

§ 15. Применение свойств корней n -й степени для преобразования выражений



2.106. Не извлекая корней, определите, какое из чисел больше: $2\sqrt{3}$ или $3\sqrt{2}$?

2.107. Упростите выражение $\sqrt{50} - 5\sqrt{8} + \sqrt{18} + 3\sqrt{2}$.

2.108. Докажите, что значение выражения $\frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}-1}$ является рациональным числом.



Вынесение множителя за знак корня

При выполнении преобразований иррациональных выражений, содержащих корни n -й степени, подкоренные выражения раскладываются на множители, некоторые из которых представляют собой степень с показателем, равным показателю корня. Тогда можно выполнить действие, которое называется **вынесением множителя за знак корня**.

Вынесем множитель за знак корня в выражении $\sqrt[3]{54}$. Для этого число 54 представим в виде произведения двух множителей, один из которых является кубом некоторого выражения. Тогда $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$. В этом случае говорят, что множитель 3 вынесли за знак корня.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{24} &= \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} = \\ &= \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{162} &= \sqrt[4]{81 \cdot 2} = \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{2} = \\ &= \sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[4]{2} = 3\sqrt[4]{2};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{96} &= \sqrt[5]{32 \cdot 3} = \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{3} = \\ &= \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{3} = 2\sqrt[5]{3}\end{aligned}$$



Чтобы вынести множитель за знак корня, нужно:

- ① Представить подкоренное выражение в виде произведения, содержащего степени выражений с показателем, равным показателю корня.
- ② Применить свойство корня из произведения.
- ③ Найти корень n -й степени из выражения в степени n .
- ④ Записать произведение полученного множителя и корня.

Вынесите множитель за знак корня в выражении $\sqrt[5]{160}$.

- ① $\sqrt[5]{160} = \sqrt[5]{32 \cdot 5} = \sqrt[5]{2^5} \cdot 5.$
- ② $\sqrt[5]{2^5 \cdot 5} = \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{5}.$
- ③ $\sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{5} = 2 \cdot \sqrt[5]{5}.$
- ④ $\sqrt[5]{160} = 2\sqrt[5]{5}.$

Внесение множителя под знак корня

При выполнении вычислений и преобразований, сравнении значений выражений иногда нужно выполнить действие, обратное действию вынесения множителя за знак корня. Оно называется **внесением множителя под знак корня**.

Внесем множитель 2 под знак корня в выражении $2\sqrt[3]{7}$.

$$2\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{8 \cdot 7} = \sqrt[3]{56}.$$

В выражении $a\sqrt[4]{b}$, где $b > 0$, $a \neq 0$, внесем множитель a под знак корня:

Если $a > 0$, то

$$a\sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{a^4 \cdot b}.$$

Если $a < 0$, то

$$a\sqrt[4]{b} = -\sqrt[4]{(-a)^4} \cdot \sqrt[4]{b} = -\sqrt[4]{a^4 \cdot b}.$$

$$4\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{4^3} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{64 \cdot 3} = \sqrt[3]{192};$$

$$3\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{81 \cdot 5} = \sqrt[4]{405}$$



Чтобы внести множитель под знак корня, нужно:

- ① Представить неотрицательный множитель в виде корня n -й степени из n -й степени этого множителя.
- ② Произведение корней заменить корнем из произведения.
- ③ Записать корень из произведения.

Внесите множитель под знак корня в выражении $5\sqrt[4]{2}$.

$$\textcircled{1} \quad 5\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{5^4} \cdot \sqrt[4]{2};$$

$$\textcircled{2} \quad \sqrt[4]{5^4} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{625 \cdot 2};$$

$$\textcircled{3} \quad \sqrt[4]{625 \cdot 2} = \sqrt[4]{1250}.$$

$$5\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{1250}.$$

Преобразование выражений, содержащих корни n -й степени

Пример 1. Найдите сумму $\sqrt[6]{4} + \sqrt[3]{250} - 2\sqrt[3]{686} - \sqrt[3]{128}$.

