1.398. Решите уравнение:

а) $4\sin(2\pi - x) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -5$; б) $\sqrt{3}\sin x - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 0$.

1.399. Найдите все корни уравнения:

а) $\cos(2\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{3}$; б) $\cos(2\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 1$;

в) $2\cos^2 x = \sqrt{3}\sin(1{,}5\pi + x)$.

1.400*. Найдите значение выражения $\dfrac{3\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - 2\cos(\pi - \alpha)}{2\sin(\pi + \alpha) - 3\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = 5$.

1.401. Из дробей $\frac{3}{7}$; $\frac{13}{13}$; $\frac{9}{4}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{2}{17}$; $\frac{19}{3}$ выберите все неправильные дроби.

1.402. Найдите НОК (48, 30).

1.403. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{5^{13} \cdot (5^{10})^2}{5^{31}}$; б) $\dfrac{12^8}{27^2 \cdot 2^{15}}$.

1.404. Решите неравенство $\dfrac{x^2 + 5x}{3 - 6x} < 0$ и выберите его наименьшее целое отрицательное решение.

1.405. Найдите нули функции $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.

1.406. Разложите на множители квадратный трехчлен:

а) $-x^2 - 11x - 10$; б) $8a^2 + 2a - 1$.

1.407. Найдите значение выражения $\left(1 - \sqrt{2}\right)^2 - \left(1 - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} + 3\right)$.

§ 10. Синус, косинус, тангенс суммы и разности

1.408. Найдите высоту треугольника, если она в два раза больше стороны, к которой проведена, а площадь треугольника равна 32 см^2.

1.409. В прямоугольном треугольнике отношение одного из катетов к гипотенузе равно 0,6. Найдите отношение другого катета к гипотенузе.

Известные значения синуса, косинуса, тангенса углов можно использовать для вычисления значений синуса, косинуса, тангенса других углов.

Угол 75° можно представить в виде $75° = 45° + 30°$, но $\sin 75° = \sin(45° + 30°) \neq \sin 45° + \sin 30°$, так как $\sin 45° + \sin 30° = \dfrac{\sqrt{2} + 1}{2} > 1$.

Выведем формулу $\sin(\alpha+\beta)$ — синуса суммы двух углов.

Рассмотрим случай, когда α и β — острые углы в треугольнике ABC (рис. 115).

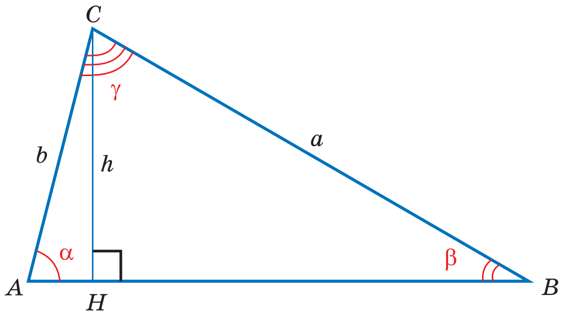

Рис. 115

Выразим площадь треугольника ABC дважды:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ab\sin\left(\pi-(\alpha+\beta)\right) = \frac{1}{2}ab\sin(\alpha+\beta), \quad (1)$$

$$S_{ABC} = S_{AHC} + S_{BHC} = \frac{1}{2}CH\cdot AH + \frac{1}{2}CH\cdot BH.$$

Треугольник BCH — прямоугольный, тогда $CH = a\sin\beta$ и $BH = a\cos\beta$.

Из прямоугольного треугольника ACH имеем: $CH = b\sin\alpha$ и $AH = b\cos\alpha$. Тогда

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}a\sin\beta\cdot b\cos\alpha + \frac{1}{2}b\sin\alpha\cdot a\cos\beta = \frac{1}{2}ab(\sin\beta\cdot\cos\alpha + \sin\alpha\cdot\cos\beta). \quad (2)$$

Приравняем правые части равенств (1) и (2):

$$\frac{1}{2}ab\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}ab(\sin\beta\cdot\cos\alpha + \sin\alpha\cdot\cos\beta).$$

Разделим обе части равенства на $\frac{1}{2}ab$ и получим формулу синуса суммы двух углов:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Если углы α и β не являются острыми, то можно воспользоваться свойством периодичности синуса и формулами приведения.

Например, если α и β являются углами второй четверти, то $\pi-\alpha$ и $\pi-\beta$ — острые углы.

Применим к ним выведенную для острых углов формулу синуса суммы:

$$\sin(\pi-\alpha+\pi-\beta) = \sin(\pi-\alpha)\cdot\cos(\pi-\beta) + \sin(\pi-\beta)\cdot\cos(\pi-\alpha). \quad (3)$$

Воспользуемся формулами приведения в левой части равенства (3) и получим:

$$\sin(\pi-\alpha+\pi-\beta) = \sin\left(2\pi-(\alpha+\beta)\right) = -\sin(\alpha+\beta).$$

Применим формулы приведения к правой части равенства (3):

$$\sin(\pi-\alpha)\cdot\cos(\pi-\beta) + \sin(\pi-\beta)\cdot\cos(\pi-\alpha) =$$
$$= \sin\alpha\cdot(-\cos\beta) + \sin\beta\cdot(-\cos\alpha) = -\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha.$$

Таким образом,
$-\sin(\alpha+\beta) = -\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$ или $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ — формула **синуса суммы двух углов.**
Остальные случаи принадлежности углов различным четвертям рассматриваются аналогично предыдущему.

Воспользуемся полученной формулой и вычислим $\sin 75°$.

$$\sin 75° = \sin(45° + 30°) =$$
$$= \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Синус суммы
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

Выведем формулу синуса разности двух углов.

Для этого $\sin(\alpha - \beta)$ представим в виде $\sin(\alpha + (-\beta))$ и применим формулу синуса суммы двух углов:

$$\sin(\alpha+(-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Получили формулу **синуса разности двух углов:**

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Вычислим, например, $\sin 15°$.

$$\sin 15° = \sin(45° - 30°) =$$
$$= \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Синус разности
$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

Для вывода формулы косинуса суммы двух углов воспользуемся формулами приведения и получим: $\cos(\alpha+\beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) = \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right).$

Тогда по формуле синуса разности двух углов имеем:

$$\sin\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta - \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Получили формулу **косинуса суммы двух углов:**

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Применим полученную формулу и вычислим, например, $\cos 105°$.

$$\cos 105° = \cos(60° + 45°) =$$
$$= \cos 60° \cos 45° - \sin 60° \sin 45° =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$$

Косинус суммы
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

Представив разность $\alpha - \beta$ в виде суммы $\alpha + (-\beta)$, можно получить формулу **косинуса разности двух углов:**

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Найдем, например, $\cos 15°$.

