1.357. Решите уравнение, используя метод решения однородных уравнений:

а) $\sin x - \cos x = 0$;

б) $3\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$;

в) $\sin^2 x - 2\sin x \cos x = 3\cos^2 x$;

г) $3\cos^2 x + 4\sin x \cos x + 5\sin^2 x = 2$.

1.358*. Найдите (в градусах) наименьший положительный и наибольший отрицательный корни уравнения:

а) $\sin\left(30° - x\right) = \frac{1}{2}$; б) $\cos(45° - 2x) = 0$; в) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + 60°\right) = 1$.

1.359. Найдите 25 % от числа $7 \cdot 10^6$.

1.360. Решите двойное неравенство $7x \leqslant x^2 - 8 \leqslant 3x - 4$.

1.361. Расположите в порядке возрастания числа $-2\sqrt{50}$, $-4\sqrt{18}$ и $-\sqrt{162}$.

1.362. Воспользуйтесь методом замены переменной и решите уравнение $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x + 3) + 1 = 0$.

1.363. Площадь прямоугольной площадки, одна из сторон которой на 3 м больше другой, равна 54 м^2. Найдите (в метрах) длину изгороди, которая потребуется для ограждения всей площадки по периметру.

1.364. Выполните сложение рациональных дробей: $\frac{x^2 - 4}{2x^2 + 7x + 5} + \frac{1}{x + 1}$.

§ 9. Формулы приведения

1.365. Какой координатной четверти принадлежит угол α, если:

а) $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; в) $-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$; г) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$?

1.366. Определите знак $\sin\alpha$, если:

а) $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; б) $-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$;

в) $-\frac{3\pi}{2} < \alpha < -\pi$; г) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

1.367. Определите знак $\operatorname{ctg}\alpha$, если:

а) $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; б) $-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$;

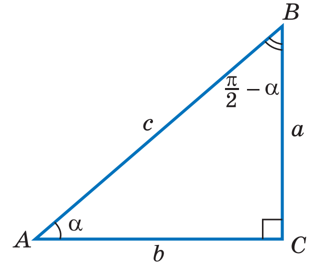
в) $-\frac{3\pi}{2} < \alpha < -\pi$; г) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

При изучении геометрии вы установили, что

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$

и $$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha,\quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha,$$

если α — острый угол (рис. 112).



$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{b}{c}=\cos\alpha;$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{a}{c}=\sin\alpha;$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{b}{a}=\operatorname{ctg}\alpha;$$
$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{a}{b}=\operatorname{tg}\alpha$$

Рис. 112

Свойство периодичности тригонометрических функций позволяет свести вычисление значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса произвольного угла к вычислению значений этих функций при значениях аргумента, принадлежащих промежутку $[0; 2\pi]$. Например,

$$\sin 390^\circ=\sin(360^\circ+30^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{17\pi}{4}=\operatorname{ctg}\left(4\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=1.$$

На практике принято сводить значения тригонометрических функций произвольного угла к вычислению значений этих функций для угла, принадлежащего промежутку $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Это можно делать с помощью ***формул приведения.***

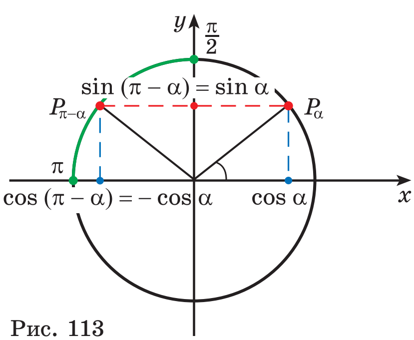


Рис. 113

Рассмотрим промежуток $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$. Любое число φ из этого промежутка можно представить в виде $\varphi=\pi-\alpha$, где $\alpha\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Например, $\frac{5\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{8}=\pi-\frac{3\pi}{8}$.

Поскольку ординаты точек P_α и $P_{\pi-\alpha}$ равны, а абсциссы отличаются только знаком, то: $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$, а $\cos(\pi-\alpha)=$ $=-\cos\alpha$ (рис. 113).

