§ 17. Иррациональные уравнения

2.241. Решите неравенство:
а) $-x \leqslant -1$; б) $x^2 \leqslant 1$.

2.242. Выберите пару равносильных уравнений:
а) $x^2 = x$ и $x - 1 = 0$; б) $x + 1 = 1$ и $(x+1)^2 = 1$;
в) $x^2 + 1 = 0$ и $2x - 3 = 2x + 5$.

Уравнения, содержащие переменную под знаком корня, называются **иррациональными**.

При решении иррациональных уравнений не всегда удается от данного уравнения перейти к равносильному ему уравнению.

Например, решим уравнение $\sqrt{x+2} = -x$ $(A = B)$.

Первый способ. Возведем обе части уравнения в квадрат, получим уравнение $2 + x = x^2$ $\left(A^2 = B^2\right)$. Оно имеет корни -1 и 2. Очевидно, что число 2 не является корнем данного уравнения, так как $\sqrt{2+2} \neq -2$, а число -1 — корень данного уравнения, так как равенство $\sqrt{-1+2} = -(-1)$ является верным.

Посторонний корень уравнения (число 2) появился оттого, что уравнение $A^2 = B^2$ равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} A = B, \\ A = -B, \end{array}\right.$ которая может иметь больше решений, чем данное уравнение $A = B$. Поэтому после возведения обеих частей уравнения в четную степень без дополнительных условий следует выполнять проверку полученных корней.

Второй способ. Уравнение $\sqrt{x+2} = -x$ равносильно системе $\begin{cases} -x \geqslant 0, \\ x + 2 = x^2. \end{cases}$ Действительно, обе части уравнения неотрицательны, поэтому при возведении в квадрат получим:

$$\sqrt{x+2} = -x \Leftrightarrow \begin{cases} -x \geqslant 0, \\ x + 2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -1, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

Третий способ. Запишем уравнение $\sqrt{x+2} = -x$ в виде $\sqrt{x+2} + x = 0$. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x+2} + x$. Эта функция возрастает на области определения, значит, данное уравнение не может иметь больше одного корня. Анализируя условие, заметим, что корень должен быть отрицательным и не превосходить по модулю число 2. Корнем данного уравнения является число –1.

Рассмотрим некоторые виды иррациональных уравнений и методы их решения.

1. Уравнение вида $\sqrt[2n]{f(x)} = a,\ n \in N$

Если $a \geqslant 0$, то $f(x) = a^{2n}$, если $a < 0$, то корней нет.

$$\sqrt[2n]{f(x)} = a,\ n \in N$$

Если $a \geqslant 0$, то $f(x) = a^{2n}$,
если $a < 0$, то корней нет

Пример 1. Решите уравнение:

а) $\sqrt[4]{x} = 3$;

б) $\sqrt[16]{x^7 - 11} = -3$;

в) $\sqrt{x^2 - 12} = 2$.

Решение. а) $\sqrt[4]{x} = 3;\ x = 3^4;\ x = 81$.

б) $\sqrt[16]{x^7 - 11} = -3$, так как $-3 < 0$, то уравнение не имеет корней.

в) $\sqrt{x^2 - 12} = 2;\ x^2 - 12 = 4;\ x^2 = 16;\ x = -4,\ x = 4$.

Ответ: а) 81; б) нет корней; в) –4; 4.

2. Уравнение вида $\sqrt[2n+1]{f(x)} = a,\ n \in N$

Уравнение $\sqrt[2n+1]{f(x)} = a,\ n \in N$ равносильно уравнению $f(x) = a^{2n+1}$.

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} = a,\ n \in N$$

$$f(x) = a^{2n+1}$$

Пример 2. Решите уравнение:

а) $\sqrt[3]{x} = 5$;

б) $\sqrt[3]{x - 7} + 2 = 0$.

Решение. а) $\sqrt[3]{x} = 5;\ x = 5^3;\ x = 125$.

б) $\sqrt[3]{x - 7} + 2 = 0;\ \sqrt[3]{x - 7} = -2;\ x - 7 = -8;\ x = -1$.

Ответ: а) 125; б) –1.

3. Уравнение вида $\sqrt[m]{f(x)} = g(x),\ m \in N, m > 1$

Пусть m — четное число.

Рассмотрим способы решения уравнения вида $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x),\ n \in N$.

