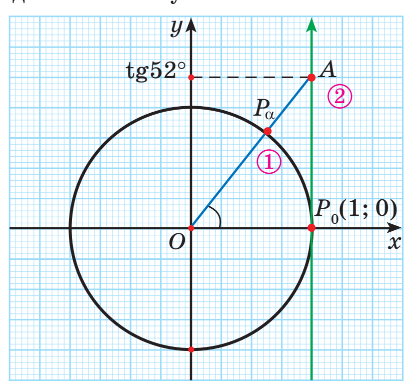
① Построить точку P_α на единичной окружности.

② Продолжить прямую OP_α до пересечения с осью тангенсов.

③ Найти ординату точки пересечения прямой OP_α с осью тангенсов.

</td>
<td>

Найдите тангенс угла $\alpha = 52°$.



③ $\operatorname{tg} 52° \approx 1{,}3$.

</td>
</tr>
</table>

Значения тангенса произвольного угла с помощью оси тангенсов можно указать только приближенно. Для нахождения значения тангенса произвольного угла используют четырехзначные таблицы значений тангенса (синуса, косинуса)* или калькулятор. Методы высшей математики позволяют вычислять значения тангенса (синуса, косинуса) с любой заданной степенью точности.

* Брадис В. М. Четырехзначные математические таблицы. — 13-е изд., стер. — М. : Дрофа, 2010. — 96 с.

Пример 1. Определите с помощью оси тангенсов:

а) $\operatorname{tg} 40°$; б) $\operatorname{tg} 160°$; в) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; г) $\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}$.

Решение.

а) $\operatorname{tg} 40° \approx 0{,}8$ (рис. 53); б) $\operatorname{tg} 160° \approx -0{,}4$ (см. рис. 53);

в) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \approx -0{,}6$ (рис. 54); г) $\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3} \approx 1{,}7$ (см. рис. 54).

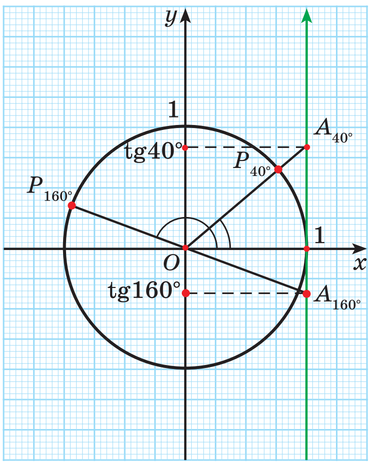


Рис. 53

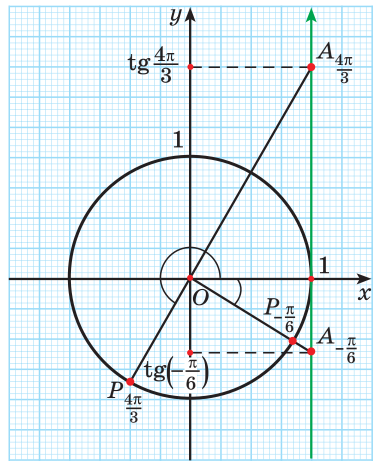


Рис. 54

Пример 2. С помощью оси тангенсов сравните значения выражений $\operatorname{tg} 30°$ и $\operatorname{tg} 160°$.

Решение. Отметим на оси тангенсов точки, соответствующие углам 30° и 160° (рис. 55), и сравним ординаты этих точек. Ордината точки $A_{30°}$ больше ординаты точки $A_{160°}$, значит, $\operatorname{tg} 30° > \operatorname{tg} 160°$.

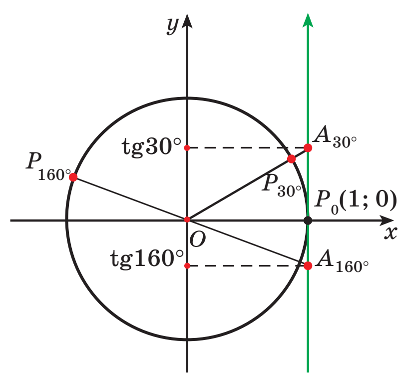


Рис. 55

Для углов $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$; ... тангенс не существует, так как косинусы этих углов равны нулю. Например, $\operatorname{tg} 630°$, $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ не существуют.