Тогда для $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ получим, что

$$\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha,\ \text{т. е. } \operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha.$$

И для $\alpha\neq 0$ имеем:

$$\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)=\frac{\cos(\pi-\alpha)}{\sin(\pi-\alpha)}=\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha,\ \text{т. е. } \operatorname{ctg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Вместе с тем любое число φ из промежутка $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$ можно также представить в виде $\varphi = \frac{\pi}{2} + \alpha$, где $\alpha \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$. Например, $\frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$.

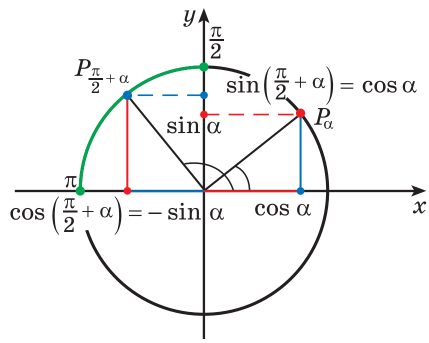


Рис. 114

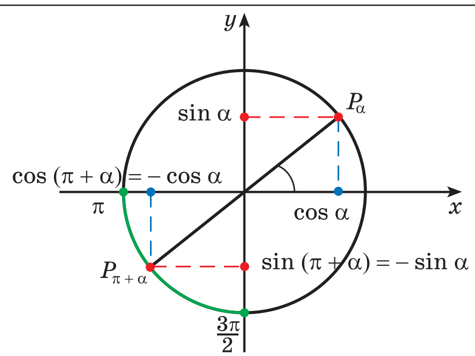
Так как ордината точки $P_{\frac{\pi}{2}+\alpha}$ равна абсциссе точки P_α, а абсцисса точки $P_{\frac{\pi}{2}+\alpha}$ отличается от ординаты точки P_α только знаком (рис. 114), то: $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$, а $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$.

Для $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ получим:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha, \text{ т. е. } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha, \text{ т. е. } \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Так как любое число φ из промежутка $\left[\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right]$ можно представить в виде $\varphi = \pi + \alpha$ или $\varphi = \frac{3\pi}{2} - \alpha$, где $\alpha \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, то, рассуждая аналогично, получим формулы приведения:

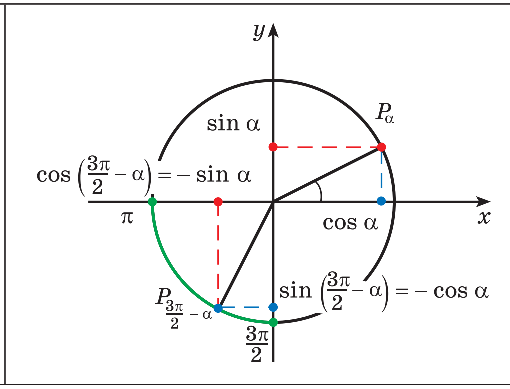
$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$ $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$ $\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$	

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha$$



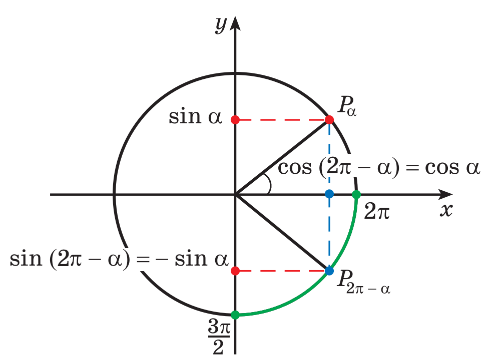
Поскольку любое число φ из промежутка $\left[\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right]$ можно представить в виде $\varphi=2\pi-\alpha$ или $\varphi=\frac{3\pi}{2}+\alpha$, где $\alpha\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, то получим:

$$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$$

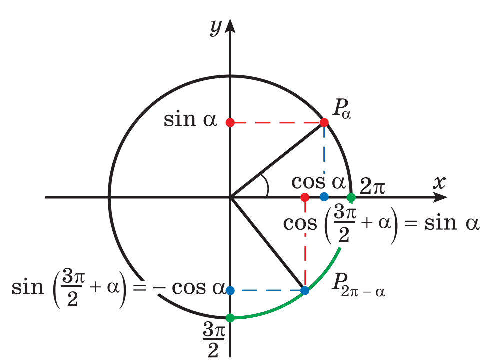


$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha$$



Проанализировав полученные формулы, можно заметить закономерности, позволяющие сформулировать **правило**, с помощью которого можно применять формулы приведения, не заучивая их:

① В правой части формулы приведения ставится тот знак, который имеет в соответствующей четверти исходная функция, если считать, что угол α — острый.