Решение. $\sqrt[6]{4} + \sqrt[3]{250} - 2\sqrt[3]{686} - \sqrt[3]{128} =$
 $= \sqrt[6]{2^2} + \sqrt[3]{125 \cdot 2} - 2\sqrt[3]{2 \cdot 343} - \sqrt[3]{2 \cdot 64} = \sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2} - 14\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2} = -12\sqrt[3]{2}.$

Пример 2. Упростите выражение $(\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

Решение. $(\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = ((\sqrt[4]{3})^2 - (\sqrt[4]{2})^2)(\sqrt{3} + \sqrt{2}) =$
 $= (\sqrt[4]{3^2} - \sqrt[4]{2^2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 3 - 2 = 1.$

Пример 3. Разложите на множители $2\sqrt[3]{16} + \sqrt[6]{500}$.

Решение. $2\sqrt[3]{16} + \sqrt[6]{500} = 2\sqrt[3]{8 \cdot 2} + \sqrt[6]{125 \cdot 4} = 2 \cdot 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[6]{5^3 \cdot 2^2} = 4\sqrt[3]{2} + \sqrt[6]{5^3 \cdot 2^2} = \sqrt[3]{2} \left(4 + \sqrt[3]{5} \right)$.

Пример 4*. Сократите дробь $\frac{b\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a^5}}$.

Решение. $\frac{b\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a^5}} = \frac{b\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^2}} = \frac{b\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}}{a(\sqrt[3]{a})^2} = \frac{b\sqrt[3]{b}}{a\sqrt[3]{a}}$.

Избавление от иррациональности в знаменателе дроби

Если в знаменателе дроби содержатся выражения с корнями, выполняют преобразования, которые приводят к дробям без выражений с корнями в знаменателе. Традиция такого преобразования корней, с одной стороны, связана с приближенными вычислениями, а с другой — с более удобным (рациональным) упрощением выражений.

Пример 5. Избавиться от корня в знаменателе дроби $\frac{3}{\sqrt[4]{8}}$.

Решение. $\frac{3}{\sqrt[4]{8}} = \frac{3\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{2}} = \frac{3\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{3\sqrt[4]{2}}{2}$.

Пример 6*. Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби

$$\frac{2}{(\sqrt[4]{6} - \sqrt[4]{5})(\sqrt{6} + \sqrt{5})}$$

Решение. $\frac{2}{(\sqrt[4]{6} - \sqrt[4]{5})(\sqrt{6} + \sqrt{5})} = \frac{2(\sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{5})}{(\sqrt[4]{6} - \sqrt[4]{5})(\sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{5})(\sqrt{6} + \sqrt{5})} = \frac{2(\sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{5})}{(\sqrt{6} - \sqrt{5})(\sqrt{6} + \sqrt{5})} = 2(\sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{5})$.



Примеры основных заданий и их решения

1. Вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt[5]{a^5 b^2}$; б) $\sqrt[4]{a^4 b^3}$ при $a < 0$.

Решение. а) $\sqrt[5]{a^5 b^2} = \sqrt[5]{a^5} \cdot \sqrt[5]{b^2} = a\sqrt[5]{b^2}$;

б) $\sqrt[4]{a^4 b^3} = \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{b^3} = |a|\sqrt[4]{b^3} = -a\sqrt[4]{b^3}$, так как $a < 0$.

2. Внесите множитель под знак корня:

а) $-2\sqrt[3]{2}$; б) $2a\sqrt[4]{-a}$.

Решение. а) $-2\sqrt[3]{2} = -\sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = -\sqrt[3]{2^4}$;

б) $2a\sqrt[4]{-a} = -(-2a)\sqrt[4]{-a} = -\sqrt[4]{(-2a)^4(-a)} = -\sqrt[4]{16(-a)^5} = -\sqrt[4]{-16a^5}$.

3. Упростите выражение:

а) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2}$; б) $(2\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{27}) \cdot \sqrt[4]{3} - 2\sqrt[4]{15}$.

Решение. а) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} + \sqrt[3]{27 \cdot 2} - \sqrt[3]{2} =$
 $= 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$;

б) $(2\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{27}) \cdot \sqrt[4]{3} - 2\sqrt[4]{15} = 2\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{3} - 2\sqrt[4]{15} =$
 $= 2\sqrt[4]{15} - \sqrt[4]{81} - 2\sqrt[4]{15} = -\sqrt[4]{81} = -3$.

4. Выполните действия: $(\sqrt{a} - \sqrt[4]{b})(\sqrt{a} + \sqrt[4]{b})(a + \sqrt{b})$.

Решение. $(\sqrt{a} - \sqrt[4]{b})(\sqrt{a} + \sqrt[4]{b})(a + \sqrt{b}) = \left((\sqrt{a})^2 - (\sqrt[4]{b})^2 \right) (a + \sqrt{b}) =$
 $= (a - \sqrt{b})(a + \sqrt{b}) = a^2 - b$.