П е р в ы й с п о с о б. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = (g(x))^{2n}, \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Пример 3. Решите уравнение $\sqrt{2-x}=x$.

Решение. $\sqrt{2-x}=x$; $\begin{cases} 2-x=x^2, \\ x \geqslant 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+x-2=0, \\ x \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=1, \end{array}\right. \\ x \geqslant 0; \end{cases}$ $x=1$. *Ответ*: 1.

$$\sqrt[2n]{f(x)}=g(x),\ n \in N$$

$$\begin{cases} f(x)=\left(g(x)\right)^{2n}, \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

Второй способ. Уравнение данного вида можно решить, возведя обе части уравнения в степень $2n$ с последующей проверкой корней.

Пример 4. Решите уравнение $\sqrt{x}=x-2$.

Решение. $\sqrt{x}=x-2$; $x=(x-2)^2$; $x=x^2-4x+4$; $x^2-5x+4=0$; $\left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=4. \end{array}\right.$

Проверка: при $x=1$ равенство $\sqrt{1}=1-2$ неверное; при $x=4$ равенство $\sqrt{4}=4-2$ верное. *Ответ*: 4.

Если m — нечетное число, то уравнение вида $\sqrt[2n+1]{f(x)}=g(x)$, $x \in N$, равносильно уравнению $f(x)=\left(g(x)\right)^{2n+1}$.

Пример 5. Решите уравнение $\sqrt[7]{2x^7-1}=x$.

Решение.

$\sqrt[7]{2x^7-1}=x$; $2x^7-1=x^7$; $x^7=1$; $x=1$.

Ответ: 1.

$$\sqrt[2n+1]{f(x)}=g(x),\ n \in N$$

$$f(x)=\left(g(x)\right)^{2n+1}$$

4. Уравнение вида $\sqrt[m]{f(x)}=\sqrt[m]{g(x)}$, $m \in N$, $m>1$

Пусть m — четное число.

Рассмотрим способы решения уравнения вида $\sqrt[2n]{f(x)}=\sqrt[2n]{g(x)}$, $n \in N$.

Первый способ. Данное уравнение равносильно одной из систем

$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$

Пример 6. Решите уравнение

$\sqrt{x^2+x-1}=\sqrt{x}$.

Решение.

$\sqrt{x^2+x-1}=\sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-1=x, \\ x \geqslant 0; \end{cases}$

$$\sqrt[2n]{f(x)}=\sqrt[2n]{g(x)},\ n \in N$$

$$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases} \text{ или }$$

$$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 1, \\ x \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -1, \end{array}\right. \\ x \geqslant 0; \end{cases} \quad x = 1.$$

Ответ: 1.

Второй способ. Уравнение этого вида можно решить, возведя обе части уравнения в степень $2n$ с последующей проверкой корней.

Пример 7. Решите уравнение $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x-2}$.

Решение. $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x-2}$; $2x - 3 = x - 2$; $x = 1$.

Проверка: при $x = 1$ выражения в левой и правой частях равенства $\sqrt{2 \cdot 1 - 3} = \sqrt{1-2}$ не имеют смысла, т. е. исходное уравнение не имеет корней.

Ответ: нет корней.

Если m — нечетное число, то уравнение вида $\sqrt[2n+1]{f(x)} = \sqrt[2n+1]{g(x)}$, $n \in N$, равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Пример 8. Решите уравнение $\sqrt[9]{2x^2-5} = \sqrt[9]{x^2-4}$.

Решение.

$$\sqrt[9]{2x^2-5} = \sqrt[9]{x^2-4} \Leftrightarrow 2x^2 - 5 = x^2 - 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -1. \end{array}\right.$$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} = \sqrt[2n+1]{g(x)}, \; n \in N$$

$$f(x) = g(x)$$

Ответ: –1; 1.

5. Уравнение вида $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = a$

Первый способ. Уравнение вида $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = a$ можно решить, возведя обе части уравнения в квадрат дважды с последующей проверкой найденных корней.

Пример 9. Решите уравнение $2\sqrt{x+18} + \sqrt{4x-3} = 15$.

