Глава 2

КОРЕНЬ *n*-й СТЕПЕНИ ИЗ ЧИСЛА

§ 13. Корень n-й степени из числа a ($n \geqslant 2$, $n \in N$)

2.1. Сколько корней имеет уравнение:

а) $x^2 = 0{,}81$; б) $x^2 = -0{,}01$; в) $x^2 = 0$?

2.2. Найдите значение выражения $0{,}02 \cdot \sqrt{90\,000} - \frac{17}{\sqrt{2{,}89}} - 0{,}5 \cdot \sqrt{144}$.

2.3. Используя свойства степени, вычислите:

а) $3^8 : \left(3^5\right)^2$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-9} : (0{,}5)^{-7} \cdot 4^{-1}$; в) $1{,}2^{19} \cdot 1{,}2^{-18} : 12^0$.

Рассмотрим несколько задач. *Задача* 1. Кубический экологический резервуар для хранения воды имеет объем $3\frac{3}{8}$ м^3. Найдите длину ребра куба.

Решение. Обозначим длину ребра куба через x м, тогда объем куба равен x^3 м^3. Получим уравнение $x^3 = 3\frac{3}{8}$. Для его решения нужно найти такое число, куб которого равен $3\frac{3}{8}$. Так как $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$, то это уравнение имеет корень $x = \frac{3}{2}$, удовлетворяющий условию задачи.

Ответ: длина ребра куба равна 1,5 м.

Задача 2. Вкладчик положил m рублей на банковский счет, по которому сумма вклада увеличивается ежегодно на p %. Через 4 года сумма на счете оказалась равной k рублей. Определите процент p, под который сделан вклад, если известен первоначальный вклад m и сумма на счете k через 4 года.

Решение. Денежный вклад ежегодно увеличивается на p %, т. е. в $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ раз. Через 4 года он будет равен $m\left(1 + \frac{p}{100}\right)^4$. По условию задачи $m\left(1 + \frac{p}{100}\right)^4 = k$, откуда $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^4 = \frac{k}{m}$. Для определения p сначала нужно найти такое число, четвертая степень которого равна $\frac{k}{m}$.

Многие задачи, как и рассмотренные, приводят к необходимости извлечения корня n-й степени из действительного числа.

Определение. Пусть $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$, $a \in \boldsymbol{R}$. Корнем n-й степени из числа a называется число, n-я степень которого равна a.

Например:

- корнем третьей степени из числа 125 является число 5, поскольку $5^3 = 125$;
- корнем пятой степени из числа -32 является число -2, поскольку $(-2)^5 = -32$;
- корнями четвертой степени из числа 81 являются числа 3 и -3, поскольку $3^4 = 81$ и $(-3)^4 = 81$.

Из определения следует, что для нахождения корня n-й степени из действительного числа a надо решить уравнение $x^n = a$.

Выясним, сколько корней может иметь это уравнение в зависимости от n и от a.

1. Корень четной степени из действительного числа

Рассмотрим уравнение $x^{2k} = a$, где k — натуральное число.

а) Если $a < 0$, то уравнение не имеет корней, так как $x^{2k} = \left(x^k\right)^2 \geqslant 0$.

Следовательно, **не существует корня четной степени из отрицательного числа.**

б) Если $a = 0$, то уравнение $x^{2k} = 0$ имеет единственный корень, равный нулю.

Значит, **существует единственный корень четной степени из числа нуль.**

в) Если $a > 0$, то уравнение $x^{2k} = a$ имеет два действительных корня: один положительный, а другой — противоположный ему — отрицательный.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^{2k}$, где $k \in N$.
Мы рассматривали частный случай этой функции — $y = x^2$.
Свойства и график функции $f(x) = x^{2k}$ аналогичны свойствам и графику функции $y = x^2$.
Так как функция $f(x) = x^{2k}$ возрастает на множестве неотрицательных чисел и a — значение, которое принимает эта функция $\left(a \in [0; +\infty)\right)$, то уравнение $x^{2k} = a$ имеет единственный действительный корень при любом $a \in [0; +\infty)$.
Пусть x_1 — положительный корень уравнения $x^{2k} = a$ (рис. 116), значит, числовое равенство $x_1^{2k} = a$ является верным. Так как $x_1^{2k} = (-x_1)^{2k}$, то верным является и числовое равенство $(-x_1)^{2k} = a$, а значит, число $-x_1$ также является корнем уравнения $x^{2k} = a$.

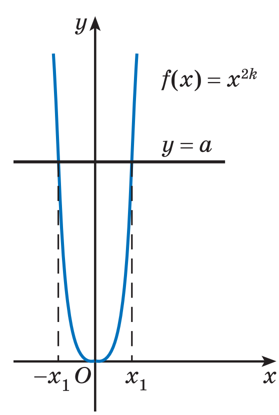

Рис. 116

Таким образом, существует ровно два корня четной степени из положительного числа. Один из корней является положительным числом, а другой — противоположным ему числом.

Определение. Арифметическим корнем n-й степени из числа a называется неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

$$\sqrt[n]{a} = b$$
$$b \geqslant 0,\ b^n = a$$

Например, 2 — арифметический корень четвертой степени из числа 16, поскольку $2 > 0$ и $2^4 = 16$.

Арифметический корень n-й степени из числа a обозначается $\sqrt[n]{a}$ и читается: «арифметический корень n-й степени из числа a». Число n называется показателем корня, число a — подкоренным выражением.

Можно, используя обозначения, записать $\sqrt[4]{16} = 2$. Читается: «арифметический корень четвертой степени из числа 16 равен 2». Слово «арифметический», как правило, опускается.

Корень второй степени из числа принято называть квадратным корнем (его свойства изучались в 8-м классе). Показатель корня второй степени при записи опускают. Например, корень второй степени из 13 обозначают $\sqrt{13}$ и говорят: «квадратный корень из 13».

Действие нахождения арифметического корня n-й степени из числа a называется **извлечением корня из числа.**

Пример. Выполните извлечение корня:
а) шестой степени из числа 64;
б) восьмой степени из числа 0,00000001.

Решение:

а) $\sqrt[6]{64} = 2$;

б) $\sqrt[8]{0{,}00000001} = 0{,}1$.

$$\sqrt[4]{81} = 3;\ \sqrt[8]{256} = 2;$$
$$\sqrt[12]{0} = 0;\ \sqrt[10]{1} = 1;$$
$$\sqrt[6]{\frac{64}{729}} = \frac{2}{3};\ \sqrt[4]{0{,}0625} = 0{,}5$$

Такие числа, как $\sqrt[4]{17}$, $\sqrt[8]{100}$ и т. п., являются иррациональными. С помощью десятичных приближений можно найти их значения с любой заданной степенью точности.

2. Корень нечетной степени из действительного числа

Рассмотрим уравнение $x^{2k+1} = a$, где k — натуральное число. Это уравнение имеет единственный корень.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^{2k+1}$, где $k \in N$. Эта функция является возрастающей на множестве всех действительных чисел и принимает все значения из промежутка $a \in (-\infty; +\infty)$.