Построим точку $P_\alpha(x_\alpha; y_\alpha)$ единичной окружности поворотом точки P_0 вокруг начала координат на угол α. Рассмотрим прямоугольный треугольник $P_\alpha OH$, в котором гипотенуза $P_\alpha O$ равна 1 (радиусу единичной окружности), а его катеты равны: $OH = \cos\alpha$, $HP_\alpha = \sin\alpha$ (рис. 56).

По определению котангенса острого угла получим: $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{OH}{HP_\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Определение. Котангенсом угла α называется отношение косинуса угла α к синусу угла α: $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

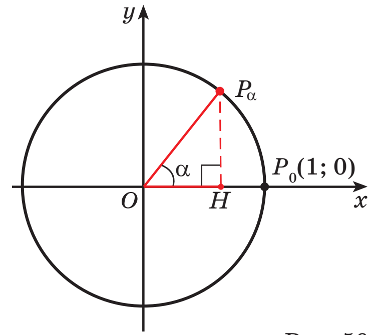


Рис. 56

Например, $\operatorname{ctg}90° = \dfrac{\cos 90°}{\sin 90°} = \dfrac{0}{1} = 0$, $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} : \dfrac{1}{2} = \sqrt{3}$.

Поскольку $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, а $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, то $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

Воспользуемся полученным равенством и найдем значения котангенсов углов $\dfrac{\pi}{4}$ и $\dfrac{\pi}{3}$: $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{1} = 1$, $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{3} = = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Поскольку $\sin 0 = 0$, то $\operatorname{ctg} 0$ не существует.

Найденные значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса углов 0°; 30°; 45°; 60° и 90° занесем в таблицу.

Градусы	0°	30°	45°	60°	90°
Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не существует
$\operatorname{ctg}\alpha$	не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Пример 3. Найдите значение выражения
$\operatorname{ctg} 45° + \operatorname{ctg} 30° - \operatorname{tg} 60° + 2\sin 30°$.

Решение. $\operatorname{ctg} 45° + \operatorname{ctg} 30° - \operatorname{tg} 60° + 2\sin 30° = 1 + \sqrt{3} - \sqrt{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2.$

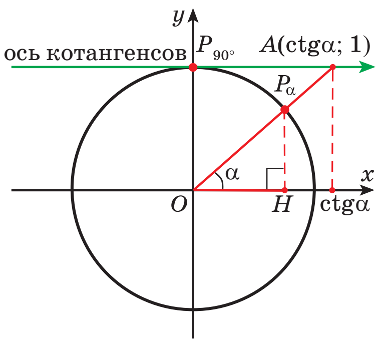


Рис. 57

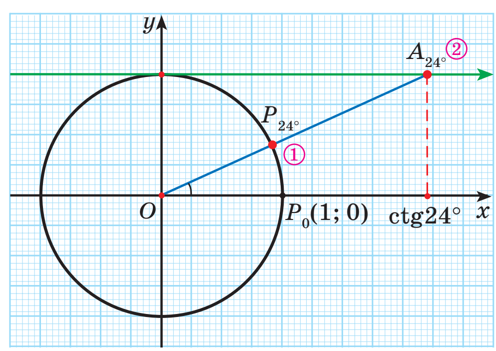
Через точку $P_{90°}(0; 1)$ проведем прямую, перпендикулярную оси ординат, и продолжим луч OP_α до пересечения с этой прямой в точке A (рис. 57).

Получим треугольник $OAP_{90°}$, подобный треугольнику $P_\alpha OH$.

Из подобия треугольников $OAP_{90°}$ и $P_\alpha OH$ запишем равенство отношений их сторон: $\frac{AP_{90°}}{OP_{90°}} = \frac{OH}{P_\alpha H}$, или $\frac{AP_{90°}}{1} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Поскольку $AP_{90°} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$, то абсцисса точки A равна котангенсу угла α.

Прямая, перпендикулярная оси ординат, проходящая через точку $P_{90°}$, называется **осью котангенсов**.