Косинус разности
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) =$$
$$= \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Пример 1. Вычислите:

а) $\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}$; б) $\sin\frac{5\pi}{18}\cos\frac{\pi}{36} - \cos\frac{5\pi}{18}\sin\frac{\pi}{36}$;

в) $\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9} - \sin\frac{7\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}$; г) $\cos\frac{\pi}{30}\cos\frac{\pi}{5} + \sin\frac{\pi}{30}\sin\frac{\pi}{5}$.

Решение. Применим полученные формулы «справа налево»:

а) $\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12}\right) = \sin\frac{6\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$;

б) $\sin\frac{5\pi}{18}\cos\frac{\pi}{36} - \cos\frac{5\pi}{18}\sin\frac{\pi}{36} = \sin\left(\frac{5\pi}{18} - \frac{\pi}{36}\right) = \sin\frac{9\pi}{36} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9} - \sin\frac{7\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9} = \cos\left(\frac{7\pi}{9} + \frac{2\pi}{9}\right) = \cos\pi = -1$;

г) $\cos\frac{\pi}{30}\cos\frac{\pi}{5} + \sin\frac{\pi}{30}\sin\frac{\pi}{5} = \cos\left(\frac{\pi}{30} - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(-\frac{5\pi}{30}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Выведем формулы тангенса суммы и тангенса разности двух углов.

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}.$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на $\cos\alpha\cos\beta$, $\cos\alpha \neq 0$, $\cos\beta \neq 0$, тогда:

$$\frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Таким образом, получили формулу **тангенса суммы двух углов:**

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Воспользуемся формулой тангенса суммы и вычислим, например, $\operatorname{tg} 105°$.

$$\operatorname{tg}105° = \operatorname{tg}(60° + 45°) = \frac{\operatorname{tg}60° + \operatorname{tg}45°}{1 - \operatorname{tg}60°\operatorname{tg}45°} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(1-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} = -2-\sqrt{3}.$$

Тангенс суммы

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

Представив разность $\alpha - \beta$ в виде суммы $\alpha + (-\beta)$, можно получить формулу **тангенса разности двух углов:**

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Найдем, например, $\operatorname{tg} 15°$.

$$\operatorname{tg}15° = \operatorname{tg}(60° - 45°) = \frac{\operatorname{tg}60° - \operatorname{tg}45°}{1 + \operatorname{tg}60°\operatorname{tg}45°} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = 2-\sqrt{3}.$$

Пример 2. Вычислите:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{2\pi}{15} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{5}}{1 - \operatorname{tg}\frac{2\pi}{15}\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}}$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{7\pi}{16} - \operatorname{tg}\frac{3\pi}{16}}{1 + \operatorname{tg}\frac{7\pi}{16}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{16}}$.

Тангенс разности

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

Решение. Применим формулы тангенса суммы и тангенса разности «справа налево»:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{2\pi}{15} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{5}}{1 - \operatorname{tg}\frac{2\pi}{15}\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}} = \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{15} + \frac{\pi}{5}\right) = \operatorname{tg}\frac{5\pi}{15} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$;

б) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{7\pi}{16} - \operatorname{tg}\frac{3\pi}{16}}{1 + \operatorname{tg}\frac{7\pi}{16}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{16}} = \operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{16} - \frac{3\pi}{16}\right) = \operatorname{tg}\frac{4\pi}{16} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1.$

Полученные формулы синуса суммы, синуса разности, косинуса суммы, косинуса разности, тангенса суммы, тангенса разности двух углов называют **формулами сложения.**

Примеры основных заданий и их решения

1. С помощью формул сложения преобразуйте выражение:

а) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$; б) $\operatorname{tg}(45° + \alpha)$.

Решение. а) По формуле синуса разности получим:

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\alpha\cos\frac{\pi}{6} - \cos\alpha\sin\frac{\pi}{6} =$$

$$= \sin\alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos\alpha \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2}\cos\alpha.$$

б) Применим формулу тангенса суммы:

$$\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) = \frac{\operatorname{tg}45^\circ + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha}.$$

2. Найдите значение выражения:

а) $\sin 56^\circ\cos 34^\circ + \cos 56^\circ\sin 34^\circ$; б) $\cos 28^\circ\cos 88^\circ - \sin 88^\circ\sin 208^\circ$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}20^\circ + \operatorname{ctg}155^\circ}{1 + \operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}65^\circ}$.

Решение. а) По формуле синуса суммы получим:

$$\sin 56^\circ\cos 34^\circ + \cos 56^\circ\sin 34^\circ = \sin(56^\circ + 34^\circ) = \sin 90^\circ = 1.$$

б) По формулам приведения получим, что

$$\sin 208^\circ = \sin(180^\circ + 28^\circ) = -\sin 28^\circ.$$

Тогда $\cos 28^\circ\cos 88^\circ - \sin 88^\circ\sin 208^\circ =$

$$= \cos 28^\circ\cos 88^\circ - \sin 88^\circ(-\sin 28^\circ) = \cos 28^\circ\cos 88^\circ + \sin 88^\circ\sin 28^\circ.$$

Воспользуемся формулой косинуса разности и получим:

$$\cos 28^\circ\cos 88^\circ + \sin 88^\circ\sin 28^\circ = \cos(28^\circ - 88^\circ) = \cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

в) По формулам приведения $\operatorname{ctg}155^\circ = \operatorname{ctg}(90^\circ + 65^\circ) = -\operatorname{tg}65^\circ$.

Тогда $\dfrac{\operatorname{tg}20^\circ + \operatorname{ctg}155^\circ}{1 + \operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}65^\circ} = \dfrac{\operatorname{tg}20^\circ - \operatorname{tg}65^\circ}{1 + \operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}65^\circ}$.

По формуле тангенса разности:

$$\frac{\operatorname{tg}20^\circ - \operatorname{tg}65^\circ}{1 + \operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}65^\circ} = \operatorname{tg}(20^\circ - 65^\circ) = \operatorname{tg}(-45^\circ) = -\operatorname{tg}45^\circ = -1.$$

3. Вычислите:

а) $\sin\dfrac{7\pi}{12}$; б) $\operatorname{tg}\dfrac{23\pi}{12}$.

Решение. а) $\sin\dfrac{7\pi}{12} = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4} + \cos\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4} =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

б) По формулам приведения: $\operatorname{tg}\frac{23\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{12}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$.

По формуле тангенса разности получим:

$$-\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = -\frac{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2}{\left(1 + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3} - 1\right)} =$$

$$= -\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} - 2.$$

Таким образом, $\operatorname{tg}\frac{23\pi}{12} = \sqrt{3} - 2$.