Так как функция $f(x) = x^{2k+1}$ возрастает на R и a — значение, которое принимает эта функция $(a \in (-\infty; +\infty))$, то уравнение $x^{2k+1} = a$ имеет единственный действительный корень при любом a (рис. 117).

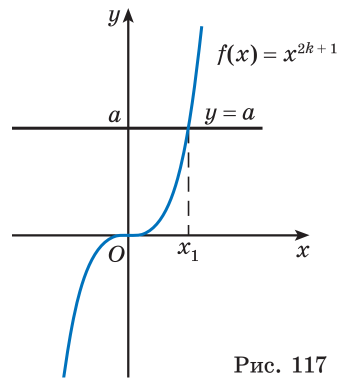

Рис. 117

Существует единственный действительный корень нечетной степени из любого действительного числа.

Этот корень для неотрицательного числа a называется **арифметическим** и обозначается так же, как корень четной степени.

Например, $\sqrt[3]{8} = 2$; $\sqrt[5]{243} = 3$.

Такие числа, как $\sqrt[5]{25}$; $\sqrt[7]{19}$ и т. п., являются иррациональными числами.

$\sqrt[3]{27} = 3$; $\sqrt[5]{32} = 2$;

$\sqrt[7]{0} = 0$; $\sqrt[9]{1} = 1$;

$\sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{4}{5}$; $\sqrt[7]{0{,}0000001} = 0{,}1$

Корень третьей степени из числа называют кубическим корнем. Например, $\sqrt[3]{15}$ — кубический корень из 15.

Корень нечетной степени из отрицательного числа принято записывать в виде $\sqrt[5]{-243}$, не называя его арифметическим корнем (читается: «корень пятой степени из числа −243»). А выражают его через арифметический корень из противоположного ему положительного числа. Например, $\sqrt[5]{-243} = -\sqrt[5]{243} = -3$; $\sqrt[7]{-128} = -\sqrt[7]{128} = -2$.

Примеры основных заданий и их решения

1. Определите, сколько существует корней:

а) четвертой степени из числа 25; б) пятой степени из числа 46; в) восьмой степени из числа −256; г) седьмой степени из числа −1.

Решение. а) Так как 25 — положительное число, то существует два корня четвертой (четной) степени из числа 25;

б) так как существует только один корень нечетной степени из действительного числа, то существует только один корень пятой степени из числа 46;
в) так как число –256 — отрицательное, то не существует корня восьмой степени из числа –256, поскольку не существует корня четной степени из отрицательного числа;
г) так как существует только один корень нечетной степени из действительного числа, то существует только один корень седьмой степени из числа –1.

2. Назовите показатель корня, подкоренное выражение, прочитайте данное выражение:

а) $\sqrt[3]{2}$; б) $\sqrt[6]{4x^2-1}$; в) $\sqrt[8]{a^4b^3}$.

Решение. а) Показатель корня равен 3, подкоренное выражение 2, данное выражение: «кубический корень из двух»;
б) показатель корня равен 6, подкоренное выражение $4x^2-1$, данное выражение: «корень шестой степени из разности $4x^2$ и 1»;
в) показатель корня равен 8, подкоренное выражение a^4b^3, данное выражение: «корень восьмой степени из произведения степеней a^4 и b^3».

3. Какие из следующих равенств:

а) $\sqrt[4]{81}=3$; б) $\sqrt[3]{125}=5$; в) $\sqrt[3]{-125}=-5$; г) $\sqrt[6]{729}=-3$

— являются верными?

Решение. а) $\sqrt[4]{81}=3$, так как $3>0$ и $3^4=81$, то по определению арифметического корня n-й степени из числа равенство верное;
б) $\sqrt[3]{125}=5$, так как $5>0$ и $5^3=125$, то по определению арифметического корня n-й степени из числа равенство верное;
в) $\sqrt[3]{-125}=-5$, так как $\sqrt[3]{-125}=-\sqrt[3]{125}=-5$, то равенство верное;
г) $\sqrt[6]{729}=-3$, так как по определению арифметический корень четной степени из числа равен неотрицательному числу, то равенство неверное.

4. Какие из данных выражений:

а) $\sqrt[10]{10}$; б) $\sqrt[7]{128}$; в) $\sqrt[4]{-81}$; г) $\sqrt[7]{-128}$ — не имеют смысла?

Решение. а) Выражение $\sqrt[10]{10}$ есть арифметический корень десятой степени из положительного числа 10, оно имеет смысл;

б) выражение $\sqrt[7]{128}$ есть арифметический корень седьмой степени из положительного числа 128, оно имеет смысл;

в) подкоренное выражение арифметического корня четвертой степени равно отрицательному числу -81, данное выражение не имеет смысла, так как не существует корня четной степени из отрицательного числа;

г) выражение $\sqrt[7]{-128}$ имеет смысл, так как существует корень нечетной степени из отрицательного числа.

5. Сколько корней имеет уравнение:

а) $x^4 = 6$; б) $x^3 = 6$; в) $x^4 = -6$; г) $x^3 = -6$?

Решение. а) Уравнение имеет два корня $x_1 = \sqrt[4]{6}$ и $x_2 = -\sqrt[4]{6}$;

б) уравнение имеет один корень $x = \sqrt[3]{6}$;

в) уравнение не имеет корней;

г) уравнение имеет один корень $x = -\sqrt[3]{6}$.

6. Решите уравнение:

а) $x^4 - 625 = 0$; б) $x^6 - 245 = 0$;
в) $x^3 - 216 = 0$; г) $x^3 + 27 = 0$.

Решение. а) $x^4 - 625 = 0$; $x^4 = 625$; $\left[\begin{array}{l} x = \sqrt[4]{625}, \\ x = -\sqrt[4]{625}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = -5. \end{array}\right.$

Ответ: -5; 5.

б) $x^6 - 245 = 0$; $x^6 = 245$; $\left[\begin{array}{l} x = \sqrt[6]{245}, \\ x = -\sqrt[6]{245}. \end{array}\right.$

Ответ: $-\sqrt[6]{245}$; $\sqrt[6]{245}$.

в) $x^3 - 216 = 0$; $x^3 = 216$; $x = \sqrt[3]{216}$; $x = 6$.

Ответ: 6.

г) $x^3 + 27 = 0$; $x^3 = -27$; $x = \sqrt[3]{-27}$; $x = -\sqrt[3]{27}$; $x = -3$.

Ответ: -3.

? Определите, четным или нечетным является число n, если известно, что уравнение $x^n = a$ имеет:

а) два различных корня; б) только один корень.

2.4. Выберите верные утверждения:

а) число –5 является корнем третьей степени из числа –125;
б) число 0 является корнем пятой степени из числа 0;
в) число –2 является корнем четвертой степени из числа –16;
г) число 7 является корнем третьей степени из числа 343.