② Если в формуле приведения аргумент имеет вид:

- $\pi \pm \alpha$ или $2\pi \pm \alpha$, то название функции не меняется;
- $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ или $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то название функции меняется (синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс, котангенс на тангенс).

Например, применим полученное правило для выражения $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

① Если считать, что угол α — острый, то $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ — угол третьей четверти. В третьей четверти косинус (исходная функция) отрицательный, значит, в правой части равенства нужно поставить знак «минус».

② Поскольку аргумент имеет вид $\frac{3\pi}{2} - \alpha$, то название функции «косинус» нужно поменять на «синус». Таким образом, получим: $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$.

$$\cos\Bigg(\underbrace{\overbrace{\frac{3\pi}{2}}^{\text{название меняется}} - \alpha}_{\substack{\text{III четверть}\\ \text{косинус отрицательный}}}\Bigg) = -\sin\alpha$$

Пример 1. Приведите выражение к тригонометрической функции числа α, применив формулы приведения:

а) $\cos(2\pi - \alpha)$; б) $\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$; в) $\sin(\pi - \alpha)$.

Решение. Применим правило:

а) ① Так как $2\pi - \alpha$ — угол четвертой четверти, в которой косинус положительный, то в правой части равенства не нужно ставить знак «минус».

② Поскольку аргумент имеет вид $2\pi - \alpha$, то название функции «косинус» не меняется. Значит, $\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$.

$$\cos\Big(\underbrace{\overbrace{2\pi}^{\text{название не меняется}} - \alpha}_{\substack{\text{IV четверть}\\ \text{косинус положительный}}}\Big) = \cos\alpha$$

б) ① Так как $\frac{3\pi}{2} + \alpha$ — угол четвертой четверти, в которой тангенс отрицательный, то в правой части равенства нужно поставить знак «минус».

$$\mathrm{tg}\Bigg(\underbrace{\overbrace{\frac{3\pi}{2}}^{\text{название меняется}} + \alpha}_{\substack{\text{IV четверть}\\ \text{тангенс отрицательный}}}\Bigg) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$$

② Поскольку аргумент имеет вид $\frac{3\pi}{2}+\alpha$, название функции «тангенс» нужно поменять на «котангенс». Тогда $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha$.

в) ① Так как $\pi-\alpha$ — угол второй четверти, в которой синус положительный, то в правой части равенства не нужно ставить знак «минус».

② Поскольку аргумент имеет вид $\pi-\alpha$, то название функции «синус» не меняется. Значит, $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$.

название не меняется

$$\sin(\underbrace{\pi-\alpha}_{\text{II четверть}})=\sin\alpha$$

синус положительный

Пример 2. Используйте формулы приведения и найдите значение выражения:

а) $\sin\frac{3\pi}{4}$; б) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}$; в) $\cos 240°$; г) $\operatorname{ctg}300°$.

Решение. а) $\sin\frac{3\pi}{4}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$ или $\sin\frac{3\pi}{4}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.

П е р в ы й с п о с о б.

① Так как $\pi-\frac{\pi}{4}$ — угол второй четверти, в которой синус положительный, то в правой части равенства не нужно ставить знак «минус».

② Поскольку аргумент имеет вид $\pi-\frac{\pi}{4}$, то название функции «синус» не меняется. Значит, $\sin\frac{3\pi}{4}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

В т о р о й с п о с о б.

название меняется

$$\sin\frac{3\pi}{4}=\sin\left(\underbrace{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}_{\text{II четверть}}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

синус положительный

б) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}=\operatorname{tg}\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ (в третьей четверти тангенс положительный, название функции не меняется).

в) $\cos 240°=\cos(180°+60°)=-\cos 60°=-\frac{1}{2}$ (в третьей четверти косинус отрицательный, название функции не меняется).

