1.116. Верно ли, что:

а) центром окружности, заданной уравнением $(x-4)^2+(y+8)^2=16$, является точка $(4; -8)$;

б) центром окружности, заданной уравнением $x^2+(y-9)^2=36$, является точка $(0; -9)$;

в) центром окружности, заданной уравнением $x^2+y^2=8$, является точка $(0; 0)$;

г) радиус окружности, заданной уравнением $(x+5)^2+y^2=16$, равен 4?

1.117. Найдите все значения переменной t, при которых:

а) $t^2=9$; б) $16t^2=1$; в) $t^2=5$; г) $t^2=0{,}75$.

1.118. Сократите дробь:

а) $\dfrac{c^2-a^2}{c^2+a^2-2ac}$; б) $\dfrac{5x-7x^2-5y+7xy}{x^2-xy}$.

§ 4. Соотношения между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одного и того же угла (тригонометрические тождества)

1.119. Найдите все значения переменной m, при которых верно равенство:

а) $m^2=1$; б) $m^2=\dfrac{49}{64}$; в) $m^2=2$; г) $m^2=\dfrac{1}{3}$.

1.120. Определите координаты центра и радиус окружности, заданной уравнением:

а) $(x-1)^2+(y-3)^2=16$; б) $x^2+(y+2)^2=9$;
в) $(x+5)^2+y^2=7$; г) $x^2+y^2=1$.

1.121. Сократите дробь $\dfrac{4a^2-4ab+b^2}{b^2-4a^2}$.

Установим соотношения между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одного и того же угла.

Так как центром единичной окружности является начало координат, а ее радиус равен 1 (рис. 72), то уравнение единичной окружности имеет вид $x^2+y^2=1$.

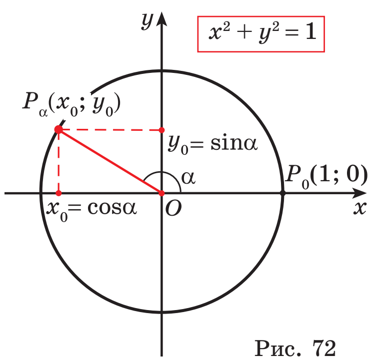

Рис. 72

Координаты любой точки $P_\alpha(x_0;\ y_0)$ единичной окружности удовлетворяют уравнению этой окружности. По определению синуса и косинуса угла α точка $P_\alpha(x_0;\ y_0)$ имеет координаты $x_0 = \cos\alpha$ и $y_0 = \sin\alpha$.

Подставим координаты точки $P_\alpha(x_0;\ y_0)$ в уравнение единичной окружности и получим формулу $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Полученную формулу называют **основным тригонометрическим тождеством**, а также тригонометрической единицей.

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

С помощью основного тригонометрического тождества, зная значения синуса (косинуса) угла α, можно найти косинус (синус) этого же угла.

Например, найдем $\cos\alpha$, если известно, что $\sin\alpha = \frac{1}{3}$.

Для этого из формулы $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ выразим $\cos^2\alpha$ и получим $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$. Так как $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, то найдем $\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

Тогда $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ или $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Знак $\cos\alpha$ зависит от того, в какой четверти находится угол α.

Пример 1. Известно, что $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. Найдите $\sin\alpha$, если $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$.

Решение. Из основного тригонометрического тождества $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ выразим $\sin^2\alpha$ и получим $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$.

По условию $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, тогда $\sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$. Значит, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ или $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$.

По условию $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$ (четвертая четверть), тогда $\sin\alpha < 0$, значит, $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$.

Ответ: $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$.

По определению тангенса угла α получим формулу $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

Формула $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$ справедлива для всех углов α таких, что $\alpha \ne \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. Поскольку при $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, абсцисса соответствующих точек единичной окружности равна нулю, то $\cos\alpha = 0$ при $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$, т. е. дробь $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ при этих значениях α не имеет смысла.

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \qquad \alpha \ne \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}}$$

По определению котангенса угла α получим формулу $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$.

Формула $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$ справедлива для всех углов α таких, что $\alpha \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Поскольку при $\alpha = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ ордината соответствующих точек единичной окружности равна нулю, то $\sin\alpha = 0$ при $\alpha = \pi n$, $n \in Z$, т. е. дробь $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ при этих значениях α не имеет смысла.

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$$

$$\alpha \neq \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$$

Поскольку $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1$, то $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$.