2.5. Прочитайте выражение:

а) $\sqrt[5]{8}$; б) $\sqrt[3]{12}$; в) $\sqrt[4]{x^9}$; г) $\sqrt[10]{a-b}$.

Назовите показатель корня, подкоренное выражение.

2.6. С помощью определения арифметического корня n-й степени докажите, что:

а) $\sqrt[6]{64}=2$; б) $\sqrt[3]{125}=5$; в) $\sqrt[4]{0,0081}=0,3$; г) $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}=\frac{2}{3}$.

2.7. Верно ли равенство:

а) $\sqrt[4]{-81}=-3$; б) $\sqrt[3]{0,027}=0,3$; в) $\sqrt[8]{1}=1$; г) $\sqrt[7]{-\frac{1}{128}}=-\frac{1}{2}$?

Ответ обоснуйте.

2.8. Имеет ли смысл выражение:

а) $\sqrt[5]{3}$; б) $\sqrt[4]{3}$; в) $\sqrt[7]{-3}$; г) $\sqrt[6]{-3}$?

2.9. Выберите уравнения, имеющие два корня:

а) $x^4=81$; б) $x^5=32$; в) $x^6=10$;
г) $x^8=0$; д) $x^{10}=-1$; е) $x^7=-5$.

Найдите корни этих уравнений.

2.10. Решите уравнение:

а) $x^8-12=0$; б) $x^4+16=0$;
в) $x^5-29=0$; г) $x^9+13=0$.

Корни каких из данных уравнений являются рациональными числами?

2.11. Выполните действие извлечения корня:

а) $\sqrt[4]{16}$; б) $\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$; в) $\sqrt[4]{10\,000}$; г) $\sqrt[4]{\frac{1}{625}}$;
д) $\sqrt[6]{64}$; е) $\sqrt[10]{1}$; ж) $\sqrt[5]{32}$; з) $\sqrt[3]{0,001}$;
и) $\sqrt[3]{125}$; к) $\sqrt[7]{\frac{1}{128}}$; л) $\sqrt[9]{0}$; м) $\sqrt[3]{216}$.

2.12. Найдите значение корня:

а) $\sqrt[4]{\frac{16}{625}}$; б) $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$; в) $\sqrt[3]{1\frac{91}{125}}$; г) $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$;

д) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$; е) $\sqrt[4]{3\frac{13}{81}}$; ж) $\sqrt[3]{-5\frac{23}{64}}$; з) $\sqrt[5]{-7\frac{19}{32}}$.

2.13. Найдите значения выражений $\sqrt[3]{m}$, $\sqrt[3]{8m}$, $\sqrt[3]{-0{,}008m}$, если:

а) $m = 1$; б) $m = -1$; в) $m = 125$; г) $m = -1000$.

2.14. Выполните действия:

а) $\sqrt[4]{81} - 6$; б) $19 - \sqrt[3]{8}$; в) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}} - 1\frac{2}{3}$;

г) $\sqrt[3]{0{,}125} - 3{,}5$; д) $\sqrt[4]{16} - \sqrt[3]{125}$; е) $\sqrt[3]{0{,}008} + \sqrt[5]{32}$;

ж) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} - \sqrt[6]{\frac{1}{64}}$; з) $\sqrt[7]{\frac{1}{128}} - \sqrt[9]{1}$; и) $\sqrt[7]{0} - \sqrt[4]{\frac{1}{81}}$.

2.15. Найдите значение выражения $\sqrt[6]{a} + \sqrt[3]{a}$, если:

а) $a = 1$; б) $a = 0$; в) $a = 64$; г) $a = 0{,}000001$.

2.16. Вычислите:

а) $\sqrt[5]{100\,000} - \sqrt[4]{0{,}0625}$; б) $-\sqrt[3]{0{,}001} + \sqrt[6]{1}$;

в) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}} - \sqrt[5]{0{,}00001}$; г) $-\sqrt[4]{0{,}0016} \cdot \sqrt[3]{8000}$;

д) $-\sqrt[3]{-343} \cdot \sqrt[5]{-1024}$; е) $6 : \sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$;

ж) $\sqrt[6]{0{,}000064} : \sqrt[3]{-0{,}064}$; з) $\sqrt[5]{-\frac{32}{243}} : \sqrt[3]{0{,}216}$.

2.17. Найдите значение выражения $-3\sqrt[6]{m} + 0{,}5\sqrt[5]{n}$ при:

а) $m = 64$, $n = 243$; б) $m = 0$, $n = -1$; в) $m = 0{,}000001$, $n = 0{,}00032$.

2.18. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{6\cos\frac{\pi}{6}}$; б) $\sqrt[5]{\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}}$.

2.19. Найдите значение выражения:

а) $\left(\sqrt[4]{6}\right)^4$; б) $\left(\sqrt[5]{13}\right)^5$; в) $\left(-\sqrt[8]{6}\right)^8$; г) $\left(\sqrt[7]{-2}\right)^7$;

д) $\left(2\sqrt[4]{11}\right)^4$; е) $\left(-\sqrt[5]{3}\right)^5$; ж) $\left(\frac{1}{2}\sqrt[6]{5}\right)^6$; з) $\left(3\sqrt[4]{0{,}2}\right)^4$.

2.20. Вычислите:

а) $2\sqrt[4]{0{,}0625} - \sqrt[5]{-243}$; б) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{1296} - \sqrt[3]{-0{,}064}$;

в) $10\sqrt[4]{0{,}0081} - 0{,}2\sqrt[3]{-1\frac{61}{64}}$; г) $\sqrt{\frac{1}{9}} + 3\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}} - \frac{1}{8}\sqrt[4]{256}$;

д) $\sqrt{0{,}64} + 8\sqrt[3]{-15\frac{5}{8}} + \frac{2}{3}\sqrt[4]{81}$; е) $\sqrt[5]{\frac{1}{243}} + 45\sqrt[3]{-0{,}001} + 5\sqrt[4]{0{,}0016}$.

2.21. Объем шара вычисляется по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ (рис. 118). Выразите из этой формулы R — радиус шара.

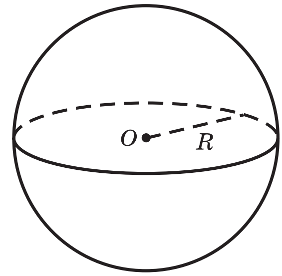

Рис. 118

2.22. Найдите значение выражения:

а) $0,6\sqrt[4]{10\,000} - 3\sqrt[7]{-128} + 4 \cdot \left(-\sqrt[8]{6}\right)^8$;

б) $\left(-2\sqrt[3]{-5}\right)^3 - \sqrt[12]{10^{12}} + \left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{8}\right)^3$.

2.23*. Вычислите:

а) $\sqrt[4]{10 + 3\sqrt[3]{8}}$; б) $\sqrt[10]{0,7 + 3\sqrt[5]{0,00001}}$; в) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{0,125} + \sqrt[3]{-\frac{27}{512}}}$.