Для того чтобы найти котангенс произвольного угла α с помощью оси котангенсов, нужно:

① Построить точку P_α на единичной окружности. ② Продолжить прямую OP_α до пересечения с осью котангенсов. ③ Найти абсциссу точки пересечения прямой OP_α с осью котангенсов.	Найдите котангенс угла α = 24°.  ③ $\operatorname{ctg} 24° \approx 2{,}2$.

Значения котангенса произвольного угла с помощью оси котангенсов можно указать только приближенно.

Пример 4. Определите с помощью оси котангенсов:

а) $\operatorname{ctg} 40°$; б) $\operatorname{ctg} 140°$; в) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; г) $\operatorname{ctg} \frac{4\pi}{3}$.

Решение.

а) $\mathrm{ctg}\,40° \approx 1{,}2$ (рис. 58);

б) $\mathrm{ctg}\,140° \approx -1{,}2$ (см. рис. 58);

в) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \approx 1{,}7$ (рис. 59);

г) $\mathrm{ctg}\,\frac{4\pi}{3} \approx 0{,}6$ (см. рис. 59).

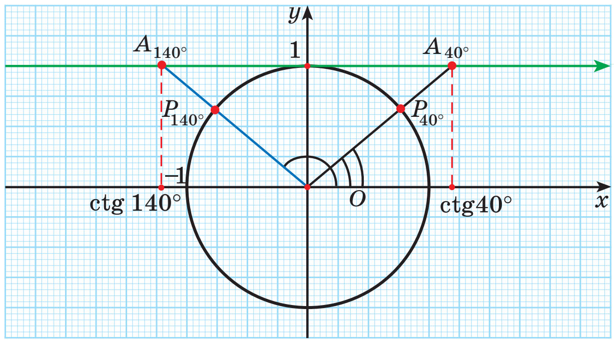


Рис. 58

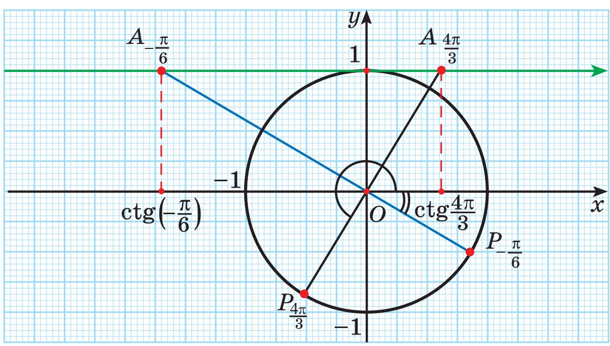


Рис. 59

Пример 5. С помощью оси котангенсов сравните значения выражений $\mathrm{ctg}\,\frac{2\pi}{5}$ и $\mathrm{ctg}\,\frac{2\pi}{15}$.

Решение. Отметим на оси котангенсов точки, соответствующие углам $\frac{2\pi}{5}$ и $\frac{2\pi}{15}$ (рис. 60), и сравним абсциссы этих точек. Абсцисса точки $A_{\frac{2\pi}{15}}$ больше абсциссы точки $A_{\frac{2\pi}{5}}$, значит, $\mathrm{ctg}\,\frac{2\pi}{15} > \mathrm{ctg}\,\frac{2\pi}{5}$.

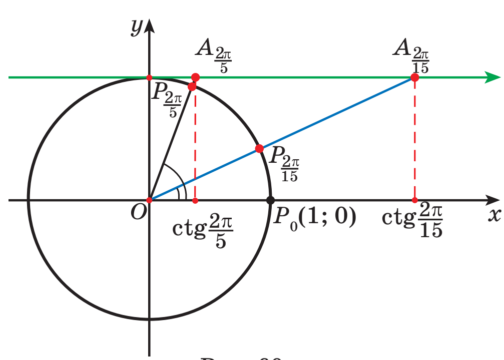


Рис. 60

Для углов 0, π, 2π и т. д. котангенс не существует, так как синусы этих углов равны нулю. Например, $\operatorname{ctg} 900°$, $\operatorname{ctg}(-3\pi)$ не существуют.

Пример 6. С помощью оси:

а) тангенсов найдите один из углов, тангенс которого равен $\frac{3}{4}$;

б) котангенсов найдите один из углов, котангенс которого равен $-\frac{5}{4}$.