Формула $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$ справедлива для всех углов α таких, что $\alpha \neq \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

$$\alpha \neq \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$$

Разделим обе части основного тригонометрического тождества $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ на $\cos^2\alpha$ и получим:

$$\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha};\quad \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha};$$

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha};\quad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$

где $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Разделив обе части основного тригонометрического тождества на $\sin^2\alpha$, получим формулу $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$, где $\alpha \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\alpha \neq \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$$

Формулы (***тригонометрические тождества***), которые мы вывели, описывают соотношения между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одного и того же угла.

Полученные формулы позволяют находить значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если одно из этих значений известно.

Пример 2. Найдите значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ угла α, если $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}75$, $\alpha \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Решение. Из формулы $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$ выразим $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

Так как по условию $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}75 = \dfrac{3}{4}$, то $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = 1 : \dfrac{3}{4} = \dfrac{4}{3}$.

По формуле $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ найдем $\cos\alpha$:

$1+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; $\dfrac{25}{16}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; $\cos^2\alpha=\dfrac{16}{25}$, значит, $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$ или $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$.

Так как $\alpha\in\left(\pi;\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$ (третья четверть), то $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$.

Из формулы $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$ выразим $\sin\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha$ и найдем $\sin\alpha=$ $=\dfrac{3}{4}\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)=-\dfrac{3}{5}$.

Ответ: $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{4}{3}$.

Рассмотрим, как тригонометрические тождества используются для упрощения выражений.

Пример 3. Упростите выражение:

а) $3-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$; б) $\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha+\cos\alpha$;

в) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha$; г) $\left(1-\sin^2\alpha\right)\operatorname{tg}^2\alpha-1$.

Решение.

а) $3-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=3-\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)=3-1=2$;

б) $\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha+\cos\alpha=\sin\alpha\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\cos\alpha=\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha}+\cos\alpha=\cos\alpha+\cos\alpha=$ $=2\cos\alpha$;

в) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=1+\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$;

г) $\left(1-\sin^2\alpha\right)\operatorname{tg}^2\alpha-1=\cos^2\alpha\cdot\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-1=\sin^2\alpha-1=-\left(1-\sin^2\alpha\right)=$ $=-\cos^2\alpha$.

Примеры основных заданий и их решения

1. Могут ли синус и косинус одного угла быть равными соответственно:

а) $\dfrac{5}{13}$ и $\dfrac{12}{13}$; б) $-0,3$ и $0,4$; в) $0,8$ и $0,6$?

Решение. Для ответа на вопрос достаточно проверить, верно ли равенство $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ (т. е. выполняется ли условие принадлежности точки P_α единичной окружности).

а) $\left(\frac{5}{13}\right)^2+\left(\frac{12}{13}\right)^2=\frac{25+144}{169}=1,$ могут;

б) $(-0,3)^2+(0,4)^2=0,09+0,16=0,25\neq 1,$ не могут;

в) $(0,8)^2+(0,6)^2=0,64+0,36=1,$ могут.

2. Найдите:

а) $\cos\beta$, если $\sin\beta=-\frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$;

б) $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=2$ и $180°<\alpha<270°$.

Решение. а) Из равенства $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ выразим $\cos^2\beta=1-\sin^2\beta$. Так как $\sin\beta=-\frac{5}{13}$, то $\cos^2\beta=1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2=\frac{144}{169}$. Тогда $\cos\beta=\frac{12}{13}$ или $\cos\beta=-\frac{12}{13}$. Поскольку $\frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$ (угол четвертой четверти), то $\cos\beta=\frac{12}{13}$.

б) Так как $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, то $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{2}$. Из формулы $1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$ найдем $\sin\alpha$: $1+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{\sin^2\alpha}$; $\frac{5}{4}=\frac{1}{\sin^2\alpha}$, $\sin^2\alpha=\frac{4}{5}$. Так как $180°<\alpha<270°$, а значения синуса угла в третьей четверти отрицательны, то $\sin\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$.

3. Упростите выражение:

а) $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-7$;

б) $\frac{2\sin\beta\cos\beta+1}{\sin\beta+\cos\beta}$;

в) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2-(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)^2$;

г) $\sin^4\alpha-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$.