2.24. С помощью определения арифметического квадратного корня n-й степени выберите все верные равенства:

а) $\sqrt[4]{16} = 2$; б) $\sqrt[3]{27} = 3$; в) $\sqrt[5]{0,00032} = 0,2$;

г) $\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = -\frac{2}{5}$; д) $\sqrt[4]{1} = 1$; е) $\sqrt[10]{0} = 0$.

2.25. Выберите выражения, имеющие смысл:

а) $\sqrt[6]{12}$; б) $\sqrt[8]{-1}$; в) $\sqrt[5]{6}$; г) $\sqrt[7]{-11}$; д) $\sqrt[4]{0}$.

2.26. Решите уравнение:

а) $x^4 = 7$; б) $x^6 = 0$; в) $x^7 - 4 = 0$; г) $x^{10} + 1 = 0$.

2.27. Найдите значение корня:

а) $\sqrt[4]{81}$; б) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$; в) $\sqrt[6]{1\,000\,000}$; г) $\sqrt[5]{32}$;

д) $\sqrt[3]{64}$; е) $\sqrt[3]{-27}$; ж) $\sqrt[5]{-1}$; з) $\sqrt[3]{0,008}$;

и) $\sqrt[3]{-0,125}$; к) $\sqrt[7]{0}$; л) $\sqrt[5]{-0,00001}$; м) $\sqrt[3]{-27\,000}$;

н) $\sqrt[8]{256}$; о) $\sqrt[3]{-0,216}$.

2.28. Найдите значение выражения $x + \sqrt[3]{x}$, если:

а) $x = 0$; б) $x = -1$; в) $x = 8$;

г) $x = -27$; д) $x = 0,001$; е) $x = \frac{64}{125}$.

2.29. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{\frac{125}{216}}$; б) $\sqrt[4]{7\frac{58}{81}}$; в) $\sqrt[3]{-15\frac{5}{8}}$.

2.30. Найдите значения выражений $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{1000a}$, $\sqrt[3]{-0{,}001a}$, если:
а) $a = 8$; б) $a = -0{,}125$.

2.31. Выполните действия:

а) $\sqrt[3]{27} - 2$; б) $10 + \sqrt[4]{16}$; в) $0{,}5 + \sqrt[3]{\frac{1}{8}}$;

г) $\sqrt[3]{-125} + 15$; д) $\sqrt[4]{1} - \sqrt[3]{216}$; е) $\sqrt[3]{0{,}064} - \sqrt[5]{243}$;

ж) $\sqrt[3]{-\frac{1}{125}} - \sqrt[4]{\frac{1}{81}}$; з) $\sqrt[5]{\frac{1}{100\,000}} - \sqrt[7]{0}$; и) $\sqrt[4]{10\,000} : \sqrt[3]{0{,}125}$;

к) $-\sqrt[5]{0{,}00001} : \sqrt[3]{-8}$; л) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}} \cdot \sqrt[5]{0{,}00032}$; м) $\sqrt[5]{-7\frac{19}{32}} \cdot \sqrt[3]{27\,000}$.

2.32. Найдите значение выражения $2\sqrt[4]{x} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{y}$ при:

а) $x = 16$, $y = 343$; б) $x = 0$, $y = -1$; в) $x = 0{,}0081$, $y = -0{,}125$.

2.33. Вычислите:

а) $\sqrt[4]{32\sin\frac{\pi}{6}}$; б) $\sqrt[3]{8\cos\pi}$.

2.34. Найдите значение выражения:

а) $\left(\sqrt[6]{7}\right)^6$; б) $\left(\sqrt[3]{10}\right)^3$; в) $\left(-\sqrt[4]{5}\right)^4$;

г) $\left(\sqrt[3]{-7}\right)^3$; д) $\left(2\sqrt[6]{3}\right)^6$; е) $\left(-\frac{1}{3}\sqrt[4]{6}\right)^4$.

2.35. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{-0{,}125} - \frac{1}{8}\sqrt[6]{64}$; б) $\sqrt[5]{32} + 0{,}25\sqrt[3]{-0{,}216}$;

в) $-3\sqrt[4]{\frac{1}{81}} + \sqrt[4]{0{,}0625}$; г) $\sqrt[5]{-100\,000} - 4\sqrt[4]{0{,}0256}$.

2.36. Объем куба вычисляется по формуле $V = a^3$. Выразите из этой формулы a — длину ребра куба.

2.37. Найдите значение выражения:

а) $400\sqrt[3]{-0{,}001} - 0{,}5\sqrt[5]{-0{,}00032} - 3 \cdot \left(-2\sqrt[4]{5}\right)^4$;

б) $4 \cdot \sqrt[4]{7\frac{58}{81}} - \left(2\sqrt[5]{-0{,}1}\right)^5 + \left(-\sqrt[7]{-10^7}\right)$.

2.38. Найдите значение выражения:

а) $\left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(5\sqrt{2}\right)^2$; б) $\sqrt{16{,}9} \cdot \sqrt{10}$;

в) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{54}}$; г) $\sqrt{24} : \sqrt{6} + \sqrt{\dfrac{7}{9}} \cdot \sqrt{7}$.

2.39. Найдите значение выражения $\sin\dfrac{3\pi}{2} - 4\cos(-5\pi) + \sin(-8\pi)$.

2.40. Решите неравенство $4 - x > \dfrac{1}{x-1}$.

§ 14. Свойства корней n-й степени ($n > 1$, $n \in N$)

2.41. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{75}$; б) $\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$; в) $\sqrt{12} - \sqrt{3}$.

2.42. Вычислите:

а) $\sqrt{(-4)^2}$; б) $\sqrt{173^2 - 52^2}$.

2.43. При каких значениях t верно равенство:

а) $\sqrt{t^2} = t$; б) $\sqrt{(t-1)^2} = 1 - t$?

Рассмотрим два свойства корней n-й степени, аналогичные свойствам квадратных корней.

Свойство 1. Корень n-й степени **из произведения** неотрицательных множителей **равен произведению корней** n-й степени из этих множителей:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \text{ где } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ n \in N,\ n > 1.$$

Свойство 2. Корень n-й степени **из частного равен частному корней** n-й степени делимого и делителя, если делимое — неотрицательное число, а делитель — положительное число:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \text{ где } a \geqslant 0,\ b > 0,\ n \in N,\ n > 1.$$

Докажем свойство 1 для корней n-й степени из произведения двух множителей: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $n \in N$, $n > 1$.

Доказательство. При доказательстве используем определение арифметического корня n-й степени из числа и свойства степени с целым показателем.

Обозначим $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = t$ и покажем, что $t \geqslant 0$ и $t^n = ab$.

1) По определению арифметического корня n-й степени из числа имеем: $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$ и $\sqrt[n]{b} \geqslant 0$, а так как произведение двух неотрицательных множителей есть число неотрицательное, то $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geqslant 0$, значит, $t \geqslant 0$.