Решение. а) ① Отметим на оси тангенсов точку A_α, ордината которой равна $\frac{3}{4}$ (рис. 61).

② Соединим эту точку с началом координат.
③ Найдем соответствующую точку P_α на единичной окружности.
④ Отметим один из углов, соответствующий этой точке (см. рис. 61).

б) ① Отметим на оси котангенсов точку A_α, абсцисса которой равна $-\frac{5}{4}$ (рис. 62).
② Соединим эту точку с началом координат.
③ Найдем соответствующую точку P_α на единичной окружности.
④ Отметим один из углов, соответствующий этой точке (см. рис. 62).

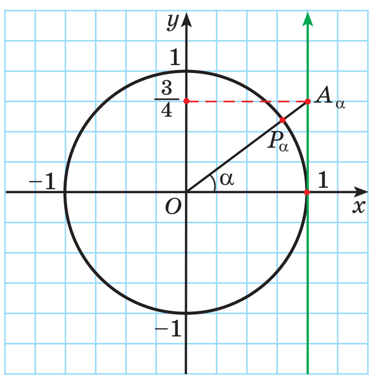


Рис. 61

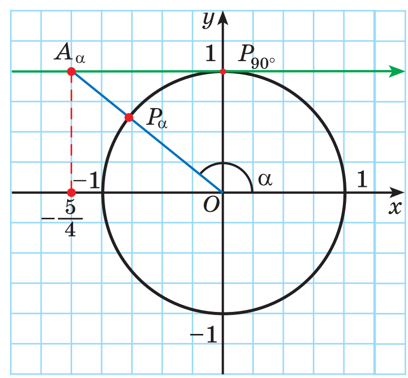


Рис. 62

Примеры основных заданий и их решения

1. Точка P_α единичной окружности имеет координаты $P_\alpha\left(-\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$. Используя определение тангенса и котангенса произвольного угла, найдите $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

Решение. Так как точка P_α единичной окружности имеет координаты $P_\alpha\left(-\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$, то $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, а $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

По определению тангенса: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5} : \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{4}$.

По определению котангенса: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, значит, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{5} : \frac{3}{5} = -\frac{4}{3}$.

2. Найдите значение выражения $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.

Решение. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} =$
$= \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$.

3. Найдите, если это возможно, значение выражения:

а) $\operatorname{tg}\pi$; б) $\operatorname{ctg}2\pi$; в) $\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$; г) $\operatorname{ctg}(-8{,}5\pi)$.

Решение. а) $\operatorname{tg}\pi = \frac{\sin\pi}{\cos\pi} = \frac{0}{-1} = 0$;

б) $\operatorname{ctg}2\pi$ не существует, так как $\sin 2\pi = 0$;

в) $\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$ не существует, так как $\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = 0$;

г) $\operatorname{ctg}(-8{,}5\pi) = \frac{\cos(-8{,}5\pi)}{\sin(-8{,}5\pi)} = \frac{0}{-1} = 0$.

4. Если $\operatorname{tg}\alpha = 0$, то α может принимать значения:

а) 180°; б) 90°; в) –90°; г) –180°; д) –270°.

Выберите правильные ответы.

Решение. Так как тангенсом угла α называется отношение синуса угла α к косинусу угла α, то нужно найти те углы α, синус которых равен нулю. Среди предложенных углов это углы –180° и 180°.

Можно также использовать ось тангенсов: найти точку на оси тангенсов, у которой ордината равна нулю (рис. 63), и определить соответствующие углы.

Правильные ответы а) и г).