4. Упростите выражение:

а) $\sin(-\alpha)\sin\beta - \cos(\alpha + \beta)$; б) $\cos\alpha - \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

Решение. а) Воспользуемся нечетностью синуса и формулой косинуса разности:

$$\sin(-\alpha)\sin\beta - \cos(\alpha + \beta) = -\sin\alpha\sin\beta - (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) =$$

$$= -\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = -\cos\alpha\cos\beta.$$

б) Применим формулу косинуса разности и получим:

$$\cos\alpha - \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos\alpha - \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right) =$$

$$= \cos\alpha - \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right) = \cos\alpha - \cos\alpha - \sin\alpha = -\sin\alpha.$$

5. Решите уравнение $\cos 5x \sin 8x = \cos 8x \sin 5x$.

Решение. Запишем уравнение в виде $\sin 8x \cos 5x - \cos 8x \sin 5x = 0$ и по формуле синуса разности получим: $\sin(8x - 5x) = 0$; $\sin 3x = 0$; $3x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}$.

6. Вычислите $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$, если $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Решение. Применим формулу косинуса разности:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha).$$

Из основного тригонометрического тождества выразим $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ и найдем $\cos\alpha$. Так как $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, то $\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$. Значит, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ или $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$. Поскольку $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, т. е. α — угол второй четверти, то $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$. Тогда $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\right) = \frac{\sqrt{2}}{10}$.

7. Докажите тождество $\dfrac{\sqrt{3}\sin\alpha + 2\cos(60° + \alpha)}{2\sin(60° + \alpha) + \sqrt{3}\cos\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$.

Решение. Воспользуемся формулами сложения и получим:

$$\frac{\sqrt{3}\sin\alpha + 2\cos(60° + \alpha)}{2\sin(60° + \alpha) - \sqrt{3}\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}\sin\alpha + 2(\cos 60°\cos\alpha - \sin 60°\sin\alpha)}{2(\sin 60°\cos\alpha + \cos 60°\sin\alpha) - \sqrt{3}\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\sin\alpha + 2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\right) - \sqrt{3}\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha}{\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

8. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{\cos 310°\cos 50° + \sin 310°\sin 50°}{\sin 390°\cos 20° - \cos 390°\sin 20°}$;

б) $\dfrac{\cos 67° \cdot \cos 7° - \cos 83°\cos 23°}{\cos 128°\sin 68° + \cos 38°\sin 22°}$.

Решение. а) $\dfrac{\cos 310°\cos 50° + \sin 310°\sin 50°}{\sin 390°\cos 20° - \cos 390°\sin 20°} = \dfrac{\cos(310° - 50°)}{\sin(390° - 20°)} = \dfrac{\cos 260°}{\sin 370°} =$

$$= \frac{\cos(270° - 10°)}{\sin(360° + 10°)} = \frac{-\sin 10°}{\sin 10°} = -1;$$

б) $\dfrac{\cos 67°\cos 7° - \cos 83°\cos 23°}{\cos 128°\sin 68° + \cos 38°\sin 22°} = \dfrac{\cos(90° - 23°)\cos 7° - \cos(90° - 7°)\cos 23°}{\cos(90° + 38°)\sin(90° - 22°) + \cos 38°\sin 22°} =$

$$= \frac{\sin 23°\cos 7° - \sin 7°\cos 23°}{-\sin 38°\cos 22° + \cos 38°\sin 22°} = \frac{\sin(23° - 7°)}{\sin(22° - 38°)} = \frac{\sin 16°}{\sin(-16°)} = \frac{\sin 16°}{-\sin 16°} = -1.$$

9. Найдите множество значений функции

$$f(x) = \sin 7x\cos 5x - \cos 7x\sin 5x + 5.$$

Решение. Применим формулу синуса разности и запишем функцию в виде $f(x) = \sin(7x - 5x) + 5$, или $f(x) = \sin 2x + 5$.

Так как $-1 \leqslant \sin 2x \leqslant 1$, то $-1 + 5 \leqslant \sin 2x + 5 \leqslant 1 + 5$. Таким образом, имеем: $4 \leqslant \sin 2x + 5 \leqslant 6$, т. е. $E(f) = [4;\ 6]$.

Выберите равенство, верное для любых углов α и β:
а) $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha - \sin\beta$;
б) $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha - \cos\beta$;
в) $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$;
г) $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta$.

1.410. С помощью формул сложения преобразуйте выражение:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$; б) $\cos(30° + \alpha)$; в) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

1.411. Вычислите, используя формулы сложения:

а) $\sin 46° \cos 44° + \sin 44° \cos 46°$; б) $\cos 17° \cos 43° - \sin 17° \sin 43°$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg} 26° + \operatorname{tg} 19°}{1 - \operatorname{tg} 19° \operatorname{tg} 26°}$.

1.412. Упростите выражение:

а) $\sin(\alpha - \beta) - \cos(-\alpha)\sin(-\beta)$; б) $\cos(\alpha + \beta) + \sin(-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)$.

1.413. Вычислите значение выражения, приведя его к синусу (косинусу) суммы (разности):

а) $\sin 97° \sin 37° + \cos 37° \cos 97°$; б) $\sin 53° \cos 7 - \cos 53° \sin(-7°)$;
в) $\sin(-75°)\cos 15° + \cos 75° \sin 15°$.

1.414. Вычислите:

а) $\sin 75°$; б) $\cos 105°$; в) $\operatorname{tg} 15°$.

1.415. Решите уравнение:

а) $\sin x \sin 3x = \cos 3x \cos x$; б) $\sin x \cos\dfrac{5x}{2} = \cos x \sin\dfrac{5x}{2}$;

в) $\sin 2x \cos 3x - \cos 2x \sin 3x = \dfrac{1}{2}$; г) $\dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

1.416. Вычислите $\sin(60° + \alpha)$, используя формулу синуса суммы, если $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$ и $630° < \alpha < 720°$.

1.417. Вычислите, преобразуя выражение с помощью формул сложения:

а) $\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{5\pi}{28}-\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{28}$; б) $\sin\frac{14\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{14\pi}{9}\sin\left(-\frac{2\pi}{9}\right)$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{18}+\operatorname{tg}\frac{5\pi}{18}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{18}\operatorname{tg}\frac{5\pi}{18}-1}$.

1.418. Упростите выражение, используя формулы сложения и значения тригонометрических функций:

а) $\frac{1}{2}\cos\alpha-\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$; б) $2\cos(60^\circ-\alpha)-\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha$.

1.419. Упростите выражение $\cos(120^\circ+\alpha)+\cos(\alpha-60^\circ)$.

1.420. Найдите множество значений функции

$f(x)=\cos x\cos 4x-\sin x\sin 4x-5$.

1.421. Рациональным или иррациональным числом является значение выражения:

а) $\dfrac{\sin 40^\circ\sin 5^\circ-\cos 40^\circ\cos 5^\circ}{\sin 20^\circ\cos 40^\circ+\sin 40^\circ\cos 20^\circ}$; б) $\dfrac{\cos 120^\circ\cos 50^\circ+\sin 120^\circ\sin 50^\circ}{\cos 25^\circ\cos 45^\circ-\sin 25^\circ\sin 45^\circ}$?