2) По свойству степени с целым показателем получим: $t^n = \left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n$, а по определению корня n-й степени из числа $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$, т. е. $t^n = ab$. Таким образом, свойство доказано.

Свойство 2 докажите самостоятельно.

Пример 1. Вычислите:

а) $\sqrt[5]{243 \cdot 32}$; б) $\sqrt[4]{36} \cdot \sqrt[4]{\frac{4}{9}}$; в) $\sqrt[3]{36} \cdot \sqrt[3]{48}$.

Решение. а) $\sqrt[5]{243 \cdot 32} = \sqrt[5]{243} \cdot \sqrt[5]{32} = 3 \cdot 2 = 6$;

$$\boxed{\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}$$

б) $\sqrt[4]{36} \cdot \sqrt[4]{\frac{4}{9}} = \sqrt[4]{36 \cdot \frac{4}{9}} = \sqrt[4]{16} = 2$;

в) $\sqrt[3]{36} \cdot \sqrt[3]{48} = \sqrt[3]{36 \cdot 48} = \sqrt[3]{216 \cdot 8} = \sqrt[3]{216} \cdot \sqrt[3]{8} = 6 \cdot 2 = 12$.

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

Пример 2. Вычислите:

а) $\sqrt[4]{\frac{81}{256}}$; б) $\frac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}}$.

Решение. а) $\sqrt[4]{\frac{81}{256}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{256}} = \frac{3}{4}$; б) $\frac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[5]{\frac{64}{2}} = \sqrt[5]{32} = 2$.

Свойство 3. Значение корня из степени не изменится, если и показатель корня, и показатель подкоренного выражения умножить на одно и то же натуральное число или разделить на их общий делитель:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}; \quad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:r]{a^{m:r}},$$

где $a \geqslant 0$, $n \in \boldsymbol{N}$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{N}$, r — общий натуральный делитель чисел m и n, $n > 1$, $k > 1$ и $r > 1$.

Докажем, что $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$ или $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$. Доказательство проведем на основании определения корня степени nk из числа a^{mk}.

Обозначим $\sqrt[n]{a^m} = t$, покажем, что $t \geqslant 0$ и $t^{nk} = a^{mk}$.

Очевидно, что $t \geqslant 0$ по определению арифметического корня.

Покажем, что $t^{nk} = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{nk} = a^{mk}$. По свойству степени с целым показателем и определению корня справедливы равенства: $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right)^k = \left(a^m\right)^k = a^{mk}$.

Пример 3. Упростите выражение

$\sqrt[21]{128}$.

Решение:

$\sqrt[21]{128} = \sqrt[21]{2^7} = \sqrt[3 \cdot 7]{2^7} = \sqrt[3]{2}$.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n : r]{a^{m : r}}$$

Свойство 4. Чтобы извлечь корень k-й степени из корня n-й степени из неотрицательного числа, достаточно извлечь корень степени nk из этого числа:

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}$$

для любых натуральных $n > 1$ и $k > 1$, $a \geqslant 0$.

Для доказательства достаточно показать, что $\left(\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}\right)^{nk} = a$.

По свойству степени с натуральным показателем имеем: $\left(\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}\right)^{k}\right)^{n}$.

По определению корня получим: $\left(\left(\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}\right)^{k}\right)^{n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{n} = a$. Свойство доказано.

Пример 4. Упростите выражение

$\sqrt[3]{\sqrt[4]{15}}$.

Решение:

$\sqrt[3]{\sqrt[4]{15}} = \sqrt[3 \cdot 4]{15} = \sqrt[12]{15}$.

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}$$

Свойство 5. Для любого действительного a и натурального $n > 1$ справедливо равенство $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, & \text{если } n \text{ — четное число,} \\ a, & \text{если } n \text{ — нечетное число.} \end{cases}$

Действительно, если n — четное, то $|a|^n = a^n$. Если n — нечетное, то $a^n = a^n$. Таким образом, на основании определения корня n-й степени свойство доказано.

Пример 5. Вычислите:

а) $\sqrt[8]{(-3)^8}$; б) $\sqrt[5]{(-3)^5}$.

Решение.

а) $\sqrt[8]{(-3)^8} = |-3| = 3$; б) $\sqrt[5]{(-3)^5} = -3$.

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, & \text{если } n \text{ — четное} \\ a, & \text{если } n \text{ — нечетное} \end{cases}$$

Примеры основных заданий и их решения

1. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[4]{81 \cdot 625}$; б) $\sqrt[5]{0{,}00032 \cdot 3125}$.

Решение. а) $\sqrt[4]{81 \cdot 625} = \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{625} = 3 \cdot 5 = 15$;

б) $\sqrt[5]{0{,}00032 \cdot 3125} = \sqrt[5]{0{,}00032} \cdot \sqrt[5]{3125} = 0{,}2 \cdot 5 = 1$.

2. Вычислите:

а) $\sqrt[6]{0{,}000243} \cdot \sqrt[6]{19{,}2}$; б) $\sqrt[3]{144} \cdot \sqrt[3]{12}$.

Решение. а) $\sqrt[6]{0{,}000243} \cdot \sqrt[6]{19{,}2} = \sqrt[6]{0{,}000243 \cdot 19{,}2} =$

$= \sqrt[6]{0{,}000243 \cdot 0{,}3 \cdot 64} = \sqrt[6]{0{,}3^5 \cdot 0{,}3 \cdot 64} = 0{,}3 \cdot 2 = 0{,}6$;

б) $\sqrt[3]{144} \cdot \sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{12^2 \cdot 12} = \sqrt[3]{12^3} = 12$.

3. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[4]{\dfrac{0{,}0625}{810\,000}}$; б) $\sqrt[3]{\dfrac{216\,000}{0{,}001}}$.

Решение. а) $\sqrt[4]{\dfrac{0{,}0625}{810\,000}} = \dfrac{\sqrt[4]{0{,}0625}}{\sqrt[4]{810\,000}} = \dfrac{0{,}5}{30} = \dfrac{1}{60}$;

б) $\sqrt[3]{\dfrac{216\,000}{0{,}001}} = \dfrac{\sqrt[3]{216\,000}}{\sqrt[3]{0{,}001}} = \dfrac{60}{0{,}1} = 600$.

4. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}}$; б) $\dfrac{\sqrt[5]{0{,}000064}}{\sqrt[5]{0{,}2}}$.

Решение. а) $\dfrac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}} = \sqrt[4]{\dfrac{128}{8}} = \sqrt[4]{16} = 2$;

б) $\dfrac{\sqrt[5]{0{,}000064}}{\sqrt[5]{0{,}2}} = \sqrt[5]{\dfrac{0{,}000064}{0{,}2}} = \sqrt[5]{0{,}00032} = 0{,}2$.

5. Упростите выражение:

а) $\sqrt[6]{16}$; б) $\sqrt[4]{25^2}$; в) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{2}$; г) $\dfrac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[3]{2}}$.