Решение. а) $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-7=1-7=-6$;

б) $\frac{2\sin\beta\cos\beta+1}{\sin\beta+\cos\beta}=\frac{2\sin\beta\cos\beta+\sin^2\beta+\cos^2\beta}{\sin\beta+\cos\beta}=\frac{(\sin\beta+\cos\beta)^2}{\sin\beta+\cos\beta}=\sin\beta+\cos\beta$;

в) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2-(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)^2=\operatorname{tg}^2\alpha+2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha+$ $+2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha=2+2=4$;

г) $\sin^4\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\sin^2\alpha - 1\right)\sin^2\alpha + \cos^2\alpha =$

$= -\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \cos^2\alpha\left(-\sin^2\alpha + 1\right) =$

$= \cos^2\alpha\left(1 - \sin^2\alpha\right) = \cos^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = \cos^4\alpha.$

4*. Найдите значение выражения $\dfrac{3\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + 2\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 5$.

Решение. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = 5$, т. е. $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 5$, тогда $\sin\alpha = 5\cos\alpha$.

Значит, $\dfrac{3\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + 2\cos\alpha} = \dfrac{3 \cdot 5\cos\alpha - \cos\alpha}{5\cos\alpha + 2\cos\alpha} = \dfrac{14\cos\alpha}{7\cos\alpha} = 2.$

Если $\operatorname{tg}\alpha = -2$, то:
а) $\operatorname{ctg}\alpha = -2$; б) $\operatorname{ctg}\alpha = 2$; в) $\operatorname{ctg}\alpha = -\dfrac{1}{2}$; г) $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{2}$.
Выберите правильный ответ.

1.122. Могут ли синус и косинус одного и того же угла быть равными соответственно:

а) 0,6 и –0,8; б) 0,2 и 0,4?

1.123. Могут ли тангенс и котангенс одного и того же угла быть равными соответственно:

а) 4 и 0,25; б) $\sqrt{7}$ и $-\dfrac{1}{\sqrt{7}}$?

1.124. Найдите $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

1.125. Найдите $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$ и $2\pi < \alpha < \dfrac{5\pi}{2}$.

1.126. Упростите выражение:

а) $1 - \sin^2\alpha$; б) $\cos^2\alpha - 1$;

в) $2\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha - 7$; г) $\dfrac{2\sin^2\alpha - 2}{1 - \cos^2\alpha}$;

д) $\cos\alpha\ \operatorname{tg}\alpha$; е) $\sin\alpha\cos\alpha\ \operatorname{tg}\alpha - 1$;

ж) $1 - \cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\alpha$; з) $\dfrac{1 - \sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} \cdot \operatorname{tg}\alpha$;

и) $\dfrac{1 - \sin^2\alpha}{1 - \cos^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$; к) $\dfrac{\cos^2\alpha - 1}{\cos^2\alpha} \cdot \left(\sin^2\alpha + 1\right)$.

1.127. Найдите значение выражения:

а) $49(1 - \cos^2\alpha)$, если $\sin\alpha = \frac{5}{7}$;

б) $36\left(\sin^2\alpha - 1\right)$, если $\cos\alpha = \frac{2}{3}$.

1.128. Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{7}{24}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

1.129. Докажите тождество:

а) $(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)\cos^4\alpha + \sin^2\alpha = 1$;

б) $(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha)(1 - \sin^2\alpha) = \operatorname{ctg}^2\alpha$.

1.130. Упростите выражение:

а) $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{1 + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$;

б) $\frac{\sin^4\alpha - 2\sin^2\alpha + 1}{1 - \sin^2\alpha}$;

в) $\frac{\cos^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - 1}$;

г) $\frac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha} + \operatorname{tg}\alpha$;

д) $\frac{\cos^2\alpha}{\cos^3\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\sin^3\alpha}$;

е) $\frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$;

ж) $\left(\left(\frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 + 1\right) : \frac{1 + \cos\alpha}{\sin^2\alpha}$;

з) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} - \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}$.

1.131. Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$ и $\frac{5\pi}{2} < \alpha < 3\pi$.

1.132. Найдите $9\sqrt{2}\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ и $\operatorname{tg}\alpha < 0$.

1.133. Докажите тождество:

а) $\frac{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha}{\cos^2\alpha} + 2\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$;

б) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} = \sin^2\alpha$.

1.134. Упростите выражение $(\operatorname{tg}\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha)^2 - (\operatorname{tg}\alpha + 3\operatorname{ctg}\alpha)^2$.