Решение. Перенесем одно из слагаемых в правую часть, для того чтобы сократить преобразования.

$$2\sqrt{x+18} = 15 - \sqrt{4x-3};$$

$$4(x+18) = 225 - 30\sqrt{4x-3} + 4x - 3;$$

$$-150 = -30\sqrt{4x-3}; \quad 5 = \sqrt{4x-3};$$

$$25 = 4x - 3; \; x = 7.$$

$$\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = a$$

$$\left(\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}\right)^2 = a^2$$

Проверка

Проверка: $2\sqrt{7+18}+\sqrt{4\cdot 7-3}=15$; $2\cdot 5+5=15$; $15=15$. Значит, значение $x = 7$ является корнем уравнения.

Ответ: 7.

Второй способ. Некоторые уравнения этого вида можно решить, используя свойства функций.

Пример 10. Решите уравнение $\sqrt{x-3}+\sqrt{x+5}=4$.

Решение. Функция $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{x+5}$ возрастает на всей области определения, поэтому, если данное уравнение имеет корень, то только один.

При $x = 4$ данное уравнение обращается в верное числовое равенство: $\sqrt{4-3}+\sqrt{4+5}=4$. Значит, число 4 является единственным корнем данного уравнения.

Ответ: 4.

Метод замены переменной

Пример 11. Решите уравнение $\sqrt[4]{x+1}+20=\sqrt{x+1}$.

Решение. Пусть $t=\sqrt[4]{x+1}$, тогда $t^2=\sqrt{x+1}$ и уравнение принимает вид

$$t+20=t^2;\ t^2-t-20=0;\ \left[\begin{array}{l} t=5, \\ t=-4; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \sqrt[4]{x+1}=5, \\ \sqrt[4]{x+1}=-4. \end{array}\right.$$

Второе уравнение совокупности не имеет корней.

Тогда $\sqrt[4]{x+1}=5$; $x+1=625$; $x=624$.

Ответ: 624.

*Пример 12**. Решите уравнение $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$.

Решение. $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$;

$x^2+5x+4-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$.

Пусть $\sqrt{x^2+5x+2}=t$, тогда $t^2=x^2+5x+2$ и уравнение принимает вид $t^2+2-3t=6$; $t^2-3t-4=0$; $\left[\begin{array}{l} t=4, \\ t=-1. \end{array}\right.$ Так как $t \geqslant 0$, то $t = 4$, т. е. $\sqrt{x^2+5x+2}=4$; $x^2+5x+2=16$; $x^2+5x-14=0$; $\left[\begin{array}{l} x=-7, \\ x=2. \end{array}\right.$

Ответ: -7; 2.

Примеры основных заданий и их решения

1. Решите уравнение:

а) $\sqrt[6]{x-1}=2$; б) $\sqrt[8]{2x+4}+1=0$; в) $\sqrt[8]{3x-5}=0$.

Решение. а) $\sqrt[6]{x-1}=2$; $x-1=2^6$; $x-1=64$; $x=65$.

Ответ: 65.

б) $\sqrt[8]{2x+4}+1=0$; $\sqrt[8]{2x+4}=-1$, так как $-1<0$, то уравнение не имеет корней.

Ответ: нет корней.

в) $\sqrt[8]{3x-5}=0$; $3x-5=0$; $x=1\frac{2}{3}$.

Ответ: $x=1\frac{2}{3}$.

2. Решите уравнение:

а) $\sqrt[3]{x^2+2}=3$; б) $\sqrt[5]{7x-3}+1=0$; в) $\sqrt[7]{x^2-4}=0$.

Решение. а) $\sqrt[3]{x^2+2}=3$; $x^2+2=3^3$; $x^2+2=27$; $x^2-25=0$; $\left[\begin{array}{l} x=5, \\ x=-5. \end{array}\right.$

Ответ: -5; 5.

б) $\sqrt[5]{7x-3}+1=0$; $\sqrt[5]{7x-3}=-1$; $7x-3=(-1)^5$; $7x-3=-1$; $x=\frac{2}{7}$.

Ответ: $\frac{2}{7}$.

в) $\sqrt[7]{x^2-4}=0$; $x^2-4=0$; $\left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-2. \end{array}\right.$

Ответ: -2; 2.

3. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x^2+5x+1}=2x-1$; б) $\sqrt{5-x^2}=1-x$;

в) $\sqrt[5]{x^5-2x+1}-x=0$.