5. Сократите дробь $\frac{\sqrt[6]{32} + \sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2}}$.

Решение. $\frac{\sqrt[6]{32} + \sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{8 \cdot 4} + \sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}(\sqrt{2} + 1)}{2\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$.

6. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{2}{\sqrt[4]{125}}$.

Решение. $\frac{2}{\sqrt[4]{125}} = \frac{2\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{125 \cdot 5}} = \frac{2\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{625}} = \frac{2\sqrt[4]{5}}{5}$.

7. Упростите выражение $\frac{1}{\sqrt[4]{7} - \sqrt[4]{3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{7} + \sqrt[4]{3}}$.

Решение. $\frac{1}{\sqrt[4]{7} - \sqrt[4]{3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{7} + \sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt[4]{7} + \sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{7} - \sqrt[4]{3}}{(\sqrt[4]{7} - \sqrt[4]{3})(\sqrt[4]{7} + \sqrt[4]{3})} = \frac{2\sqrt[4]{7}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} =$
 $= \frac{2\sqrt[4]{7}(\sqrt{7} + \sqrt{3})}{(\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{3})} = \frac{2\sqrt[4]{7}(\sqrt{7} + \sqrt{3})}{7 - 3} = \frac{\sqrt[4]{7}(\sqrt{7} + \sqrt{3})}{2}$.



Верно ли, что:

- а) $b\sqrt[6]{b} = \sqrt[6]{b^2}$; б) $b\sqrt[6]{b} = \sqrt[6]{b^6}$; в) $b\sqrt[6]{b} = \sqrt[6]{b^{12}}$; г) $b\sqrt[6]{b} = \sqrt[6]{b^7}$?



2.109. Пользуясь алгоритмом, вынесите множитель за знак корня:

- а) $\sqrt[3]{16}$; б) $\sqrt[3]{500}$; в) $\sqrt[4]{80}$; г) $\sqrt[4]{810}$;
 д) $\sqrt[4]{162}$; е) $\sqrt[5]{486}$; ж) $\sqrt[5]{700\,000}$; з) $\sqrt[7]{256}$.

2.110. Упростите выражение:

- а) $16\sqrt[3]{24}$; б) $\frac{5}{6}\sqrt[3]{54}$; в) $-0,5\sqrt[4]{48}$;
 г) $\frac{\sqrt[5]{200\,000}}{5}$; д) $-\frac{5\sqrt[5]{96}}{6}$; е) $-\frac{\sqrt[7]{640}}{8}$.

2.111. Вынесите множитель за знак корня:

- а) $\sqrt[4]{7a^4}$; б) $\sqrt[6]{13b^{12}}$; в) $\sqrt[4]{32m^4n^{12}}$; г) $\sqrt[3]{27ck^6d^9}$.

2.112. Укажите несколько значений переменной, для которых верно равенство:

- а) $\sqrt[4]{7k^4} = k\sqrt[4]{7}$; б) $\sqrt[6]{3p^6} = -p\sqrt[6]{3}$;
 в) $\sqrt[8]{2m^{16}} = m^2\sqrt[8]{2}$; г) $\sqrt[5]{7a^{15}} = a^3\sqrt[5]{7}$.

2.113. Зная, что $a \geq 0$, $b \leq 0$, вынесите множитель за знак корня в выражении:

- а) $\sqrt[4]{2a^4}$; б) $\sqrt[6]{7b^6}$; в) $\sqrt[4]{32a^{12}b^8}$;
 г) $\sqrt[8]{256a^{17}b^{16}}$; д) $\sqrt[10]{5a^{20}b^{40}}$; е) $\sqrt[8]{2a^{24}b^{40}}$.

2.114. Вынесите множитель за знак корня в выражении:

- а) $\sqrt[3]{5a^3}$; б) $\sqrt[3]{b^4}$; в) $\sqrt[5]{m^7}$;
 г) $\sqrt[5]{x^5y^{16}}$; д) $\sqrt[5]{a^{11}b^6}$; е) $\sqrt[3]{-54m^5n^9}$.