г) $\operatorname{ctg}300°=\operatorname{ctg}(360°-60°)=-\operatorname{ctg}60°=-\sqrt{3}$ (в четвертой четверти котангенс отрицательный, название функции не меняется).

Примеры основных заданий и их решения

1. Вычислите, используя формулы приведения:

а) $\cos 315°$; б) $\sin 120°$; в) $\operatorname{ctg} 210°$; г) $\operatorname{tg} 330°$.

Решение. а) $\cos 315° = \cos(360° - 45°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (в четвертой четверти косинус положительный, название функции не меняется);

б) $\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (во второй четверти синус положительный, название функции не меняется);

в) $\operatorname{ctg} 210° = \operatorname{ctg}(270° - 60°) = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$ (в третьей четверти котангенс положительный, название функции меняется);

г) $\operatorname{tg} 330° = \operatorname{tg}(360° - 30°) = -\operatorname{tg} 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (в четвертой четверти тангенс отрицательный, название функции не меняется).

2. Найдите значение выражения:

а) $\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$; б) $\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$; в) $\operatorname{tg}\frac{8\pi}{3}$; г) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{19\pi}{4}\right)$.

Решение. а) Так как синус — нечетная функция, то

$$\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -\sin\frac{4\pi}{3}.$$

Применим формулы приведения:

$$-\sin\frac{4\pi}{3} = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

б) Воспользуемся свойством четности косинуса и получим:

$$\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = \cos\frac{11\pi}{6}.$$

По формулам приведения: $\cos\frac{11\pi}{6} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

в) Воспользуемся свойством периодичности тангенса и получим:

$$\operatorname{tg}\frac{8\pi}{3} = \operatorname{tg}\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}.$$

Применим формулы приведения: $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

г) Поскольку котангенс — нечетная функция, то $\operatorname{ctg}\left(-\frac{19\pi}{4}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{19\pi}{4}$.

Используем свойство периодичности котангенса и получим:

$$-\operatorname{ctg}\frac{19\pi}{4} = -\operatorname{ctg}\left(4\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}.$$

По формулам приведения:

$$-\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = -\operatorname{ctg}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\left(-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1.$$

3. Приведите к тригонометрической функции угла α:

а) $\cos(7\pi + \alpha)$; б) $\operatorname{ctg}\left(\frac{13\pi}{2} - \alpha\right)$;

в) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; г) $\sin\left(\alpha - \frac{11\pi}{2}\right)$.

Решение. а) Используем свойство периодичности косинуса и получим: $\cos(7\pi + \alpha) = \cos(6\pi + (\pi + \alpha)) = \cos(\pi + \alpha)$.

По формулам приведения: $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$.

б) Воспользуемся свойством периодичности котангенса:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{13\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\left(6\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Применим формулы приведения: $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha$.

в) Так как тангенс — нечетная функция, то $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

По формулам приведения: $-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha$.

г) Поскольку синус — нечетная функция, то

$$\sin\left(\alpha - \frac{11\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{11\pi}{2} - \alpha\right).$$

Воспользуемся свойством периодичности синуса и получим:

$$-\sin\left(\frac{11\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\left(4\pi + \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right).$$

По формулам приведения: $-\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -(-\cos\alpha) = \cos\alpha$.

4. Приведите к тригонометрической функции угла α:

а) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$; б) $\operatorname{tg}^2\left(\alpha - \frac{17\pi}{2}\right)$.

Решение. а) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\right)^2 = (-\sin\alpha)^2 = \sin^2\alpha$;

б) $\mathrm{tg}^2\left(\alpha-\frac{17\pi}{2}\right)=\left(\mathrm{tg}\left(\alpha-\frac{17\pi}{2}\right)\right)^2=\left(-\mathrm{tg}\left(\frac{17\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2=\left(\mathrm{tg}\left(\frac{17\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2=$

$=\left(\mathrm{tg}\left(8\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2=\left(\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2=(\mathrm{ctg}\alpha)^2=\mathrm{ctg}^2\alpha.$

5. Вычислите:

а) $\sin^2 225°$; б) $\mathrm{ctg}^2 210°$.