Решение. а) $\sqrt{x^2+5x+1}=2x-1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x+1=(2x-1)^2, \\ 2x-1\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x=0, \\ x\geqslant \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=3; \end{array}\right. \\ x\geqslant \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

Ответ: 3.

б) Возведем обе части уравнения в квадрат и получим:
$5 - x^2 = (1 - x)^2$; $5 - x^2 = 1 - 2x + x^2$; $2x^2 - 2x - 4 = 0$;
$x^2 - x - 2 = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -1. \end{array}\right.$

Проверка: при $x = -1$ получим: $\sqrt{5-(-1)^2} = 1-(-1)$; $\sqrt{4} = 2$ — верное равенство, значит, $x = -1$ — корень данного уравнения.
При $x = 2$ имеем: $\sqrt{5-2^2} = 1-2$; $\sqrt{1} = -1$ — неверное равенство, значит, $x = 2$ не является корнем данного уравнения.
Ответ: -1.

в) $\sqrt[5]{x^5-2x+1} - x = 0$; $\sqrt[5]{x^5-2x+1} = x$; $x^5 - 2x + 1 = x^5$;
$-2x + 1 = 0$; $x = 0{,}5$.
Ответ: 0,5.

4. Решите уравнение:
а) $\sqrt{x^2+x-3} = \sqrt{1-2x}$; б) $\sqrt{x^2+2x-2} = \sqrt{x}$;
в) $\sqrt[3]{2x+1} = \sqrt[3]{-x-2}$.

Решение. а) $\sqrt{x^2+x-3} = \sqrt{1-2x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-3 = 1-2x, \\ 1-2x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-4 = 0, \\ x \leqslant \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = 1, \end{array}\right. \\ x \leqslant \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = -4.$$

Ответ: -4.
б) Возведем обе части уравнения в квадрат и получим:
$x^2 + 2x - 2 = x$; $x^2 + x - 2 = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 1. \end{array}\right.$

Проверка: при $x = 1$ получим: $\sqrt{1^2+2\cdot1-2} = \sqrt{1}$, $1 = 1$ — верно, значит, $x = 1$ — корень данного уравнения. При $x = -2$ выражение $\sqrt{-2}$ не имеет смысла, т. е. $x = -2$ не является корнем данного уравнения.
Ответ: 1.
в) $\sqrt[3]{2x+1} = \sqrt[3]{-x-2}$; $2x+1 = -x-2$; $x = -1$.
Ответ: -1.

5. Решите уравнение:
а) $\sqrt{x} - \sqrt{x-5} = 1$; б) $\sqrt{5x+21} + \sqrt{3x+28} = 5$.

Решение. а) Запишем уравнение в виде $\sqrt{x} = \sqrt{x-5}+1$ и возведем обе части полученного уравнения в квадрат: $x = x-5+1+2\sqrt{x-5}$; $2\sqrt{x-5} = 4$; $\sqrt{x-5} = 2$; $x-5 = 4$; $x = 9$. С помощью проверки убедимся, что $x = 9$ является корнем исходного уравнения.
Ответ: 9.

б) Функция $y = \sqrt{5x+21}+\sqrt{3x+28}$ возрастает на всей области определения, поэтому если данное уравнение имеет корень, то только один.
При $x = -4$ данное уравнение обращается в верное числовое равенство: $\sqrt{-20+21}+\sqrt{-12+28} = 5$. Значит, число -4 является единственным корнем данного уравнения.
Ответ: -4.

6. Решите уравнение $\sqrt[3]{3-2x} = 10-3\sqrt[6]{3-2x}$.

Решение. Пусть $t = \sqrt[6]{3-2x}$, тогда $t^2 = \sqrt[3]{3-2x}$ и исходное уравнение принимает вид $t^2 = 10-3t$; $t^2+3t-10 = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} t = 2, \\ t = -5; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \sqrt[6]{3-2x} = 2, \\ \sqrt[6]{3-2x} = -5. \end{array}\right.$$

Второе уравнение совокупности не имеет корней. Тогда $\sqrt[6]{3-2x} = 2$; $3-2x = 64$; $x = -30{,}5$.

Ответ: $-30{,}5$.

?

1. Какие из уравнений не имеют корней:

а) $\sqrt{2-x} = -3$; б) $\sqrt[3]{2-x} = -3$; в) $\sqrt[6]{2-x} = -\sqrt{x}$; г) $\sqrt[7]{2+x} = -\sqrt[7]{x}$?