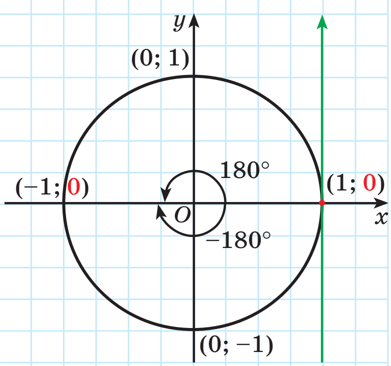


Рис. 63

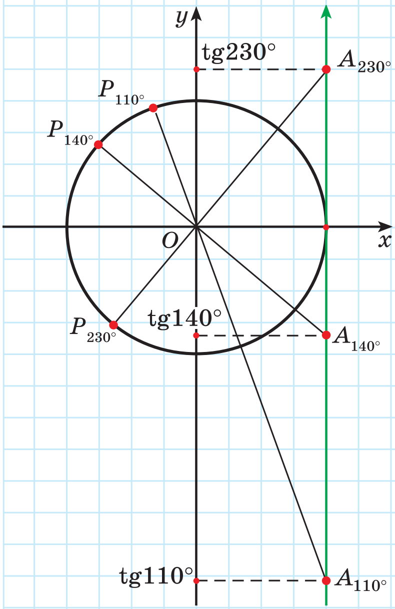


Рис. 64

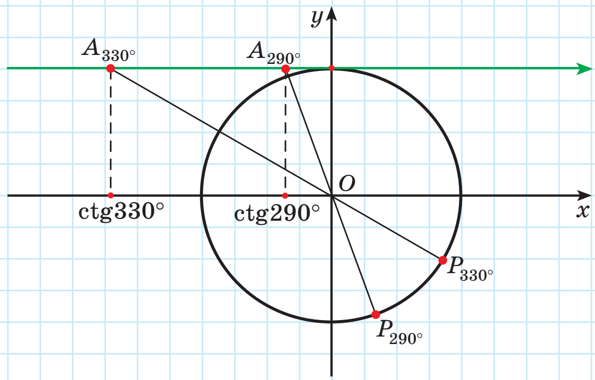


Рис. 65

5. Расположите в порядке возрастания: $\operatorname{tg} 110°$; $\operatorname{tg} 140°$ и $\operatorname{tg} 230°$.

Решение. Отметим на оси тангенсов точки, соответствующие углам 110°, 140° и 230° (рис. 64), и сравним ординаты этих точек. Поскольку ордината точки $A_{110°}$ меньше ординаты точки $A_{140°}$, а ордината точки $A_{140°}$ меньше ординаты точки $A_{230°}$, то $\operatorname{tg} 110° < \operatorname{tg} 140° < \operatorname{tg} 230°$.

6. Верно ли, что $\operatorname{ctg} 290° > \operatorname{ctg} 330°$?

Решение. Отметим на оси котангенсов точки, соответствующие углам 290° и 330° (рис. 65), и сравним абсциссы этих точек. Поскольку абсцисса точки $A_{290°}$ больше абсциссы точки $A_{330°}$, то неравенство $\operatorname{ctg} 290° > \operatorname{ctg} 330°$ верное.

7. Определите знак выражения:

а) $\operatorname{tg} 118°$; б) $\operatorname{ctg}(-149°)$.

Решение. а) Первый способ. По определению тангенса: $\operatorname{tg} 118° = \frac{\sin 118°}{\cos 118°}$. Так как угол 118° находится во второй четверти, то $\sin 118° > 0$, а $\cos 118° < 0$, значит, $\operatorname{tg} 118° < 0$.

Второй способ. Отметим на оси тангенсов точку, соответствующую углу 118° (рис. 66). Ордината точки $A_{118°}$ равна $\operatorname{tg} 118°$. Поскольку точка $A_{118°}$ имеет отрицательную ординату, то $\operatorname{tg} 118° < 0$.