Решение. а) $\sin^2 225°=(\sin 225°)^2=(\sin(180°+45°))^2=(-\sin 45°)^2=$

$=(\sin 45°)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2};$

б) $\mathrm{ctg}^2 210°=(\mathrm{ctg}210°)^2=(\mathrm{ctg}(180°+30°))^2=(\mathrm{ctg}30°)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2=3.$

6. Упростите выражение:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi-\alpha)$; б) $\cos^2(3\pi-\alpha)+\cos^2\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)$;

в) $\frac{\sin(270°-\alpha)}{\cos(90°+\alpha)}\cdot\mathrm{tg}(180°-\alpha)$; г) $\mathrm{tg}(450°+\alpha)+\mathrm{ctg}(\alpha-180°)$.

Решение. а) Применим формулы приведения:

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi-\alpha)=\cos\alpha-\cos\alpha=0.$

б) Воспользуемся периодичностью косинуса и формулами приведения и получим:

$\cos^2(3\pi-\alpha)+\cos^2\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)=\cos^2(\pi-\alpha)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$

в) Применим формулы приведения:

$\frac{\sin(270°-\alpha)}{\cos(90°+\alpha)}\cdot\mathrm{tg}(180°-\alpha)=\frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha}\cdot(-\mathrm{tg}\,\alpha)=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\mathrm{tg}\,\alpha=$

$=-\mathrm{ctg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\alpha=-1.$

г) Используем периодичность тангенса, нечетность котангенса и формулы приведения:

$\mathrm{tg}(450°+\alpha)+\mathrm{ctg}(\alpha-180°)=\mathrm{tg}(90°+\alpha)-\mathrm{ctg}(180°-\alpha)=-\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha=0.$

7. Решите уравнение $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\sqrt{2}\sin(x+\pi)\cos x.$

Решение. Применим формулы приведения и получим:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\sqrt{2}\sin(x+\pi)\cos x \Leftrightarrow\ -\sin x=-\sqrt{2}\sin x\cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(-1+\sqrt{2}\cos x\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ -1+\sqrt{2}\cos x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z},\\ x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z};\ \pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$.

1. В каких выражениях $\sin(\pi-\beta)$, $\cos(\pi+\beta)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\lambda\right)$, $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\lambda\right)$, $\cos(2\pi-\alpha)$ название функции после применения формул приведения будет «косинус»?

2. В каких выражениях $\sin(\pi-\beta)$, $\cos(\pi+\beta)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\lambda\right)$, $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\lambda\right)$, $\cos(2\pi-\alpha)$ после применения формул приведения в правой части равенства будет поставлен знак «минус»?

1.368. Используйте формулы приведения и приведите к тригонометрической функции угла α:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; в) $\operatorname{tg}(\pi+\alpha)$;

г) $\sin(\pi+\alpha)$; д) $\cos(2\pi+\alpha)$; е) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$.

1.369. Приведите к тригонометрической функции угла α:

а) $\cos(270°-\alpha)$; б) $\operatorname{tg}(180°-\alpha)$; в) $\sin(\alpha-90°)$;

г) $\cos(\alpha-180°)$; д) $\operatorname{ctg}(\alpha-360°)$; е) $\operatorname{tg}(\alpha-270°)$.

1.370. Найдите значение выражения, используя формулы приведения:

а) $\operatorname{tg}240°$; б) $\sin 210°$; в) $\operatorname{ctg}(-300°)$;

г) $\cos(-120°)$; д) $\sin(-840°)$; е) $\operatorname{tg}(-570°)$.

1.371. Используйте формулы приведения и преобразуйте выражение:

а) $\cos^2(\pi+\alpha)$; б) $\sin^2(90°-\alpha)$; в) $\operatorname{ctg}^2\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)$.

1.372. Найдите значение выражения, используя периодичность тригонометрических функций и формулы приведения:

а) $\sin\frac{7\pi}{6}$; б) $\cos\frac{5\pi}{3}$; в) $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{4}$;

г) $\cos\left(-\frac{61\pi}{4}\right)$; д) $\sin^2\frac{29\pi}{4}$; е) $\operatorname{ctg}^2\left(-\frac{40\pi}{3}\right)$.