1.135. Упростите выражение:

а) $(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha$;

б) $\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{ctg}\alpha - (\cos\alpha\ \operatorname{tg}\alpha)^2$;

в) $\cos^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^2\alpha$;

г) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{\operatorname{ctg}\alpha}$;

д) $\frac{\sin^3\alpha - \sin\alpha\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}$;

е) $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}$.

1.136. Найдите $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что $\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ и α лежит не во второй четверти.

1.137. Докажите тождество:

а) $\sin^4 \alpha + 2\cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha = 1$; б) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} = \cos^2\alpha$;

в) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 2$.

1.138*. Найдите $\dfrac{2\sin\alpha - 3\cos\alpha}{3\cos\alpha + 2\sin\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 7$.

1.139. Найдите $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}6$ и $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

1.140. Упростите выражение:

а) $1 - \cos^2 \alpha$; б) $\sin^2 \alpha - 1$;

в) $5\sin^2 \alpha + 5\cos^2 \alpha + 3$; г) $\dfrac{3 - 3\cos^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha}$;

д) $\sin\alpha \operatorname{ctg}\alpha$; е) $1 - \sin\alpha \cos\alpha \operatorname{ctg}\alpha$;

ж) $1 - \sin^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha \sin^2 \alpha$; з) $(1 - \cos^2 \alpha)\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha$.

1.141. Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -\dfrac{5}{12}$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

1.142. Докажите тождество:

а) $(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha)\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$; б) $(1 - \cos^2 \alpha)(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) = \operatorname{tg}^2 \alpha$.

1.143. Упростите выражение:

а) $\dfrac{1 - \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} \cdot \operatorname{ctg}\alpha$; б) $\dfrac{\cos^4\alpha - 2\cos^2\alpha + 1}{1 - \cos^2\alpha}$; в) $\dfrac{\sin^4\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha - 1}$;

г) $\dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} + \operatorname{ctg}\alpha$; д) $\dfrac{\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$; е) $\dfrac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha}$;

ж) $\left(\dfrac{3\cos\alpha}{1 + \sin\alpha} + \dfrac{3\cos\alpha}{1 - \sin\alpha}\right) \cdot \cos\alpha$.

1.144. Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = 2$ и $\sin\alpha < 0$.

1.145. Упростите выражение:

а) $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha)\operatorname{ctg}^2\alpha$; б) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha - (\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha)^2$;

в) $\dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} + \dfrac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}$.

1.146. Найдите $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если известно, что $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ и α не лежит в первой четверти.

1.147*. Найдите $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\dfrac{4\sin\alpha - 3\cos\alpha}{2\cos\alpha + 3\sin\alpha} = 3$.

1.148. Найдите, не выполняя построения графика, точки пересечения с осями координат графика функции:

а) $f(x) = 8 - 9x$; б) $f(x) = 4x^2 + 3x - 1$; в) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$.

1.149. Дана функция $y = q(x)$. Известно, что $q(-2) = 3$, а $q(9) = 7$. Найдите значение выражения $5q(2) - q(-9)$, если функция $y = q(x)$ является:

а) четной; б) нечетной.

1.150. По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 73, найдите:

а) область определения функции;
б) множество значений функции;
в) нули функции;
г) промежутки знакопостоянства функции;
д) промежутки возрастания и убывания функции;
е) наибольшее и наименьшее значения функции.

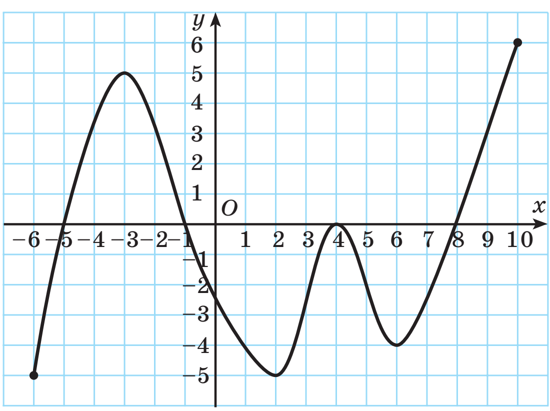

Рис. 73

§ 5. Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$. Их свойства и графики

1.151. Известно, что функция $y = f(x)$ нечетная, а функция $y = q(x)$ четная и $f(2) = -5$; $q(7) = 9$. Найдите значение выражения $f(-2) + 3q(-7)$.

1.152. Найдите область определения функции $y = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{2x + 1}$.

1.153. Найдите множество значений функции $y = x^2 + 5x - 6$.