2. Выберите систему, равносильную уравнению вида $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x)$:

а) $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geqslant 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} f(x) = (g(x))^{2n}, \\ f(x) \geqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} f(x) = (g(x))^{2n}, \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$

2.243. Решите уравнение:

а) $\sqrt[4]{x} = 2$; б) $\sqrt[5]{x} = -1$; в) $\sqrt[6]{x-4} = 1$;

г) $\sqrt[7]{x+5} = 2$; д) $\sqrt[8]{2x-1} = -3$; е) $\sqrt[3]{4x-1} = 0$.

2.244. Решите иррациональное уравнение:

а) $\sqrt{4x-1}=5$; б) $\sqrt[3]{8x-31}=-3$; в) $\sqrt{8x-1}-3=0$;

г) $1+\sqrt[3]{7-x}=0$; д) $2\sqrt[4]{-3x-2}=1$; е) $5\sqrt[5]{9-2x}=10$.

2.245. Решите уравнение:

а) $\sqrt[3]{x^2-31}=-3$; б) $\sqrt[4]{x^2-6x+16}=2$;

в) $\sqrt{3x^2-x-15}=3$; г) $\sqrt{16x^2+16x+29}=5$;

д) $\sqrt{23+3x-5x^2}=3$; е) $\sqrt[3]{x^2+14x-16}=-4$.

2.246. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций:

а) $y=\sqrt[4]{2x+7}$ и $y=4$; б) $y=\sqrt[3]{x^2-15x+6}$ и $y=-2$.

2.247. Решите уравнение:

а) $0{,}5\sqrt{16-\sqrt{x+1}}=2$; б) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{2-x}+9}}{3}=1$;

в) $\sqrt{7+\sqrt[3]{x^2+7}}=3$; г) $\sqrt[3]{25+\sqrt{x^2+3}}-3=0$.

2.248. Решите уравнение двумя способами:

а) $\sqrt{x+2}=x-4$; б) $\sqrt{3-2x}=-x$; в) $\sqrt{x+2}-3x=4$.

2.249. Найдите значения переменной, при которых равны значения выражений:

а) $\sqrt{x-2}$ и $x-2$; б) $\sqrt{20-x}$ и $-10-x$; в) $x+2$ и $2\sqrt{x+5}$.

2.250. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций:

а) $y=\sqrt{2x^2-3x-10}$ и $y=x$; б) $y=\sqrt{2x^2+5x+4}$ и $y=2x+2$;

в) $y=\sqrt{8-3x-x^2}$ и $y=-x-2$.

2.251. Решите уравнение:

а) $\sqrt[3]{x^3-x^2+4}=x$; б) $\sqrt[5]{2-7x-x^5}=-x$;

в) $\sqrt[3]{x^3+x^2-5x+4}=x$.

2.252. Найдите нули функции:

а) $y=\sqrt{12-x}-x$; б) $y=\sqrt{1+4x-x^2}-x+1$;

в) $y=\sqrt{3x^2-3x+21}-x+5$.

2.253. Верно ли, что равносильны уравнения:

а) $\sqrt{5x+4}=\sqrt{2x-5}$ и $5x+4=2x-5$;

б) $\sqrt[3]{x^2-5x+1}=\sqrt[3]{x-4}$ и $x^2-5x+1=x-4$;

в) $\sqrt[4]{x^2+x-3}=\sqrt[4]{1-2x}$ и $x^2+x-3=1-2x$?

2.254. Решите уравнение:

а) $\sqrt{2x+5}=\sqrt{4x+1}$; б) $\sqrt[3]{2x+1}=\sqrt[3]{8-x}$;

в) $\sqrt[4]{2x-3}=2\sqrt[4]{x+3}$; г) $\sqrt{x^2-36}-\sqrt{2x-1}=0$;

д) $\sqrt{x^2+4x-16}=\sqrt{2x-1}$; е) $\sqrt[8]{x^2-4x+5}=\sqrt[8]{x-1}$.

2.255. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций:

а) $y=\sqrt{6x^2-3x-1}$ и $y=\sqrt{2x-1}$;

б) $y=\sqrt{6x^2+2x-10}$ и $y=\sqrt{x^2-x-2}$.