1.422. Найдите значение выражения:

а) $\cos(\alpha+\beta)$, если $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\sin\beta=-\frac{5}{13}$, причем $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$;

б) $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=-2$.

1.423. Решите уравнение:

а) $\sin 5x\sin\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)-\cos 5x\sin 4x=1$;

б) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\cos x+\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\sin 6x\cos x-\sin\left(\frac{\pi}{2}+6x\right)\sin x=1$;

г) $\cos\frac{7x}{9}\cos\frac{10x}{9}-\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{7x}{9}\right)\sin\frac{10x}{9}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.424. Докажите тождество:

а) $\sin\alpha\cos 4\alpha-\cos\alpha\sin 4\alpha=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-3\alpha\right)$;

б) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\alpha-\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\sin\alpha=\frac{1}{2}$;

в) $\dfrac{\sqrt{2}\sin(\beta-45^\circ)+\cos\beta}{\sqrt{2}\cos(\beta+45^\circ)+\sin\beta}=\operatorname{tg}\beta$.

1.425. Найдите нули функции:

а) $y = \cos 6x \cos 5x + \sin 6x \sin 5x + 1$;

б) $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\cos x + \sin 2x \sin(\pi + x) + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.426. Постройте график функции

$$y = \cos 2x \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\sin 2x.$$

1.427. Вычислите:

а) $\cos 57°30' \cos 27°30' + \sin 57°30' \sin 27°30'$;

б) $\sin 200° \sin 310° + \cos 340° \cos 50°$;

в) $\frac{\operatorname{tg} 161° + \operatorname{tg} 319°}{1 + \operatorname{tg} 161° \operatorname{ctg} 49°}$.

1.428. Упростите выражение:

а) $\frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$; б) $\frac{\cos\alpha \cos\beta - \cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - \sin\alpha \sin\beta}$.

1.429. Вычислите значение тригонометрической функции, используя формулы приведения и формулы сложения:

а) $\sin 195°$; б) $\operatorname{tg} 285°$.

1.430. Найдите значение выражения $\frac{\cos\frac{7\pi}{24}\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{7\pi}{24}}{\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{10} + \cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{10}}$.

1.431. Докажите тождество $\frac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \sqrt{3}\sin\alpha} = -\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$.

1.432. Вычислите $\frac{\sin 56° \sin 124° - \sin 34° \cos 236°}{\cos 28° \cos 88° + \cos 178° \sin 208°}$.

1.433. Упростите выражение:

а) $\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$; б) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.

1.434. Известно, что α и β — углы второй четверти и $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$. Найдите $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.

1.435*. Найдите сумму корней уравнения $\sin 3x \cos 2x = \cos 3x \sin 2x$, принадлежащих промежутку $[-\pi; \pi]$.

1.436*. Найдите $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$, если известно, что $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

1.437. Вычислите, используя формулы сложения:

а) $\sin 61^\circ \cos 31^\circ - \sin 31^\circ \cos 61^\circ$; б) $\cos 29^\circ \cos 74^\circ + \sin 29^\circ \sin 74^\circ$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg} 1^\circ - \operatorname{tg} 46^\circ}{1 + \operatorname{tg} 1^\circ \operatorname{tg} 46^\circ}$.

1.438. Упростите выражение:

а) $\cos(\alpha + \beta) + \sin(-\alpha)\sin(-\beta)$; б) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) - \cos(\alpha - \beta)$.

1.439. Вычислите, представив угол в виде суммы или разности:

а) $\sin 105^\circ$; б) $\cos 15^\circ$; в) $\operatorname{tg} 75^\circ$.

1.440. Составьте план и решите уравнение:

а) $\sin x \cos \frac{x}{2} = -\sin \frac{x}{2} \cos x$; б) $\sin 5x \cos x - \cos 5x \sin x = \frac{1}{2}$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg} 5x - \operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg} 5x \operatorname{tg} 2x} = 1$.

1.441. Вычислите, используя формулы сложения:

а) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$, если $\cos\alpha = 0{,}6$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

б) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$, если $\sin\alpha = \frac{8}{17}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

1.442. Рациональным или иррациональным числом является значение выражения:

а) $\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{10} + \sin\frac{3\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}$; б) $\sin\frac{8\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9}\sin\left(-\frac{2\pi}{9}\right)$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{14} - \operatorname{tg}\frac{9\pi}{28}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{14}\operatorname{tg}\frac{9\pi}{28}}$?

1.443. Упростите выражение:

а) $\frac{1}{2}\sin\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$; б) $\sin\alpha - \cos\alpha - \sqrt{2}\sin(45^\circ - \alpha)$.

1.444. Найдите множество значений функции
$f(x) = \sin 7x \cos 2x + \cos 7x \sin 2x + 8$.

1.445. Вычислите:

а) $\dfrac{\sin 17^\circ \cos 13^\circ + \sin 13^\circ \cos 17^\circ}{\cos 20^\circ \cos 25^\circ - \sin 20^\circ \sin 25^\circ}$; б) $\dfrac{\sin 5^\circ \cos 15^\circ + \cos 5^\circ \cos 15^\circ}{\cos 80^\circ \cos 150^\circ + \sin 80^\circ \sin 150^\circ}$.

1.446. Найдите значение выражения:

а) $\sin(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\sin\beta=-\frac{5}{13}$, причем α и β — углы одной четверти;

б) $\operatorname{tg}\beta$, если известно, что $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=-1$, $\operatorname{tg}\alpha=3$.

1.447. Решите уравнение, приведя его с помощью формул сложения к простейшему:

а) $\cos 4x\cos 3x+\sin 4x\sin 3x=1$;

б) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\cos x-\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.448. Найдите все корни уравнения $\cos 5x\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+\sin 5x\sin 2x=\frac{1}{2}$.

1.449. Докажите тождество:

а) $\sin 6\alpha\sin\alpha-\cos 6\alpha\cos\alpha=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+7\alpha\right)$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\cos\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\alpha=\frac{1}{2}$;

в) $\frac{2\sin(\alpha+30^\circ)-\cos\alpha}{2\cos(\alpha-30^\circ)-\sqrt{3}\cos\alpha}=\sqrt{3}$.

1.450. Найдите нули функции:

а) $y=\sin 3x\cos 5x-\cos 3x\sin 5x+1$;

б) $y=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+4x\right)\cos 3x+\cos 4x\sin 3x$.

1.451. Постройте график функции

$$y=\sin 3x\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\cos 3x.$$

1.452. Вычислите:

а) $\cos 19^\circ 30'\cos 25^\circ 30'-\sin 19^\circ 30'\sin 25^\circ 30'$;

б) $\sin 113^\circ\cos 323^\circ+\cos 247^\circ\cos 307^\circ$;

в) $\frac{\operatorname{tg} 273^\circ-\operatorname{ctg} 207^\circ}{1-\operatorname{ctg} 3^\circ\operatorname{tg} 63^\circ}$.