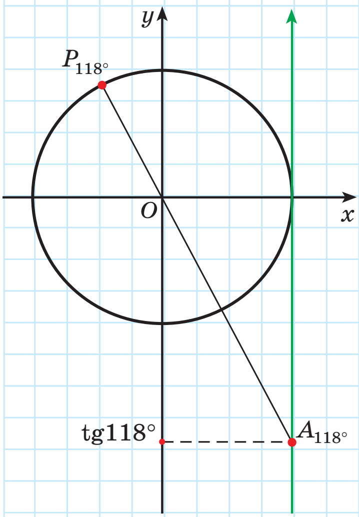


Рис. 66

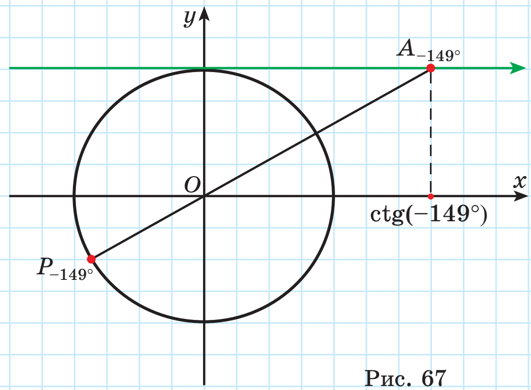


Рис. 67

б) Первый способ. По определению котангенса: $\operatorname{ctg}(-149°) = \dfrac{\cos(-149°)}{\sin(-149°)}$. Так как угол $-149°$ находится в третьей четверти, то $\sin(-149°) < 0$ и $\cos(-149°) < 0$, значит, $\operatorname{ctg}(-149°) > 0$.

Второй способ. Отметим на оси котангенсов точку, соответствующую углу $-149°$ (рис. 67). Абсцисса точки $A_{-149°}$ равна $\operatorname{ctg}(-149°)$. Поскольку точка $A_{-149°}$ имеет положительную абсциссу, то $\operatorname{ctg}(-149°) > 0$.

8. Определите знак произведения $\operatorname{ctg} 3 \cdot \operatorname{tg} 4$.

Решение. Так как угол 3 радиана находится во второй четверти, а угол 4 радиана — в третьей, то $\operatorname{ctg} 3 < 0$, а $\operatorname{tg} 4 > 0$, значит, $\operatorname{ctg} 3 \cdot \operatorname{tg} 4 < 0$.

?

1. На единичной окружности задана точка $P_{\alpha}(0; -1)$. Тогда для угла α верными являются равенства:

а) $\sin\alpha = 0$; б) $\cos\alpha = 0$; в) $\operatorname{tg}\alpha = 0$; г) $\operatorname{ctg}\alpha = 0$; д) $\operatorname{ctg}\alpha = -1$.

Выберите правильный ответ.

2. На единичной окружности задана точка $P_{\alpha}(0,6; 0,8)$. Тогда для угла α верными являются равенства:

а) $\sin\alpha = 0,6$; б) $\cos\alpha = 0,6$; в) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{4}{3}$; г) $\operatorname{ctg}\alpha = 0,6$; д) $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{4}{3}$.

Выберите правильный ответ.

1.88. Используя определение тангенса и котангенса произвольного угла, найдите $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если известно, что точка P_α единичной окружности имеет координаты:

а) $P_\alpha\left(\frac{5}{13};\ -\frac{12}{13}\right)$; б) $P_\alpha\left(\frac{1}{7};\ \frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$;

в) $P_\alpha(-0{,}8;\ -0{,}6)$; г) $P_\alpha\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$.

1.89. С помощью оси тангенсов (рис. 68) найдите приближенные значения тангенса угла:

а) $25°$; б) $160°$; в) $230°$; г) $-55°$.

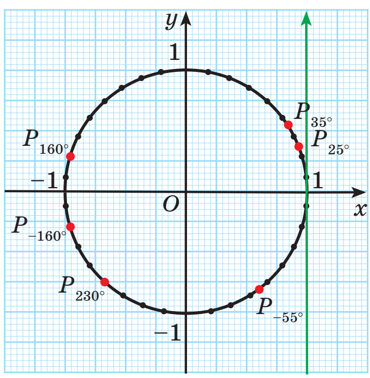


Рис. 68

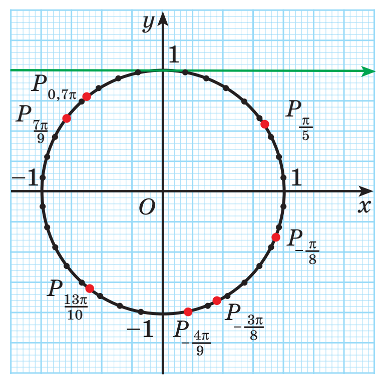


Рис. 69

1.90. С помощью оси котангенсов (рис. 69) найдите приближенное значение выражения:

а) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}$; б) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{4\pi}{9}\right)$; в) $\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{10}$; г) $\operatorname{ctg}0{,}7\pi$.