Решение. а) $\sqrt[6]{16} = \sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$; б) $\sqrt[4]{25^2} = \sqrt{25} = 5$;

в) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{4^2} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{2^4 \cdot 2} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}$;

г) $\frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[12]{6^3}}{\sqrt[12]{2^4}} = \sqrt[12]{\frac{2^3 \cdot 3^3}{2^4}} = \sqrt[12]{\frac{27}{2}} = \sqrt[12]{13{,}5}$.

6. Упростите выражение:

а) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}}$; б) $\sqrt{\sqrt[8]{a}}$; в) $\sqrt[9]{\sqrt{a^3}}$.

Решение. а) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}} = \sqrt[15]{a}$; б) $\sqrt{\sqrt[8]{a}} = \sqrt[2\cdot 8]{a} = \sqrt[16]{a}$;

в) $\sqrt[9]{\sqrt{a^3}} = \sqrt[18]{a^3} = \sqrt[6]{a}$.

7. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[6]{(-5)^6}$; б) $\sqrt[13]{(-7)^{13}}$.

Решение. а) $\sqrt[6]{(-5)^6} = |-5| = 5$; б) $\sqrt[13]{(-7)^{13}} = -7$.

8. Замените выражение на тождественно равное ему:

а) $\sqrt[12]{k^{12}}$, если $k \geqslant 0$; б) $\sqrt[14]{p^{14}}$, если $p \leqslant 0$.

Решение. а) $\sqrt[12]{k^{12}} = |k| = k$, так как $k \geqslant 0$;

б) $\sqrt[14]{p^{14}} = |p| = -p$, так как $p \leqslant 0$.

?

1. При каких значениях a и b верно равенство $\sqrt[6]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{b}}$?

2. При каких значениях m верно равенство $\sqrt[8]{m^8} = -m$?

2.44. Вычислите с помощью свойства корня n-й степени из произведения:

а) $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$; б) $\sqrt[3]{64 \cdot 125}$; в) $\sqrt[4]{0{,}0625 \cdot 81}$;

г) $\sqrt[5]{32 \cdot 0{,}00243}$; д) $\sqrt[3]{0{,}027 \cdot 15^3}$; е) $\sqrt[4]{625 \cdot 3^8}$;

ж) $\sqrt[3]{0{,}001 \cdot 64 \cdot 343}$; з) $\sqrt[4]{0{,}0016 \cdot 625 \cdot 7^4}$.

2.45. Найдите значение произведения:

а) $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{5}$; б) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{500}$; в) $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{16}$;

г) $\sqrt[3]{2{,}7} \cdot \sqrt[3]{10}$; д) $\sqrt[5]{0{,}32} \cdot \sqrt[5]{100}$; е) $\sqrt[4]{0{,}8} \cdot \sqrt[4]{20}$;

ж) $\sqrt[3]{0{,}1} \cdot \sqrt[3]{0{,}08}$; з) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{-2}$.

2.46. Найдите значение выражения с помощью свойства корня n-й степени из частного:

а) $\sqrt[4]{\dfrac{81}{0{,}0625}}$; б) $\sqrt[3]{\dfrac{0{,}064}{1000}}$; в) $\sqrt[5]{\dfrac{3\,200\,000}{0{,}00243}}$; г) $\sqrt[3]{\dfrac{0{,}343}{125}}$.

2.47. Найдите значение частного:

а) $\dfrac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$; б) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{54}}$; в) $\dfrac{\sqrt[3]{400}}{\sqrt[3]{50}}$;

г) $\dfrac{\sqrt[4]{4{,}8}}{\sqrt[4]{0{,}3}}$; д) $\sqrt[3]{\dfrac{5}{36}} : \sqrt[3]{\dfrac{6}{25}}$; е) $\sqrt[3]{7\dfrac{1}{5}} : \sqrt[3]{-\dfrac{1}{30}}$.

2.48. Сравните значения выражений $\sqrt[4]{ab}$ и $\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}$, если:

а) $a = 16,\ b = 625$; б) $a = -256,\ b = -0{,}0081$; в) $a = 7^4,\ b = 3^8$.

Можно ли найти значения данных выражений, если числа a и b разных знаков?

2.49. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{27 \cdot 125} - \sqrt[4]{16 \cdot 81}$; б) $\sqrt[3]{-\dfrac{8}{343}} + \sqrt[4]{\dfrac{0{,}0625}{256}}$.

2.50. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[4]{\dfrac{0{,}0016 \cdot 256}{810\,000}}$; б) $\sqrt[3]{\dfrac{0{,}008}{27 \cdot 0{,}125}}$.

2.51. Найдите значение произведения:

а) $\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{18}$; б) $\sqrt[4]{72} \cdot \sqrt[4]{18}$; в) $\sqrt[3]{75} \cdot \sqrt[3]{45}$;

г) $\sqrt[5]{160} \cdot \sqrt[5]{625}$; д) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{-6} \cdot \sqrt[3]{9}$; е) $\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{12}$.

2.52. Найдите значение частного:

а) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{250}}$; б) $\dfrac{\sqrt[4]{486}}{\sqrt[4]{96}}$; в) $\dfrac{\sqrt[3]{3125}}{\sqrt[3]{5400}}$; г) $\dfrac{\sqrt[5]{6{,}4}}{\sqrt[5]{48{,}6}}$.

2.53. Найдите значение выражения $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8} + \dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{81}}$, используя свойства корня.

2.54. Найдите, во сколько раз число:

а) $\sqrt[6]{128}$ больше числа $\sqrt[6]{2}$; б) число $\sqrt[3]{4}$ меньше числа $\sqrt[3]{108}$.

2.55. Вычислите значение выражения:

а) $5\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9}$; б) $-6\sqrt[5]{4} \cdot 3\sqrt[5]{8}$;

в) $3\sqrt[3]{7} \cdot \left(\sqrt[3]{-49}\right)$; г) $5\sqrt[4]{10} \cdot 0{,}3\sqrt[4]{1000}$.

2.56. Определите, являются ли взаимно обратными числа:

а) $\sqrt[3]{5}$ и $\frac{\sqrt[3]{25}}{5}$; б) $2\sqrt[4]{2}$ и $\frac{1}{\sqrt[4]{32}}$; в) $\sqrt[5]{64}$ и $-\frac{1}{\sqrt[5]{64}}$.

2.57. Найдите значение выражения на основании свойств корня n-й степени:

а) $\sqrt[4]{1780^2 - 780^2}$; б) $\sqrt[3]{0,69^2 - 0,51^2}$;

в) $\sqrt[4]{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{34} + 3\sqrt{2}}$; г) $\sqrt[3]{5\sqrt{3} + \sqrt{11}} \cdot \sqrt[3]{5\sqrt{3} - \sqrt{11}}$.

2.58. Представьте выражение $\sqrt[3]{2}$ в виде корня:

а) шестой степени; б) девятой степени;
в) двенадцатой степени; г) восемнадцатой степени.