1.453. Упростите выражение $\frac{2\cos\alpha\sin\beta+\sin(\alpha-\beta)}{2\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)}$.

1.454. Вычислите $\cos 255^\circ$.

1.455. Вычислите $\dfrac{\sin\frac{7\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}-\cos\frac{7\pi}{24}\sin\frac{\pi}{24}}{\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{21}-\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{21}}$.

1.456. Докажите тождество $\dfrac{\cos\alpha-\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}\sin\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha$.

1.457. Вычислите: $\dfrac{\sin 22^\circ \cos 8^\circ + \cos 158^\circ \cos 98^\circ}{\sin 23^\circ \cos 7^\circ + \cos 157^\circ \cos 97^\circ}$.

1.458. Упростите выражение $\sin\left(\alpha + \dfrac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right)$.

1.459*. Найдите сумму корней уравнения $\sin 5x \cos 2x = \cos 5x \sin 2x$, принадлежащих промежутку $(0; \pi)$.

1.460*. Найдите $\operatorname{tg}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)$, если известно, что $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ и $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

1.461. Представьте трехчлен $49a^2 - 14ab + b^2$ в виде квадрата двучлена.

1.462. Решите уравнение $\dfrac{3x-2}{5} = \dfrac{x+1}{2} - \dfrac{3-7x}{10}$.

1.463. Упростите выражение $\dfrac{\left(a^3\right)^{-2} \cdot \left(a^{-7}\right)^{-1}}{\left(a^{-2}\right)^{-2} : \left(a^{-1}\right)^4}$.

1.464. Найдите значение выражения $\sin\alpha - \sin 2\alpha$ при $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

1.465. С помощью метода интервалов решите неравенство $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x+3)^2} \geqslant 0$.

1.466. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $5;\ 1;\ \dfrac{1}{5};\ \ldots$.

1.467. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y = x^2 - 16x + 25$ и $y = x - 5$.

1.468. Внесите множитель под знак корня:

а) $\dfrac{2}{3}\sqrt{18}$; б) $\dfrac{1}{b}\sqrt{b}$; в) $x\sqrt{a^2}$, если $x < 0$;

г) $(7-a)\sqrt{\dfrac{1}{a-7}}$; д) $x\sqrt{-x^3}$.

§ 11. Формулы двойного аргумента

1.469. Сравните значения выражений $\sin 30^\circ$ и $\sin 60^\circ$.

1.470. Верно ли, что $\cos 120^\circ > \cos 60^\circ$?

1.471. Найдите значение выражения $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{3}$.

Преобразования тригонометрических выражений можно упростить, если рассмотреть частные случаи общих формул.

Рассмотрим формулу синуса суммы $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ для случая $\alpha=\beta$. Тогда $\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=$ $=2\sin\alpha\cos\alpha$.

Получили формулу **синуса двойного аргумента:** $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

Выведем формулу косинуса двойного аргумента. Используем формулу косинуса суммы $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ для случая $\alpha=\beta$ и получим:

$$\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

Формула **косинуса двойного аргумента:** $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

Для вывода формулы тангенса двойного аргумента рассмотрим формулу тангенса суммы $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ при $\alpha=\beta$. В этом случае имеем:

$$\operatorname{tg}2\alpha=\operatorname{tg}(\alpha+\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha}=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Получили формулу **тангенса двойного аргумента:** $\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

Пример 1. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$; б) $\sin^2\alpha+\cos 2\alpha$; в) $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha\cdot(\operatorname{tg}^2\alpha-1)$.

Решение. Применим формулы двойного аргумента:

а) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}=2\cos\alpha$;

б) $\sin^2\alpha+\cos 2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$;

в) $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha\cdot(\operatorname{tg}^2\alpha-1)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot(\operatorname{tg}^2\alpha-1)=$

$=-\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}\cdot(\operatorname{tg}^2\alpha-1)=-\operatorname{tg}\alpha$.

Формулы двойного аргумента

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

Пример 2. Вычислите:

а) $2\sin 15^\circ\cos 15^\circ$; б) $\cos^2\dfrac{\pi}{8}-\sin^2\dfrac{\pi}{8}$; в) $\dfrac{2\operatorname{tg}75^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 75^\circ}$.

Решение. Применим формулы двойного аргумента «справа налево»:

а) $2\sin 15^\circ\cos 15^\circ=\sin(2\cdot 15^\circ)=\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$;

б) $\cos^2\dfrac{\pi}{8}-\sin^2\dfrac{\pi}{8}=\cos\left(2\cdot\dfrac{\pi}{8}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\dfrac{2\operatorname{tg}75^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 75^\circ}=\operatorname{tg}(2\cdot 75^\circ)=\operatorname{tg}150^\circ=\operatorname{tg}(180^\circ-30^\circ)=-\operatorname{tg}30^\circ=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Пример 3. Найдите значение выражения $\sin 120°$ двумя способами.

Решение. Первый способ. Применим формулы приведения:

$$\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Второй способ. Применим формулу синуса двойного аргумента:

$$\sin 120° = \sin(2 \cdot 60°) = 2\sin 60° \cos 60° = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Примеры основных заданий и их решения

1. Представьте данный угол в виде $2t$:

а) $30°$; б) $45°$; в) β; г) 3β; д) π; е) $\frac{\pi}{16}$.

Решение.

а) $30° = 2 \cdot 15°$; б) $45° = 2 \cdot 22{,}5°$; в) $\beta = 2 \cdot \frac{\beta}{2}$;

г) $3\beta = 2 \cdot \frac{3\beta}{2}$; д) $\pi = 2 \cdot \frac{\pi}{2}$; е) $\frac{\pi}{16} = 2 \cdot \frac{\pi}{32}$.

2. Преобразуйте каждое из выражений с помощью формул двойного угла:

а) $\sin 10\alpha$; б) $\sin 7\alpha$; в) $\cos 6\alpha$;

г) $\cos\frac{\alpha}{2}$; д) $\operatorname{tg} 3\alpha$; е) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$.

Решение. Представим угол в каждом из выражений в виде $2t$ и применим формулу двойного аргумента:

а) $\sin 10\alpha = \sin(2 \cdot 5\alpha) = 2\sin 5\alpha \cos 5\alpha$;

б) $\sin 7\alpha = \sin\left(2 \cdot \frac{7\alpha}{2}\right) = 2\sin\frac{7\alpha}{2}\cos\frac{7\alpha}{2}$;

в) $\cos 6\alpha = \cos(2 \cdot 3\alpha) = \cos^2 3\alpha - \sin^2 3\alpha$;

г) $\cos\frac{\alpha}{2} = \cos\left(2 \cdot \frac{\alpha}{4}\right) = \cos^2\frac{\alpha}{4} - \sin^2\frac{\alpha}{4}$;

д) $\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg}(2 \cdot 1{,}5\alpha) = \dfrac{2\operatorname{tg} 1{,}5\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 1{,}5\alpha}$;

е) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} = \operatorname{tg}\left(2 \cdot \frac{\alpha}{8}\right) = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{8}}$.