1.373. Упростите выражение:

а) $\cos(\pi + \alpha) + \cos(-\alpha)$; б) $\dfrac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin(\pi + \alpha)}$;

в) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sin(-\alpha) + \cos(\alpha - 2\pi)$; г) $\cos^2(\pi + \alpha) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

1.374. Сравните значения выражений:

а) $\sin 32°$ и $\cos 58°$; б) $\sin 28°$ и $\cos 42°$; в) $\operatorname{tg} 44°$ и $\operatorname{ctg} 46°$.

1.375. Используйте формулы приведения и решите уравнение:

а) $\operatorname{tg}(\pi + x) = 1$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \sqrt{2} = 0$; г) $3\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) + \sqrt{3} = 0$.

1.376. Найдите значение выражения:

а) $\sin(-300°) \cdot \operatorname{tg}(-210°)$; б) $2\sin 870° + 2\sqrt{3}\cos 570° - \operatorname{tg}^2 420°$.

1.377. Упростите выражение:

а) $\operatorname{tg}(360° - \alpha) - \operatorname{ctg}(270° - \alpha)$;
б) $\operatorname{ctg}(180° - \alpha) \cdot \cos(90° - \alpha) - \sin(270° + \alpha)$;
в) $\operatorname{ctg}(90° - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(270° + \alpha) + \sin^2\alpha$;
г) $\dfrac{\operatorname{tg}(180° + \alpha) \cdot \sin(90° - \alpha)}{\cos(270° + \alpha)}$.

1.378. Известно, что $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{4}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$.

1.379. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\operatorname{tg}(-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$; б) $1 + \operatorname{ctg}(\pi + \alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$;

в) $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\operatorname{tg}(\pi + \alpha)}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$; г) $\dfrac{1}{\cos^2(\pi - \alpha)} + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$;

д) $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(\pi + \alpha)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$; е) $\dfrac{\operatorname{ctg}(\pi - \alpha)\sin(\pi + \alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$.

1.380. Для функции $f(x) = 3\cos 4x + 1$ найдите:

а) $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$; б) $f\left(-\frac{5\pi}{16}\right)$.

1.381. Решите уравнение:

а) $2\sin(2\pi - x) - \sin x = -3$; б) $\cos x - \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$;

в) $\sin^2 x + 5\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 6 = 0$; г) $4\sin^2 x + 4\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 1 = 0$.

1.382. Найдите все корни уравнения:

а) $\sin(2\pi - x) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 1 = 0$; б) $\sin(2\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{2}$.

1.383. Постройте график функции:

а) $f(x) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 1$; б) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 1$.

1.384*. Найдите значение выражения:

а) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \operatorname{arcctg} 7\right)$; б) $\cos\left(\pi + \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$.

1.385*. Найдите значение выражения $\dfrac{2\sin(\pi - \alpha) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(\pi + \alpha) - 4\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

1.386. Приведите к тригонометрической функции угла α выражение:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; б) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; в) $\operatorname{ctg}(\pi + \alpha)$;

г) $\cos(\pi + \alpha)$; д) $\sin(2\pi + \alpha)$; е) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$.

1.387. Используйте формулы приведения и запишите тригонометрическую функцию угла α:

а) $\sin(270° - \alpha)$; б) $\operatorname{ctg}(180° - \alpha)$; в) $\cos(\alpha - 90°)$;
г) $\sin(\alpha - 180°)$; д) $\operatorname{tg}(\alpha - 360°)$; е) $\operatorname{ctg}(\alpha - 270°)$.

1.388. Найдите значение выражения, используя периодичность тригонометрических функций и формулы приведения:

а) $\sin 315°$; б) $\operatorname{ctg} 300°$; в) $\operatorname{tg}(-240°)$; г) $\cos 480°$;
д) $\operatorname{tg}(-570°)$; е) $\operatorname{ctg}(-585°)$; ж) $\operatorname{tg} 1050°$; з) $\sin(-690°)$.

1.389. Найдите значение выражения:

а) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$; б) $\sin\frac{17\pi}{6}$; в) $\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$; г) $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$;

д) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$; е) $\sin\frac{19\pi}{6}$; ж) $\cos^2\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$; з) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{29\pi}{4}\right)$.