1.91. Найдите значение выражения:

а) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$; б) $\sin^2\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{3}$;

в) $6\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}+4\cos\frac{\pi}{3}-9\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$.

1.92. С помощью единичной окружности найдите значение выражения (если это возможно):

а) $\operatorname{ctg}90°$; б) $\operatorname{tg}3\pi$; в) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; г) $\operatorname{ctg}(-540°)$.

1.93. Для каких углов α не существует $\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}\alpha$?

1.94. Найдите значение выражения:

а) $\operatorname{tg}\pi \cdot \cos\frac{\pi}{2}$; б) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$; в) $\cos\frac{\pi}{6} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$;

г) $2\cos\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$; д) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 5\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$; е) $\cos(-3\pi) + 7\operatorname{tg}5\pi$.

1.95. Найдите несколько значений α, при которых:

а) $\operatorname{ctg}\alpha = 1$; б) $\operatorname{tg}\alpha = 0$.

1.96. Сравните:

а) $\operatorname{tg}47°$ и $\operatorname{tg}53°$; б) $\operatorname{ctg}32°$ и $\operatorname{ctg}58°$;

в) $\operatorname{tg}189°$ и $\operatorname{tg}242°$;

г) $\operatorname{ctg}(-13°)$ и $\operatorname{ctg}(-25°)$.

1.97. Расположите в порядке убывания: $\operatorname{ctg}46°$; $\operatorname{ctg}118°$ и $\operatorname{ctg}79°$.

1.98. На единичной окружности отмечены точки P_α, P_β, P_γ и P_φ, соответствующие углам поворота α, β, γ и φ (рис. 70). Сравните с нулем значения тангенса и котангенса этих углов.

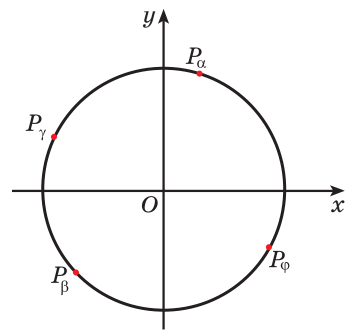


Рис. 70

1.99. Определите знак произведения:

а) $\operatorname{tg}\frac{10\pi}{11} \cdot \operatorname{tg}\frac{14\pi}{13}$; б) $\operatorname{ctg}(-401°) \cdot \operatorname{ctg}(-739°)$; в) $\operatorname{ctg}4 \cdot \operatorname{tg}3$.

1.100. Углом какой четверти является угол α, если:

а) $\operatorname{tg}\alpha > 0$ и $\cos\alpha < 0$; б) $\sin\alpha < 0$ и $\operatorname{ctg}\alpha < 0$?

1.101. С помощью оси тангенсов найдите один из углов, тангенс которого равен: а) $\frac{5}{3}$; б) $-\frac{2}{5}$.

1.102. С помощью оси котангенсов найдите один из углов, котангенс которого равен: а) 2; б) $-\frac{2}{3}$.

1.103. Верно ли, что:

а) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$; б) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$;

в) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$; г) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2}$?

1.104. Используя определение тангенса и котангенса произвольного угла, найдите $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если известно, что точка P_α единичной окружности имеет координаты:

а) $P_\alpha\left(\frac{15}{17}; -\frac{8}{17}\right)$; б) $P_\alpha(0{,}6; -0{,}8)$.

1.105. С помощью оси тангенсов на рисунке 68 (оси котангенсов на рисунке 69) найдите приближенное значение выражения:

а) $\operatorname{tg} 35°$; б) $\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{9}$; в) $\operatorname{tg}(-160°)$; г) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$.

1.106. Найдите значение выражения:

а) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$; б) $\cos^2 \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{3}$.

1.107. С помощью единичной окружности найдите значение выражения (если это возможно):

а) $\operatorname{ctg} 180°$; б) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$; в) $\operatorname{tg}(-3\pi)$; г) $\operatorname{ctg}(-450°)$.

1.108. Найдите значение выражения:

а) $\operatorname{tg} \pi + \cos \pi$; б) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} + 2\cos \frac{\pi}{3}$;

в) $\sin \frac{\pi}{6} + \operatorname{tg} 2\pi$; г) $\cos \frac{\pi}{4} + \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{2}$.