3. Упростите выражение:

а) $2\sin\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha$; б) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha}$; в) $\cos 6\alpha - \cos^2 3\alpha + \sin^2 3\alpha$;

г) $\cos 8\alpha + 2\sin^2 4\alpha$; д) $\dfrac{\operatorname{tg} 5\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 5\alpha}$; е) $\dfrac{6\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)}$.

Решение. Применим формулы двойного аргумента и получим:

а) $2\sin\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha = \sin 2\alpha - \sin 2\alpha = 0$;

б) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha} = \dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = \dfrac{2\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\operatorname{ctg}\alpha$;

в) $\cos 6\alpha - \cos^2 3\alpha + \sin^2 3\alpha = \cos 6\alpha - \left(\cos^2 3\alpha - \sin^2 3\alpha\right) =$

$= \cos 6\alpha - \cos(2\cdot 3\alpha) = \cos 6\alpha - \cos 6\alpha = 0$;

г) $\cos 8\alpha + 2\sin^2 4\alpha = \cos^2 4\alpha - \sin^2 4\alpha + 2\sin^2 4\alpha = \cos^2 4\alpha + \sin^2 4\alpha = 1$;

д) $\dfrac{\operatorname{tg} 5\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 5\alpha} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\operatorname{tg} 5\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 5\alpha} = \dfrac{1}{2}\cdot\operatorname{tg}(2\cdot 5\alpha) = \dfrac{1}{2}\cdot\operatorname{tg} 10\alpha$;

е) $\dfrac{6\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)} = 3\cdot\dfrac{2\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)} = 3\cdot\operatorname{tg}\left(2\cdot\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)\right) =$

$= 3\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) = 3\operatorname{ctg} 2\alpha$.

4. Найдите значение выражения:

а) $\sin 15^\circ\cos 15^\circ$; б) $1 - 2\sin^2\frac{\pi}{12}$;

в) $10\sin 75^\circ\cos 75^\circ$; г) $\dfrac{8\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8} - 1}$.

Решение. а) $\sin 15^\circ\cos 15^\circ = \dfrac{1}{2}\cdot 2\sin 15^\circ\cos 15^\circ = \dfrac{1}{2}\cdot\sin(2\cdot 15^\circ) =$

$= \dfrac{1}{2}\cdot\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$;

б) $1 - 2\sin^2\frac{\pi}{12} = \sin^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{\pi}{12} - 2\sin^2\frac{\pi}{12} = \cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12} =$

$= \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $10\sin 75^\circ \cos 75^\circ = 5 \cdot 2\sin 75^\circ \cos 75^\circ = 5 \cdot \sin(2 \cdot 75^\circ) = 5 \cdot \sin 150^\circ =$
$= 5 \cdot \sin(180^\circ - 30^\circ) = 5\sin 30^\circ = 5 \cdot \frac{1}{2} = 2{,}5;$

г) $\dfrac{8\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{8}}{\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{8} - 1} = 4 \cdot \dfrac{2\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{8}}{-\left(1 - \mathrm{tg}^2\frac{\pi}{8}\right)} = -4 \cdot \dfrac{2\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{8}}{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\pi}{8}} = -4 \cdot \mathrm{tg}\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) =$

$= -4 \cdot \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4} = -4 \cdot 1 = -4.$

5. Вычислите $\mathrm{tg}\,2\alpha$, если $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$.

Решение. Применим формулу тангенса двойного аргумента и получим: $\mathrm{tg}\,2\alpha = \dfrac{2\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha} = \dfrac{2 \cdot 2}{1 - 4} = -\dfrac{4}{3} = -1\dfrac{1}{3}.$

6. Вычислите:

а) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)^2;$ б) $1 - 8\sin^2\frac{17\pi}{16}\cos^2\frac{15\pi}{16}.$

Решение.

а) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)^2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos^2\frac{\pi}{8} + 2\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8}\right) =$
$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \left(1 + 2\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \left(1 + \sin\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1.$

б) По формулам приведения

$\sin^2\frac{17\pi}{16} = \sin^2\left(\pi + \frac{\pi}{16}\right) = \sin^2\frac{\pi}{16}$ и $\cos^2\frac{15\pi}{16} = \cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{16}\right) = \cos^2\frac{\pi}{16}.$

Тогда $1 - 8\sin^2\frac{\pi}{16}\cos^2\frac{\pi}{16} = 1 - 2 \cdot \left(2\sin\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{16}\right)^2 = 1 - 2 \cdot \left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^2 =$
$= 1 - 2 \cdot \sin^2\frac{\pi}{8} = \sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8} - 2\sin^2\frac{\pi}{8} = \cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

7. Вычислите $\mathrm{tg}\,2\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение. 1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$ $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha.$

Так как $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, то $\sin^2\alpha = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25};$ $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ или $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$. Поскольку $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то $\sin\alpha = \frac{4}{5}$.

2) $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$ $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{4}{5} : \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{3}.$

3) $\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$; $\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)}{1-\left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \dfrac{-\frac{8}{3}}{1-\frac{16}{9}} = -\dfrac{8}{3}\cdot\left(-\dfrac{9}{7}\right) = \dfrac{24}{7} = 3\dfrac{3}{7}$.

Ответ: $3\frac{3}{7}$.

8. Решите уравнение $\sin 2x - \sin x = 2\cos x - 1$.

Решение. Используем формулу синуса двойного аргумента:

$\sin 2x - \sin x = 2\cos x - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x - \sin x - (2\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x - 2\cos x - \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos x(\sin x - 1) - (\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x - 1 = 0, \\ \sin x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2}, \\ \sin x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

9. Решите уравнение $\cos^2 x - 7\sin^2 x = 3\sin 2x$.

Решение. Воспользуемся формулой синуса двойного угла и получим $\cos^2 x - 7\sin^2 x = 6\sin x\cos x$, или $7\sin^2 x + 6\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$. Так как значения переменной, при которых $\cos x = 0$, не являются корнями данного уравнения, то разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$ и получим $7\operatorname{tg}^2 x + 6\operatorname{tg} x - 1 = 0$.
Пусть $t = \operatorname{tg} x$, тогда уравнение примет вид $7t^2 + 6t - 1 = 0$;
$D = 36 - 4\cdot 7\cdot(-1) = 64$;

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{7}, \\ t = -1, \end{array}\right. \text{ откуда } \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}x = \frac{1}{7}, \\ \operatorname{tg}x = -1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};\ -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

10*. Докажите тождество $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$.