2.59. Представьте выражение $\sqrt{a}$ в виде корня:

а) четвертой степени; б) шестой степени;
в) десятой степени; г) шестнадцатой степени.

2.60. Представьте в виде корней одной и той же степени числа:

а) $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{5}$ и $\sqrt[6]{3}$; б) $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[8]{3}$ и $\sqrt[12]{7}$.

2.61. Представьте выражение в виде корня с меньшим показателем:

а) $\sqrt[6]{2^4}$; б) $\sqrt[15]{7^9}$; в) $\sqrt[8]{3^4}$; г) $\sqrt[24]{12^8}$;
д) $\sqrt[4]{25}$; е) $\sqrt[6]{81}$; ж) $\sqrt[6]{125}$; з) $\sqrt[12]{27}$.

2.62. Вычислите:

а) $\sqrt[6]{49^3}$; б) $\sqrt[6]{125^2}$; в) $\sqrt[100]{9^{50}}$; г) $\sqrt[24]{7^{48}}$.

2.63. Представьте в виде корня:

а) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{0,5}$; б) $\sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{6}}$; в) $\frac{\sqrt[4]{50}}{\sqrt{5}}$;

г) $\frac{\sqrt[10]{80}}{\sqrt[5]{4}}$; д) $\sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[12]{3}$; е) $\sqrt[6]{5} : \sqrt[4]{2}$.

2.64. Определите, рациональным или иррациональным числом является значение выражения:

а) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{4}$; б) $\sqrt[7]{-5} \cdot \sqrt[14]{25}$; в) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[6]{8}$;

г) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[12]{3}$; д) $\frac{\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[4]{343}}{\sqrt[12]{7}}$; е) $\frac{\sqrt[8]{8^3} \cdot \sqrt[40]{8}}{\sqrt[5]{8^4}}$.

2.65. Упростите выражение:

а) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}}$; б) $\sqrt[4]{\sqrt{a}}$; в) $\sqrt{\sqrt[5]{a^2}}$;

г) $\sqrt[5]{\sqrt[6]{a^{10}}}$; д) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt{a}}$; е) $\sqrt[4]{\sqrt{a}} \cdot \sqrt[6]{\sqrt[4]{a}}$.

2.66 Вычислите:

а) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{9}}\cdot\sqrt[9]{3^7}$; б) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{25}}\cdot\sqrt[6]{5^5}$; в) $\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[3]{2}}+\dfrac{\sqrt[15]{2}}{\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}}}$.

2.67. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[4]{(-17)^4}$; б) $\sqrt[5]{(-10)^5}$; в) $\sqrt[6]{(-7)^6}$; г) $\sqrt[7]{(-13)^7}$.

2.68. Упростите выражение:

а) $\sqrt[4]{a^4}$, если $a \geqslant 0$; б) $\sqrt[6]{b^6}$, если $b < 0$;

в) $\sqrt[4]{81m^4}$, если $m \geqslant 0$; г) $\sqrt[8]{\dfrac{c^8}{256}}$, если $c < 0$;

д) $-3\sqrt[4]{16b^4}$, если $b < 0$; е) $-2a\sqrt[4]{\dfrac{a^4}{625}}$, если $a \geqslant 0$.

2.69. Представьте выражение в виде одночлена:

а) $\sqrt[7]{a^7}$; б) $-4\sqrt[3]{8a^3}$; в) $12a\sqrt[9]{-a^9}$; г) $5a^2\sqrt[5]{-32a^5}$.

2.70. Упростите выражение:

а) $\sqrt[4]{x^4}-x$, если $x \geqslant 0$; б) $\sqrt[6]{x^6}-\sqrt[3]{x^3}$, если $x \leqslant 0$.

2.71. Упростите выражение $\sqrt[3]{343x^3}+\sqrt[4]{81x^4}-\sqrt{64x^2}$ и найдите его значение при $x = -0,5$.

2.72. Упростите выражение:

а) $\sqrt[4]{a^{12}}$, если $a \geqslant 0$; б) $\sqrt[3]{8b^9}$; в) $\sqrt[4]{16m^8}$; г) $\sqrt[4]{\dfrac{c^{16}}{81}}$;

д) $-6\sqrt[4]{625b^{20}}$, если $b < 0$; е) $-8a\sqrt[6]{\dfrac{a^{18}}{64}}$, если $a \geqslant 0$.

2.73. Упростите выражение $\sqrt[4]{\dfrac{1}{81}a^4b^{12}}$, если a и b:

а) числа одного знака; б) числа разных знаков.

2.74. Упростите выражение:

а) $\sqrt[4]{(a-7)^4}$ при $a \geqslant 7$; б) $\sqrt[6]{(a+8)^6}$ при $a < -8$;

в) $\sqrt[8]{(y-3)^8}+\sqrt[4]{(y-5)^4}$ при $3 \leqslant y \leqslant 5$.

2.75*. Вычислите:

а) $\sqrt[4]{\left(\sqrt{120}-11\right)^4}+\sqrt[4]{\left(\sqrt{120}+11\right)^4}$;

б) $\sqrt[6]{\left(4\sqrt{6}+10\right)^6}-\sqrt[6]{\left(4\sqrt{6}-10\right)^6}-20$.

2.76. Вычислите с помощью свойства корня n-й степени из произведения:

а) $\sqrt[3]{27\cdot 125}$; б) $\sqrt[4]{81\cdot 256}$; в) $\sqrt[5]{243\cdot 0{,}00001}$;

г) $\sqrt[3]{0{,}064\cdot 343}$; д) $\sqrt[5]{32\cdot 6^5}$; е) $\sqrt[3]{0{,}008\cdot 27\cdot 9^6}$.

2.77. Найдите значение произведения:

а) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}$; б) $\sqrt[3]{3{,}2}\cdot\sqrt[3]{20}$; в) $\sqrt[4]{6{,}25}\cdot\sqrt[4]{100}$;

г) $\sqrt[5]{24{,}3}\cdot\sqrt[5]{10}$; д) $\sqrt[4]{0{,}5}\cdot\sqrt[4]{0{,}125}$; е) $\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[5]{9}\cdot\sqrt[5]{-9}$.

2.78. Найдите значение выражения с помощью свойства корня n-й степени из частного:

а) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{0{,}0081}}$; б) $\sqrt[3]{\dfrac{27\,000}{0{,}008}}$; в) $\sqrt[5]{\dfrac{0{,}00001}{32}}$; г) $\sqrt[4]{\dfrac{625}{0{,}0016}}$.

2.79. Найдите значение частного:

а) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$; б) $\dfrac{\sqrt[7]{2}}{\sqrt[7]{256}}$; в) $\dfrac{\sqrt[4]{1250}}{\sqrt[4]{2}}$; г) $\dfrac{\sqrt[3]{-128}}{\sqrt[3]{2000}}$.