1.109. Найдите несколько значений α, при которых:

а) $\operatorname{ctg} \alpha = 0$; б) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

1.110. Сравните:

а) $\operatorname{ctg} 55°$ и $\operatorname{ctg} 63°$; б) $\operatorname{tg} 42°$ и $\operatorname{tg} 68°$;
в) $\operatorname{ctg} 200°$ и $\operatorname{ctg} 225°$; г) $\operatorname{tg}(-35°)$ и $\operatorname{tg}(-55°)$.

1.111. На единичной окружности отмечены точки P_α, P_β, P_γ и P_φ, соответствующие углам α, β, γ и ϕ (рис. 71). Сравните с нулем значения тангенса и котангенса этих углов.

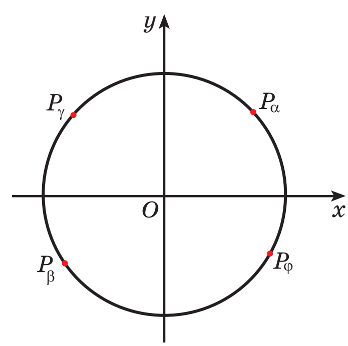


Рис. 71

1.112. Определите знак произведения:

а) $\operatorname{ctg} \frac{8\pi}{9} \cdot \operatorname{ctg} \frac{11\pi}{10}$;
б) $\operatorname{tg}(-511°) \cdot \operatorname{tg}(-183°)$;
в) $\operatorname{ctg} 2 \cdot \operatorname{tg} 5$.

1.113. Углом какой четверти является угол α, если:

а) $\operatorname{ctg} \alpha > 0$ и $\cos \alpha < 0$;
б) $\sin \alpha > 0$ и $\operatorname{tg} \alpha < 0$?

1.114. С помощью оси тангенсов найдите один из углов, тангенс которого равен $\frac{4}{5}$.

1.115. С помощью оси котангенсов найдите один из углов, котангенс которого равен $-1{,}5$.

1.116. Верно ли, что:

а) центром окружности, заданной уравнением $(x - 4)^2 + (y + 8)^2 = 16$, является точка $(4; -8)$;

б) центром окружности, заданной уравнением $x^2 + (y - 9)^2 = 36$, является точка $(0; -9)$;

в) центром окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 8$, является точка $(0; 0)$;

г) радиус окружности, заданной уравнением $(x + 5)^2 + y^2 = 16$, равен 4?

1.117. Найдите все значения переменной t, при которых:

а) $t^2 = 9$; б) $16t^2 = 1$; в) $t^2 = 5$; г) $t^2 = 0{,}75$.

1.118. Сократите дробь:

а) $\dfrac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2 - 2ac}$; б) $\dfrac{5x - 7x^2 - 5y + 7xy}{x^2 - xy}$.

§ 4. Соотношения между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одного и того же угла (тригонометрические тождества)

1.119. Найдите все значения переменной m, при которых верно равенство:

а) $m^2 = 1$; б) $m^2 = \dfrac{49}{64}$; в) $m^2 = 2$; г) $m^2 = \dfrac{1}{3}$.

1.120. Определите координаты центра и радиус окружности, заданной уравнением:

а) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$; б) $x^2 + (y + 2)^2 = 9$;

в) $(x + 5)^2 + y^2 = 7$; г) $x^2 + y^2 = 1$.

1.121. Сократите дробь $\dfrac{4a^2 - 4ab + b^2}{b^2 - 4a^2}$.

Установим соотношения между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одного и того же угла.

Так как центром единичной окружности является начало координат, а ее радиус равен 1 (рис. 72), то уравнение единичной окружности имеет вид $x^2 + y^2 = 1$.

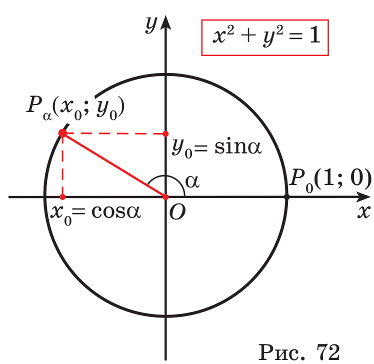


Рис. 72