1.390. Преобразуйте выражение:

а) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; б) $\sin^2(5\pi-\alpha)$; в) $\cos^2(630^\circ+\alpha)$.

1.391. Упростите выражение:

а) $\sin(270^\circ-\alpha)-\cos(180^\circ+\alpha)$;

б) $\operatorname{tg}(270^\circ-\alpha)\sin(180^\circ-\alpha)+\cos(180^\circ+\alpha)$.

1.392. Упростите выражение:

а) $\sin(\pi+\alpha)-\sin(-\alpha)$; б) $\dfrac{\sin(2\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$;

в) $\operatorname{tg}(-\alpha)\cdot\cos\alpha-\sin(2\pi-\alpha)$; г) $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin^2(\pi-\alpha)$.

1.393. Используйте формулы приведения и решите уравнение:

а) $2\cos(\pi+x)=\sqrt{3}$; б) $2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+1=0$;

в) $3\operatorname{tg}\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)+\sqrt{3}=0$; г) $5\operatorname{ctg}(\pi-x)+3=0$.

1.394. Найдите значение выражения:

а) $\cos(-135^\circ)\cdot\operatorname{ctg}(-120^\circ)$; б) $4\cos840^\circ-4\sqrt{3}\sin660^\circ+\operatorname{ctg}^2 30^\circ$.

1.395. Упростите выражение:

а) $\operatorname{tg}(180^\circ+\alpha)\cdot\operatorname{ctg}(360^\circ-\alpha)+\cos^2\alpha$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)\sin(180^\circ-\alpha)}{\cos(180^\circ+\alpha)}$.

1.396. Известно, что $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{5}{13}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$.

1.397. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{ctg}(-\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$; б) $1+\operatorname{tg}(\pi+\alpha)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;

в) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)}{1-\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$; г) $\dfrac{1}{\sin^2(\pi+\alpha)}+\operatorname{tg}(\pi+\alpha)\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)$;

д) $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$; е) $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$.

1.398. Решите уравнение:

а) $4\sin(2\pi - x) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -5$; б) $\sqrt{3}\sin x - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 0$.

1.399. Найдите все корни уравнения:

а) $\cos(2\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{3}$; б) $\cos(2\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 1$;

в) $2\cos^2 x = \sqrt{3}\sin(1{,}5\pi + x)$.

1.400*. Найдите значение выражения $\dfrac{3\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - 2\cos(\pi - \alpha)}{2\sin(\pi + \alpha) - 3\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = 5$.

1.401. Из дробей $\frac{3}{7}$; $\frac{13}{13}$; $\frac{9}{4}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{2}{17}$; $\frac{19}{3}$ выберите все неправильные дроби.

1.402. Найдите НОК (48, 30).

1.403. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{5^{13}\cdot\left(5^{10}\right)^2}{5^{31}}$; б) $\dfrac{12^8}{27^2\cdot 2^{15}}$.

1.404. Решите неравенство $\dfrac{x^2 + 5x}{3 - 6x} < 0$ и выберите его наименьшее целое отрицательное решение.

1.405. Найдите нули функции $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.

1.406. Разложите на множители квадратный трехчлен:

а) $-x^2 - 11x - 10$; б) $8a^2 + 2a - 1$.

1.407. Найдите значение выражения $\left(1 - \sqrt{2}\right)^2 - \left(1 - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} + 3\right)$.

§ 10. Синус, косинус, тангенс суммы и разности

1.408. Найдите высоту треугольника, если она в два раза больше стороны, к которой проведена, а площадь треугольника равна 32 см^2.

1.409. В прямоугольном треугольнике отношение одного из катетов к гипотенузе равно 0,6. Найдите отношение другого катета к гипотенузе.

Известные значения синуса, косинуса, тангенса углов можно использовать для вычисления значений синуса, косинуса, тангенса других углов.

Угол 75° можно представить в виде $75° = 45° + 30°$, но $\sin 75° = \sin(45° + 30°) \neq \sin 45° + \sin 30°$, так как $\sin 45° + \sin 30° = \dfrac{\sqrt{2} + 1}{2} > 1$.