2.115. Вынесите множитель за знак корня:

- а) $\sqrt[4]{625m^4n}$, если $m < 0$;
 б) $\sqrt[4]{162x^{12}y^5}$, если $x \leq 0$;
 в) $\sqrt[6]{128a^{12}b^6}$, если $a > 0$, $b < 0$;
 г) $\sqrt[6]{1\,000\,000c^7d^{13}}$, если $c < 0$, $d < 0$.

2.116. Вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt[4]{a^5}$; б) $\sqrt[6]{-b^7}$; в) $\sqrt[4]{x^{13}y^{17}}$; г) $\sqrt[8]{-2m^{25}}$.

2.117. Пользуясь алгоритмом, внесите множитель под знак корня:

а) $2\sqrt[3]{5}$; б) $2\sqrt[4]{3}$; в) $2\sqrt[4]{7}$; г) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{54}$;
 д) $0,25\sqrt[4]{320}$; е) $10\sqrt[5]{0,456}$; ж) $\frac{1}{2}\sqrt[5]{96}$; з) $2\sqrt[6]{0,25}$.

2.118. Внесите множитель под знак корня:

а) $3\sqrt[4]{a}$; б) $2\sqrt[4]{5b}$; в) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{27x}$;
 г) $-3\sqrt[4]{m}$; д) $-\frac{1}{2}\sqrt[6]{160n^5}$; е) $-0,2\sqrt[5]{100c}$.

2.119. В выражении $m\sqrt[4]{2}$ внесите множитель под знак корня, если:

а) $m \geq 0$; б) $m < 0$.

2.120. Внесите множитель под знак корня:

а) $(a+1)\sqrt[4]{3}$, если $a > -1$; б) $(b-3)\sqrt[6]{5}$, если $b \leq 3$;
 в) $a\sqrt[7]{6}$; г) $b\sqrt[5]{b}$;
 д) $m\sqrt[8]{m}$; е) $n\sqrt[4]{-n}$;
 ж) $(x-1)\sqrt[8]{x-1}$; з) $(y-2)\sqrt[10]{2-y}$.

2.121. Упростите выражение:

а) $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$; б) $\sqrt[4]{a\sqrt[5]{a}}$.

2.122. Упростите выражение:

а) $2\sqrt[3]{3} + 7\sqrt[3]{3}$; б) $4\sqrt[5]{2} - 9\sqrt[5]{2}$; в) $6\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{3}$;
 г) $3\sqrt[6]{7} - \sqrt[6]{7}$; д) $7\sqrt[3]{6} - 2\sqrt[3]{6} - 4\sqrt[3]{6}$; е) $5\sqrt[8]{10} + 3\sqrt[8]{10} - 8\sqrt[8]{10}$.

2.123. Найдите сумму, разность, произведение и частное чисел:

а) $7\sqrt[3]{2}$ и $3\sqrt[3]{2}$; б) $-5\sqrt[4]{3}$ и $\sqrt[4]{3}$; в) $-\sqrt[5]{7}$ и $\sqrt[5]{7}$.

2.124. Упростите выражение:

а) $\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{3}$; б) $5\sqrt[7]{3} + \sqrt[7]{384}$;
 в) $3\sqrt[5]{64} - 4\sqrt[5]{486}$; г) $\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{16}$;
 д) $\sqrt[3]{625} - \sqrt[3]{320} + \sqrt[3]{40}$; е) $\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{16} + 0,1\sqrt[3]{2000}$.

2.125. Найдите значение выражения:

а) $(\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{32})^2$; б) $(\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{27})^2$;

$$в) (\sqrt[4]{24} - \sqrt[4]{6})^2; \quad г) (\sqrt{3} + \sqrt[4]{45})^2.$$

Верно ли, что значение выражения является рациональным числом?

2.126. Упростите выражение:

$$а) (\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{2}) \cdot \sqrt[3]{4}; \quad б) 3\sqrt[5]{3} \cdot (4\sqrt[5]{729} + \sqrt[5]{3});$$

$$в) (7\sqrt[7]{2} - 4\sqrt[7]{256}) : \sqrt[7]{2}; \quad г) (\sqrt[3]{135} + 2\sqrt[3]{320} - \sqrt[3]{40}) : (2\sqrt[3]{5}).$$

2.127. Выполните действия:

$$а) \sqrt[3]{24} + \sqrt{50} - \sqrt[3]{3} - \sqrt{72} + \sqrt{8}; \quad б) 6\sqrt[4]{5} + \sqrt{20} - \sqrt{180} - \sqrt[8]{25} + 3\sqrt{500}.$$

2.128. Определите, рациональным или иррациональным числом является значение выражения:

$$а) \frac{\sqrt[3]{4} + 5\sqrt[3]{32} - \sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}; \quad б) \frac{\sqrt[3]{3} - 4\sqrt[3]{24} + 5\sqrt[3]{375}}{\sqrt[3]{81}}.$$

2.129. Периметр прямоугольника равен $12\sqrt[4]{2}$ см, а одна из его сторон равна $3\sqrt[4]{2}$ см. Найдите площадь прямоугольника.