Решение. Умножим и разделим выражение $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$ на $2\sin\frac{\pi}{7}$ и применим формулу синуса двойного аргумента:

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}=\frac{\left(2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\right)\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{2\cdot 2\sin\frac{\pi}{7}}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{2\cdot 2\cdot 2\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)}{8\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{8}.$$

Выберите равенство, верное для любого угла β:
а) $\sin 2\beta = 2\sin\beta$; б) $\sin 2\beta = \sin^2\beta$; в) $\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta$; г) $\sin 2\beta = 2\cos\beta$.

1.472. С помощью формулы синуса двойного угла упростите выражение:

а) $2\sin 3\alpha\cos 3\alpha$; б) $\sin\alpha\cos\alpha$; в) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$;

г) $\frac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha}$; д) $\frac{\sin 2\alpha - 2\sin\alpha}{\cos\alpha - 1}$; е) $\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

1.473. С помощью формулы косинуса двойного угла упростите выражение:

а) $\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$; б) $\sin^2 5\alpha - \cos^2 5\alpha$;

в) $\cos^2(\pi-\alpha)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; г) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$;

д) $\frac{\cos 2\alpha + 1}{2\cos\alpha}$; е) $\frac{\cos 2\alpha - \sin^2\alpha}{2\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$.

1.474. С помощью формулы тангенса двойного угла упростите выражение:

а) $\frac{2\operatorname{tg}7\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 7\alpha}$; б) $\frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$;

в) $\operatorname{tg}2\alpha(\operatorname{tg}^2\alpha-1)$; г) $\operatorname{tg}4\alpha\operatorname{ctg}2\alpha$.

1.475. Найдите значение выражения, используя формулы двойных углов:

а) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$; б) $6\sin 15^\circ\cos 15^\circ$; в) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$;

г) $\sin^2\frac{\pi}{8}-\cos^2\frac{\pi}{8}$; д) $\frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}{\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12}-1}$; е) $\frac{2\operatorname{tg}165^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 165^\circ}$.

1.476. Найдите:

а) $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0,6$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

б) $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{2}{9}$.

1.477. Используйте формулы двойных углов и решите уравнение:

а) $4\sin x\cos x = -\sqrt{3}$;

б) $\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 = 1,5$;

г) $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos^2(x - \pi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

д) $\sin 2x = \sin x$;

е) $\sqrt{2}\sin^2 x + 1 = \sqrt{2}\cos^2 x$.

1.478. Найдите значение выражения:

а) $2\sin 67,5^\circ \cos 67,5^\circ$;

б) $8\cos 165^\circ \sin 165^\circ$;

в) $\cos 15^\circ \cos 75^\circ$;

г) $\cos^2 210^\circ - \sin^2 210^\circ$;

д) $2\cos^2 15^\circ - 1$;

е) $1 - 2\sin^2\frac{\pi}{8}$;

ж) $\frac{6\,\mathrm{tg}\,15^\circ}{1 - \mathrm{tg}^2 15^\circ}$;

з) $\frac{\mathrm{tg}\,22^\circ30'}{1 - \mathrm{tg}^2 22^\circ30'}$;

и) $\frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\pi}{12}}{\mathrm{tg}\frac{\pi}{12}}$.

1.479. Докажите тождество:

а) $1 - (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \sin 2\alpha$;

б) $2\sin^2 2\alpha + \cos 4\alpha = 1$;

в) $\frac{2\sin^2\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \mathrm{tg}\,2\alpha$.

1.480. Решите уравнение:

а) $\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x = 0$;

б) $\sin 2x = 2\sqrt{3}\sin^2 x$;

в) $2\sin x + \sin 2x = \cos x + 1$;

г) $\cos 2x + \sin^2 x = \cos x$;

д) $\cos 2x = \sin x$;

е) $1 + \cos 2x = 2\cos x$.

1.481. Упростите выражение:

а) $\frac{\sin 8\alpha}{\sin 4\alpha} - 2\cos^2 2\alpha$;

б) $\frac{\mathrm{tg}\,2\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha} - \mathrm{tg}\,2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha$;

в) $\cos^2 2\alpha + 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

г) $\cos^2(5\pi - \alpha) + \mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \sin 2\alpha$;

д) $\cos(\pi + 2\alpha) + \sin(\pi + 2\alpha)\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$;

е) $\frac{\cos^2(2\pi + \alpha) - \sin^2(\alpha - \pi)}{2\cos(\alpha + 2\pi)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$.

1.482. Постройте график функции $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

1.483. Найдите все корни уравнения $\sin^4\frac{x}{2} - \cos^4\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$.

1.484. Упростите выражение:

а) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 - 1 + 4\sin 2\alpha$; б) $\left(\sin\frac{\alpha}{4} + \cos\frac{\alpha}{4}\right)\left(\sin\frac{\alpha}{4} - \cos\frac{\alpha}{4}\right)$;

в) $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)\sin 2\alpha$; г) $\dfrac{1 - \operatorname{ctg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}$.

1.485. Найдите значение выражения:

а) $(\sin 75° - \cos 75°)^2$; б) $\dfrac{\sin 15°}{\sin 5°} - \dfrac{\cos 15°}{\cos 5°}$;

в) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}$; г) $\sin 75°\sin 15°$.

1.486. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций:

а) $y = \sin^2 x$ и $y = \cos^2 x$; б) $y = 3\cos x$ и $y = 6\sin 2x$.

1.487. Найдите значение выражения $\dfrac{2\sin 2\alpha - 3\cos 2\alpha}{4\sin 2\alpha + 5\cos 2\alpha}$, если известно, что $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

1.488. Найдите $\sin 2\alpha$, если известно, что $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}$.

1.489. Решите уравнение:

а) $\cos x\sin(-x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$; б) $\cos 2x = 2\sin x - 1{,}5$;

в) $\cos^2 x + 4\sin^2 x = 2\sin 2x$; г) $(\sin x + \cos x)^2 = \cos 2x$.

1.490. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\cos 6\alpha}{\cos 2\alpha} - \dfrac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha} + 2$; б) $\cos^3\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha\cos\alpha$;

в) $\sin^2(\pi - \alpha)\cos^2(\pi + \alpha) - \frac{1}{4}\sin^2\left(2\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)$.

1.491. Найдите значение выражения:

а) $(\sin 15° + \cos 15°)^2$; б) $\sin^3\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} + \cos^3\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}$.

1.492. Докажите, что значение выражения $\dfrac{2\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\sin(\pi - \alpha) + \cos 2\alpha - 1}{\cos 2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha}$ не зависит от α.