2.80. Найдите значения выражений $\sqrt[3]{mn}$ и $\sqrt[3]{\dfrac{m}{n}}$, если:

а) $m=125$, $n=0{,}027$; б) $m=10^6$, $n=2^3$.

2.81. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{\dfrac{125\cdot 343}{0{,}027}}$; б) $\sqrt[4]{\dfrac{160\,000}{81\cdot 625}}$.

2.82. Найдите значение выражения, используя свойства корня n-й степени:

а) $\sqrt[3]{24}\cdot\sqrt[3]{9}$; б) $\sqrt[4]{48}\cdot\sqrt[4]{27}$; в) $\sqrt[3]{-15}\cdot\sqrt[3]{225}$;

г) $\sqrt[5]{48}\cdot\sqrt[5]{162}$; д) $\dfrac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{40}}$; е) $\dfrac{\sqrt[4]{648}}{\sqrt[4]{128}}$.

2.83. Вычислите:

а) $7\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}$; б) $-2\sqrt[5]{9}\cdot 5\sqrt[5]{27}$;

в) $8\sqrt[3]{10}\cdot\left(\sqrt[3]{-100}\right)$; г) $0{,}4\sqrt[4]{5}\cdot 7\sqrt[4]{125}$.

2.84. Найдите значение выражения на основании свойств корня n-й степени:

а) $\sqrt[4]{175^2-168^2}$; б) $\sqrt[3]{7-\sqrt{22}}\cdot\sqrt[3]{7+\sqrt{22}}$.

2.85. Представьте выражение $\sqrt[4]{3}$ в виде корня:

а) восьмой степени;

б) двенадцатой степени;

в) шестнадцатой степени.

2.86. Представьте в виде корней одной и той же степени числа:

а) $\sqrt[5]{7}$, $\sqrt{2}$ и $\sqrt[10]{3}$; б) $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[6]{5}$ и $\sqrt[8]{7}$.

2.87. Представьте выражение в виде корня с меньшим показателем:

а) $\sqrt[12]{3^3}$; б) $\sqrt[8]{5^6}$; в) $\sqrt[4]{7^2}$; г) $\sqrt[12]{3^6}$; д) $\sqrt[6]{27}$; е) $\sqrt[15]{32}$.

2.88. Вычислите:

а) $\sqrt[8]{25^4}$; б) $\sqrt[12]{27^4}$; в) $\sqrt[30]{81^{15}}$; г) $\sqrt[16]{10^{32}}$.

2.89. Определите, рациональным или иррациональным числом является значение выражения:

а) $\sqrt[3]{36} \cdot \sqrt[6]{36}$; б) $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[10]{4}$; в) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{5} \cdot \sqrt[12]{5}$; г) $\dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}}$.

2.90. Упростите выражение:

а) $\sqrt[4]{\sqrt[4]{b}}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{b}}$; в) $\sqrt{\sqrt[7]{b^2}}$; г) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{b^6}}$.

2.91. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{16}} \cdot \sqrt[9]{2^5}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{9}} \cdot \sqrt[6]{3^5}$; в) $\dfrac{\sqrt[21]{5}}{\sqrt[7]{\sqrt[3]{5}}} + \dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{81}}}{\sqrt[3]{9}}$.

2.92. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[8]{(-19)^8}$; б) $\sqrt[3]{(-5)^3}$; в) $\sqrt[4]{(-2)^4}$; г) $\sqrt[5]{(-11)^5}$.

2.93. Упростите выражение:

а) $\sqrt[8]{m^8}$, если $m \geqslant 0$; б) $\sqrt[4]{c^4}$, если $c < 0$;

в) $\sqrt[6]{64x^6}$, если $x \geqslant 0$; г) $\sqrt[4]{\dfrac{a^4}{81}}$, если $a < 0$;

д) $-2\sqrt[4]{625y^4}$, если $y < 0$; е) $-3b\sqrt[8]{\dfrac{b^8}{256}}$, если $b \geqslant 0$.

2.94. Представьте выражение в виде одночлена:

а) $\sqrt[3]{x^3}$; б) $-2\sqrt[5]{32b^5}$; в) $10c\sqrt[11]{-c^{11}}$; г) $3y^5\sqrt[7]{-128y^7}$.

2.95. Упростите выражение $\sqrt[4]{625c^4} - \sqrt[5]{32c^5} + \sqrt{36c^2}$ и найдите его значение при $c = -\dfrac{1}{13}$.

2.96. Упростите выражение:

а) $\sqrt[6]{a^{18}}$, если $a \geqslant 0$; б) $\sqrt[3]{27m^6}$; в) $\sqrt[6]{64a^{12}}$; г) $\sqrt[4]{\frac{a^{48}}{16}}$;

д) $-2\sqrt[4]{81b^{12}}$, если $b < 0$; е) $-8n\sqrt[8]{\frac{n^{24}}{256}}$, если $n \geqslant 0$.

2.97. Упростите выражение $\sqrt[4]{\frac{16}{81}m^8n^{20}}$, если:

а) $n \geqslant 0$; б) $n < 0$.

Объясните, почему знак значения данного выражения не зависит от знака переменной m.

2.98*. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $\sqrt[4]{(a-4)^4}$ при $a > 4$; б) $\sqrt[6]{(b+2)^6}$ при $b < -2$;

в) $\sqrt[8]{(3b+10{,}2)^8} - 10{,}2$ при $-3 \leqslant b \leqslant 3$.

2.99. Найдите сумму корней уравнения $\frac{3}{x+5} + 1 = \frac{4}{x^2+10x+25}$.

2.100. Сравните значения выражений $\frac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{10}}$ и $\frac{1}{\sqrt{14}-\sqrt{11}}$.

2.101. Зная, что $a \geqslant 0$, $b \leqslant 0$, вынесите множитель за знак корня в выражении:

а) $\sqrt{3a^2}$; б) $\sqrt{7b^2}$; в) $\sqrt{50a^6b^4}$; г) $\sqrt{\frac{49}{64}a^5b^2}$.

2.102. В выражении $a\sqrt{5}$ внесите множитель под знак корня, если:

а) $a \geqslant 0$; б) $a < 0$.

2.103. Сократите дробь $\frac{5a+2+5ab+2b}{2b-2+5ab-5a}$.

2.104. На рисунке 119 изображен график функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $[-6; 6]$. Постройте график функции:

а) $y = f(x-2)$; б) $y = f(x+1)$;

в) $y = f(x) - 3$; г) $y = f(x) + 4$.

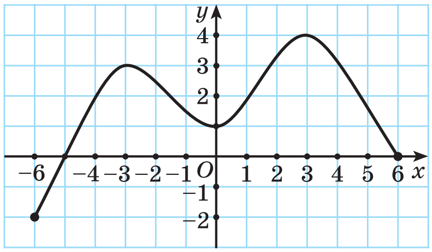

Рис. 119

2.105. Вычислите:

а) $\operatorname{tg}\left(2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$;

б) $\operatorname{ctg}\left(2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$.