2.130. Площадь полной поверхности куба равна $\sqrt[3]{432}$ см². Найдите объем куба.

2.131. Вычислите:

$$а) \sqrt[3]{-2\sqrt{2}} + \sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[3]{2}; \quad б) \frac{\sqrt[4]{5 \cdot \sqrt[3]{25}}}{\sqrt[6]{25 \cdot \sqrt{5}}}.$$

2.132. Примените формулу разности квадратов и вычислите:

$$а) (1 + \sqrt{7})(1 + \sqrt[4]{7})(1 - \sqrt[4]{7}); \quad б) (\sqrt{5} + \sqrt{17})(\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{17})(\sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{17});$$

$$в) (25 + \sqrt{3})(5 + \sqrt[4]{3})(5 - \sqrt[4]{3}); \quad г) (\sqrt[4]{36} + 1)(\sqrt[8]{36} + 1)(\sqrt[8]{36} - 1).$$

2.133. Найдите значение выражения $(1 + \sqrt[6]{a})(\sqrt[6]{a} - 1)$ при $a = 27$.

2.134. Выполните действия:

$$а) (x^2 + \sqrt{y})(x - \sqrt[4]{y})(x + \sqrt[4]{y}); \quad б) (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt[4]{b} - \sqrt[4]{a})(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}).$$

2.135. При $a = \sqrt[4]{5} - 1$ найдите значение выражения:

$$а) (a + 1)^2; \quad б) a^2 + 2a.$$

2.136. Найдите значение выражения $m^2 - 10m + 9$ при $m = \sqrt[4]{49} + 5$.

2.137. Разложите на множители выражение:

$$а) \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{24}; \quad б) \sqrt[3]{3} - 3; \quad в) \sqrt[4]{5} - 15; \quad г) \sqrt[4]{45} + \sqrt{3}.$$

2.138. Представьте в виде произведения выражение:

а) $\sqrt[4]{2x} - \sqrt[4]{3y} + \sqrt[4]{2y} - \sqrt[4]{3x}$;

б) $\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{ab^3} - \sqrt[3]{a^3b} - \sqrt[3]{b^4}$.

2.139. Разложите на множители сумму:

а) $\sqrt[4]{a} + \sqrt[8]{a} - 6$; б) $\sqrt[5]{x} + 8\sqrt[10]{x} + 12$;

в) $\sqrt{n} - 4\sqrt[4]{n} + 3$; г) $2\sqrt[3]{m} - 5\sqrt[6]{m} + 2$.

2.140. Сократите дробь:

а) $\frac{\sqrt[3]{11} - 11}{\sqrt[3]{11}}$; б) $\frac{\sqrt[4]{48}}{3 + \sqrt[4]{3}}$; в) $\frac{\sqrt[3]{5} + 1}{\sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{3}}$; г) $\frac{2 - \sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{162} - 6}$.

2.141. Сократите дробь:

а) $\frac{\sqrt[3]{10a} - \sqrt[3]{15}}{\sqrt[3]{4a} - \sqrt[3]{6}}$; б) $\frac{\sqrt[4]{14} - \sqrt[4]{21b}}{\sqrt[4]{7b} - \sqrt[4]{14}}$; в) $\frac{\sqrt[5]{a^2} - \sqrt[5]{ab}}{\sqrt[5]{b^2} - \sqrt[5]{ab}}$; г) $\frac{\sqrt[4]{x^2} - \sqrt[4]{xy}}{\sqrt[4]{x^3} - \sqrt[4]{x^2y}}$.

2.142. Найдите значение выражения:

а) $\frac{4 - 3\sqrt{2}}{(\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{8})^2}$; б) $\frac{(\sqrt[4]{24} + \sqrt[4]{6})^2}{4\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{6}}$.