1.493. Решите уравнение:

а) $\sin x\cos x\cos 2x = -\frac{1}{8}$; б) $3\sin^2 x - 2\sin 2x + 5\cos^2 x = 2$.

1.494. Докажите тождество $\dfrac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

1.495. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{4\sin 25°\sin 65°}{\cos 40°}$; б) $\dfrac{10\cos 10°}{\sin 40°\sin 230°}$; в)* $\cos 20°\cos 40°\cos 80°$.

1.496. Упростите выражение, используя формулы двойных углов:

а) $2\sin 6\alpha \cos 6\alpha$; б) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; в) $\frac{2\cos^2\alpha}{\sin 2\alpha}$;

г) $\frac{\sin 2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$; д) $\cos^2 3\alpha - \sin^2 3\alpha$; е) $\sin^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}$;

ж) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha$; з) $(1+\cos 2\alpha)\,\mathrm{tg}\,\alpha$; и) $\frac{2\,\mathrm{tg}\,4\alpha}{1-\mathrm{tg}^2 4\alpha}$;

к) $\frac{2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{1-\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$; л) $\mathrm{tg}\,2\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha$.

1.497. Найдите значение выражения:

а) $2\sin 22{,}5^\circ \cos 22{,}5^\circ$; б) $\cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ$; в) $\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{8}}$.

1.498. Найдите:

а) $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}6$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; б) $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{1}{7}$.

1.499. Воспользуйтесь формулами двойных углов и решите уравнение:

а) $\sin x \cos x = 0{,}25$; б) $\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$;

в) $7\cos x + 2\sin 2x = 0$; г) $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\sin^2(x-\pi)=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

д) $(\sin x + \cos x)^2 = 1$; е) $2\sin^2 x = 2\cos^2 x + \sqrt{3}$.

1.500. Найдите значение выражения:

а) $4\sin 75^\circ \cos 75^\circ$; б) $2\cos^2 15^\circ\,\mathrm{tg}\,15^\circ$; в) $2\cos^2 75^\circ - 1$;

г) $1-2\sin^2\frac{\pi}{12}$; д) $\frac{2\,\mathrm{tg}\,105^\circ}{\mathrm{tg}^2 105^\circ - 1}$; е) $\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{8}}{\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}}$.

1.501. Докажите тождество:

а) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - \sin 2\alpha = 1$; б) $2\cos^2 2\alpha - \cos 4\alpha = 1$;

в) $\frac{2\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = -\mathrm{tg}\,2\alpha$.

1.502. Решите уравнение:

а) $\cos^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x = 0$; б) $\sqrt{3}\sin 2x = 2\sin^2 x$;

в) $2\sin x - \sin 2x = \cos x - 1$; г) $\sin^4 x - \cos^4 x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

д) $\cos 2x = \cos x$; е) $1 - \cos 2x = 2\sin x$.

1.503. Упростите выражение:

а) $\dfrac{1+\sin\alpha}{2\cos\alpha+\sin 2\alpha}$; б) $\cos 2\alpha + \operatorname{tg}\alpha \sin 2\alpha$;

в) $2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)$; г) $\dfrac{2\sin(\pi-\alpha)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)-\sin^2(\alpha-\pi)}$.

1.504. Постройте график функции $y=\sin^2\dfrac{x}{2}-\cos^2\dfrac{x}{2}$.

1.505. Упростите выражение:

а) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+1-\sin 2\alpha$; б) $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$;

в) $\operatorname{ctg}\alpha \sin 2\alpha - \cos 2\alpha$.

1.506. Найдите значение выражения:

а) $\operatorname{tg}15^\circ+\operatorname{ctg}15^\circ$; б) $\sin^4 15^\circ-\cos^4 15^\circ$.

1.507. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y=5\cos x$ и $y=\sin 2x$.

1.508. Найдите $\dfrac{3\sin 2\alpha-4\cos 2\alpha}{5\cos 2\alpha-\sin 2\alpha}$, если известно, что $\operatorname{tg}\alpha=3$.

1.509. Найдите $\sin 2\alpha$, если известно, что $\sin\alpha-\cos\alpha=-\dfrac{1}{3}$.

1.510. Решите уравнение:

а) $\sin x\cos(-x)=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$; б) $1+\cos x+\cos 2x=0$;

в) $\sin^2 x-2\sin 2x=5\cos^2 x$; г) $(\sin x-\cos x)^2=\cos 2x$.

1.511. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sin 9\alpha}{\sin 3\alpha}-\dfrac{\cos 9\alpha}{\cos 3\alpha}-2$; б) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}$;

в) $8\sin^2(\pi-\alpha)\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)-1$.

1.512. Решите уравнение $\sin^2 9x+\sin 18x=0$.

1.513. Определите, рациональным или иррациональным числом является значение выражения a^2, a^3 и $3a\sqrt{2}$ при $a=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

1.514. Вычислите: $5^4-\left(\dfrac{2}{3}\right)^5+1^8$.

1.515. Решите квадратное неравенство:

а) $x^2 - 2x - 15 > 0$; б) $x^2 + 7x \leqslant 0$;
в) $x^2 - 9 \geqslant 0$; г) $x^2 - 3x + 5 < 0$.

1.516. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2y - x = 5, \\ x^2 - xy - y^2 = -29. \end{cases}$

1.517. Выберите функции, графики которых параллельны:

а) $y = 2x + 1$; б) $y = -3 + 2x$; в) $y = 2 + x$; г) $y = \frac{6x - 5}{3}$.

§ 12. Формулы преобразования суммы и разности синусов (косинусов) в произведение

1.518. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x + 7y = 3, \\ 3x + 5y = 1 \end{cases}$ способом сложения.

1.519. Сравните значения выражений $\sin 30° + \sin 60°$ и $\sin 90°$.

1.520. Верно ли, что $\cos 90° - \cos 30° > \cos 60°$?

Формулы синуса суммы и разности двух углов можно использовать для получения новых формул, необходимых для решения уравнений, изучения свойств функций и т. п.

Например, решим уравнение $\sin x + \sin 5x = 0$.

Для решения данного уравнения сумму $\sin x + \sin 5x$ удобно представить в виде произведения и затем воспользоваться условием равенства нулю произведения.

Выведем формулу, преобразующую сумму синусов в произведение.

Сложим почленно два равенства:

$$+\begin{array}{l} \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \hline \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta \end{array}$$

Обозначим $\alpha + \beta = x$, $\alpha - \beta = y$ и решим систему уравнений $\begin{cases} \alpha + \beta = x, \\ \alpha - \beta = y: \end{cases}$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x, \\ \alpha - \beta = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = x, \\ 2\alpha = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = x, \\ \alpha = \frac{x + y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = x - \frac{x + y}{2}, \\ \alpha = \frac{x + y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{x - y}{2}, \\ \alpha = \frac{x + y}{2}. \end{cases}$$