2.143. Сократите дробь:

а) $\frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt[4]{a} + 1}$; б) $\frac{\sqrt{a} - \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[3]{b}}$; в) $\frac{12\sqrt{x} + 3}{6\sqrt{x} - 9}$; г) $\frac{m - \sqrt[4]{m^7}}{\sqrt{m} - \sqrt[4]{m}}$.

2.144. Примените формулы сокращенного умножения и сократите дробь:

а) $\frac{\sqrt{a} - 2\sqrt[4]{a}\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[3]{b}}$; б) $\frac{\sqrt[3]{m} + 2\sqrt[3]{n}}{4\sqrt[3]{n^2} + 4\sqrt[3]{mn} + \sqrt[3]{m^2}}$.

2.145. Верно ли, что значение выражения является иррациональным числом:

а) $\frac{\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[6]{3} + 1}{(\sqrt[3]{9} + \sqrt{3})^2}$; б) $\frac{(\sqrt{3} - \sqrt[4]{45})^2}{1 - 2\sqrt[4]{5} + \sqrt{5}}$?

2.146. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{3}{\sqrt[3]{3}}$; б) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$; в) $\frac{12}{\sqrt[4]{8}}$; г) $\frac{30}{\sqrt[3]{15}}$.

2.147. Упростите выражение:

а) $\frac{20}{\sqrt[3]{25}} + \sqrt[3]{5}$; б) $\sqrt[5]{2} - \frac{24}{\sqrt[5]{16}}$.

2.148. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{1}{(\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}$; б)* $\frac{7}{\sqrt[4]{5} - \sqrt{3}}$.

2.149. Найдите значение выражения:

а) $\frac{2}{\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{3}} + \frac{2}{\sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{3}}$; б)* $\frac{\sqrt[3]{(\sqrt{101} + 10)^2}}{\sqrt[3]{10 - \sqrt{101}}} + 10$.



2.150. Пользуясь алгоритмом, вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt[3]{24}$; б) $\sqrt[3]{432}$; в) $\sqrt[4]{48}$; г) $\sqrt[4]{160}$;
 д) $\sqrt[4]{324}$; е) $\sqrt[5]{160}$; ж) $\sqrt[5]{500\,000}$; з) $\sqrt[7]{384}$.

2.151. Упростите выражение:

а) $7\sqrt[3]{16}$; б) $0,3\sqrt[3]{500}$; в) $-5\sqrt[4]{80}$;
 г) $\frac{\sqrt[5]{900\,000}}{2}$; д) $-\frac{7\sqrt[5]{486}}{3}$; е) $-\frac{\sqrt[7]{256}}{4}$.

2.152. Вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt[4]{3b^4}$; б) $\sqrt[6]{17a^{12}}$; в) $\sqrt[4]{162k^8p^4}$; г) $\sqrt[3]{8xy^9z^6}$.

2.153. Зная, что $m \leq 0$, $n \geq 0$, вынесите множитель за знак корня в выражении:

а) $\sqrt[4]{5n^4}$; б) $\sqrt[6]{7m^6}$; в) $\sqrt[4]{48m^8n^{12}}$;
 г) $\sqrt[6]{3m^6n^{13}}$; д) $\sqrt[8]{2m^{16}n^{32}}$; е) $\sqrt[10]{5m^{30}n^{50}}$.

2.154. Вынесите множитель за знак корня в выражении:

а) $\sqrt[3]{7b^3}$; б) $\sqrt[3]{a^5}$; в) $\sqrt[5]{n^6}$;
 г) $\sqrt[5]{a^5b^{18}}$; д) $\sqrt[5]{m^{12}n^7}$; е) $\sqrt[3]{-108x^7y^{10}}$.

2.155. Вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt[4]{16a^4b}$, если $a > 0$; б) $\sqrt[4]{32m^{12}n^{13}}$, если $m \leq 0$;
 в) $\sqrt[6]{729x^{13}y^{19}}$, если $x < 0$, $y < 0$.

2.156. Вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt[4]{3x^9}$; б) $\sqrt[6]{-y^{13}}$; в) $\sqrt[8]{a^{25}b^{16}}$.

2.157. Пользуясь алгоритмом, внесите множитель под знак корня:

- а) $5\sqrt[3]{2}$; б) $2\sqrt[4]{3}$; в) $3\sqrt[4]{5}$; г) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{24}$;
 д) $0,3\sqrt[4]{100}$; е) $10\sqrt[5]{0,0251}$; ж) $\frac{1}{3}\sqrt[5]{486}$; з) $0,1\sqrt[6]{7000000}$.

2.158. Внесите множитель под знак корня:

- а) $2\sqrt[4]{x}$; б) $\frac{1}{5}\sqrt[4]{1250y}$; в) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{54b}$; г) $-\frac{1}{2}\sqrt[6]{128b^5}$.

2.159. В выражении $k\sqrt[6]{3}$ внесите множитель под знак корня, если:

- а) $k > 0$; б) $k \leq 0$.

2.160. Внесите множитель под знак корня:

- а) $n\sqrt[4]{2}$, если $n \geq 0$; б) $m\sqrt[8]{7}$, если $m < 0$; в) $c\sqrt[3]{2}$;
 г) $k\sqrt[5]{k}$; д) $x\sqrt[6]{x}$; е) $(a-b)\sqrt[4]{b-a}$.

2.161. Упростите выражение:

- а) $\sqrt{b\sqrt[5]{b}}$; б) $\sqrt[5]{b\sqrt[4]{b}}$.

2.162. Упростите выражение:

- а) $5\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2}$; б) $6\sqrt[4]{3} - 9\sqrt[4]{3}$;
 в) $8\sqrt[5]{6} - \sqrt[5]{6}$; г) $9\sqrt[6]{5} + 4\sqrt[6]{5} - 14\sqrt[6]{5}$.

2.163. Найдите сумму, разность, произведение и частное чисел:

- а) $6\sqrt[3]{3}$ и $4\sqrt[3]{3}$; б) $-3\sqrt[4]{2}$ и $\sqrt[4]{2}$; в) $-2\sqrt[5]{6}$ и $2\sqrt[5]{6}$.

2.164. Упростите выражение:

- а) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{2}$; б) $4\sqrt[5]{729} - \sqrt[5]{3}$; в) $5\sqrt[7]{2} - 2\sqrt[7]{256}$;
 г) $\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{375}$; д) $\sqrt[3]{135} + 2\sqrt[3]{320} - \sqrt[3]{625}$; е) $\sqrt[3]{128} + 5\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54}$.

2.165. Найдите значение выражения:

- а) $(\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{8})^2$; б) $(\sqrt[4]{27} + \sqrt[4]{3})^2$.

2.166. Упростите выражение:

- а) $(\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{3}) \cdot \sqrt[3]{9}$; б) $4\sqrt[4]{2} \cdot (\sqrt[4]{162} - \sqrt[4]{32})$;
 в) $(2\sqrt[7]{3} - 3\sqrt[7]{384}) : \sqrt[7]{3}$; г) $(2\sqrt[3]{54} + 3\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{128}) : (5\sqrt[3]{2})$.

2.167. Выполните действия:

- а) $\frac{\sqrt[3]{192} - 2\sqrt[3]{375}}{\sqrt[3]{81}}$; б) $\frac{2\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{108} - \sqrt[3]{500}}{\sqrt[3]{4}}$.

2.168. Периметр прямоугольника равен $16\sqrt[6]{3}$ см, а одна из его сторон равна $2\sqrt[6]{3}$ см. Найдите площадь прямоугольника.

2.169. Объем куба равен $5\sqrt{5}$ см³. Найдите площадь полной поверхности куба.

2.170. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[5]{-3\sqrt{3}} + \sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[10]{3}$; б) $\frac{\sqrt[4]{7 \cdot \sqrt[3]{49}}}{\sqrt[6]{49 \cdot \sqrt{7}}}$.

2.171. Примените формулу разности квадратов и вычислите:

а) $(4 + \sqrt{5})(2 + \sqrt[4]{5})(2 - \sqrt[4]{5})$; б) $(\sqrt{10} + \sqrt{3})(\sqrt[4]{10} - \sqrt[4]{3})(\sqrt[4]{10} + \sqrt[4]{3})$.

2.172. Выполните действия:

а) $(1 + \sqrt{a})(1 - \sqrt[4]{a})(1 + \sqrt[4]{a})$; б) $(\sqrt[4]{m} - \sqrt[4]{n})(\sqrt{m} + \sqrt{n})(\sqrt[4]{m} + \sqrt[4]{n})$.

2.173. Разложите на множители:

а) $\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{54}$; б) $\sqrt[3]{2} + 2$; в) $\sqrt[4]{6} - 12$; г) $\sqrt[4]{50} + \sqrt{5}$.

2.174. Представьте в виде произведения:

а) $\sqrt[5]{7a} - \sqrt[5]{2b} + \sqrt[5]{7b} - \sqrt[5]{2a}$; б) $\sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} + 4$.

2.175. Сократите дробь:

а) $\frac{\sqrt[3]{6} - 6}{\sqrt[3]{6}}$; б) $\frac{\sqrt[5]{2} + 1}{\sqrt[5]{4} + \sqrt[5]{2}}$; в) $\frac{\sqrt[5]{64} - 2}{\sqrt[5]{4}}$; г) $\frac{\sqrt[4]{3} - 3}{6 - \sqrt[4]{48}}$.

2.176. Сократите дробь:

а) $\frac{\sqrt[3]{12x} - \sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{18x} - \sqrt[3]{6}}$; б) $\frac{\sqrt[4]{m^3} - \sqrt[4]{m^2n}}{\sqrt[4]{n} - \sqrt[4]{m}}$.

2.177. Примените формулу разности квадратов и сократите дробь:

а) $\frac{\sqrt[4]{m} - 1}{\sqrt{m} - 1}$; б) $\frac{\sqrt[5]{x^6} - 4}{\sqrt[5]{x^3} - 2}$; в) $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{b} - \sqrt[4]{a}}$; г) $\frac{\sqrt{m} - n}{\sqrt{n} - \sqrt[4]{m}}$.

2.178. Примените формулы сокращенного умножения и сократите дробь:

а) $\frac{\sqrt{a} + 2\sqrt[4]{ab^2} + b}{\sqrt[4]{a} + \sqrt{b}}$; б) $\frac{\sqrt{b} - 2a\sqrt[4]{a^2b} + a^3}{a\sqrt{a} - \sqrt[4]{b}}$.

2.179. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$; б) $\frac{6}{\sqrt[3]{9}}$; в) $\frac{16}{\sqrt[4]{2}}$; г) $\frac{21}{\sqrt[3]{7}}$.

2.180. Упростите выражение:

а) $\frac{8}{\sqrt[3]{4}} + 2\sqrt[3]{2}$; б) $\sqrt[5]{3} - \frac{15}{\sqrt[5]{81}}$.

2.181. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{14}{(\sqrt[4]{10} - \sqrt[4]{3})(\sqrt{10} + \sqrt{3})}$; б)* $\frac{12}{\sqrt[4]{5} - 1}$.

2.182. Найдите значение выражения:

а) $\frac{5}{\sqrt[4]{7} - \sqrt[4]{2}} + \frac{5}{\sqrt[4]{7} + \sqrt[4]{2}}$; б)* $\frac{\sqrt[3]{(6 + \sqrt{35})^2}}{\sqrt[3]{\sqrt{35} - 6}} + \sqrt{35}$.



2.183. Найдите значение аргумента, при котором значение функции $g(x) = 1 - x^2$ равно:

а) 0; б) 0,19; в) 1.

2.184. Для функции $h(x) = \sqrt{9 - 2x}$ найдите, если это возможно:

а) $h(0)$; б) $h(2,5)$; в) $h(-20)$; г) $h(5)$.

2.185. Найдите, во сколько раз и на сколько порядков число $1,2 \cdot 10^{10}$ больше числа $3 \cdot 10^7$.

2.186. Решите уравнение $1 - \frac{2x^2 - x - 45}{5 - x} = 0$.

2.187. Точка P_α единичной окружности имеет координаты $P_\alpha \left(\frac{1}{3}; -\frac{2\sqrt{2}}{3} \right)$. Найдите значения $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$.

2.188. Используйте метод интервалов и решите неравенство:

а) $(x + 2)(x + 5)^2(2x - 7) \leq 0$; б) $(x^2 - 6x + 5)(x^2 - 1) \geq 0$.

§ 16. Свойства и график функции $y = \sqrt[n]{x}$ ($n > 1, n \in N$)



2.189. Выберите точку, принадлежащую графику функции $y = \sqrt{x}$:

а) (3; 9); б) (16; 4); в) (9; -3); г) (16; -4).

2.190. Найдите область определения функции $y = \sqrt{(x - 5)(-x - 3)}$.

2.191. Множеством значений функции $y = 2\sqrt{x} + 5$ является промежуток:

а) $(0; +\infty)$; б) $[0; +\infty)$; в) $[5; +\infty)$; г) $(0; 5)$; д) $(5; +\infty)$.

Выберите правильный ответ.