2.256. Решите двумя способами уравнение $\sqrt[10]{-x^2-13x-9}=\sqrt[10]{-7x-9}$.

2.257. Найдите корни уравнения:

а) $\sqrt{2x+6}-\sqrt{x+1}=2$; б) $\sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}=4$;

в) $2\sqrt{2-x}-\sqrt{7-x}=1$; г) $\sqrt{3x-2}+\sqrt{2x+5}=5$;

д) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=\sqrt{2}$; е) $\sqrt{x-3}+\sqrt{6-x}=\sqrt{3}$.

Для решения каких уравнений рационально применять функциональный подход?

2.258. Решите уравнение, используя свойства функций:

а) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4$; б) $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7$;

в) $2\sqrt{x-1}=8-\sqrt{x-6}$; г) $\sqrt{13-4x}+\sqrt{1-x}=3$.

2.259. Найдите абсциссы точек пересечения графика функции:

а) $y=\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x}$ и прямой $y=3$;

б) $y=3\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}$ и прямой $y=7$.

2.260. Решите уравнение с помощью метода замены переменной:

а) $\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}-6=0$; б) $\sqrt[3]{x}+5\sqrt[6]{x}=6$;

в) $\sqrt{x+3}-3\sqrt[4]{x+3}+2=0$; г) $\sqrt[3]{x+15}-\sqrt[6]{x+15}=2$;

д) $x^2+7+\sqrt{x^2+7}=20$; е) $x^2+2x+\sqrt{x^2+2x+8}=12$.

2.261. Найдите корни уравнения:

а) $\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x+3}}+\sqrt[3]{\dfrac{x+3}{x-2}}=4{,}25$; б) $\sqrt{x^2+x+3}+1=\dfrac{12}{\sqrt{x^2+x+3}}$.

2.262. Верно ли, что равносильны уравнения $\sqrt{3-x}\sqrt{2-x}=\sqrt{2}$ и $\sqrt{(3-x)(2-x)}=\sqrt{2}$?

2.263. Найдите корни уравнения:

а) $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x-5}=2$; б) $\sqrt{x-1}\sqrt{x+4}=\sqrt{6}$;

в) $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x+6}=x+3$; г) $\frac{2}{\sqrt{2-x}}=\frac{\sqrt{x+6}}{x+4}$.

2.264*. Решите уравнение $(x-3)(x-2)-4\sqrt{x^2-5x+1}=10$.

2.265. Решите уравнение:

а) $\sqrt{3x+4}=7$; б) $2\sqrt[3]{x+8}-1=0$;

в) $\sqrt[5]{4-x^2}=-2$; г) $\sqrt[4]{x^2-3x+81}=3$;

д) $\sqrt{2x^2-5x+11}=3$; е) $\sqrt[4]{4x^2+6x-2}=2$;

ж) $\sqrt[3]{x^2+4x-50}=3$; з) $\sqrt{9x^2-12x+85}=9$.

2.266. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций:

а) $y=\sqrt[6]{5-3x}$ и $y=2$; б) $y=\sqrt[5]{4x-x^2}$ и $y=-2$.

2.267. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x-2}=8-x$; б) $\sqrt{x-3}=x-3$; в) $\sqrt{x-2}+4=x$;

г) $\sqrt{5-4x}+5=4x$; д) $x-1=\sqrt{x+5}$; е) $\sqrt{8-x}=-12-x$.

2.268. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций:

а) $y=\sqrt{3x^2-11x-20}$ и $y=x-5$; б) $y=\sqrt{2x^2-x+1}$ и $y=x+3$.

2.269. Решите уравнение:

а) $\sqrt[3]{8x^3+x^2-9}=2x$; б) $\sqrt[7]{9-4x-x^7}=-x$.

2.270. Найдите нули функции:

а) $y=\sqrt{x+3}-x+3$; б) $y=\sqrt{2x^2-7x+5}+x-1$.

2.271. Решите уравнение:

а) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{x-3}$; б) $\sqrt[5]{7-2x}=\sqrt[5]{x+3}$;

в) $\sqrt[4]{2x+7}=3\sqrt[4]{x+1}$; г) $\sqrt{x^2-16}-\sqrt{14+x}=0$;

д) $\sqrt{x^2-5x+1}=\sqrt{x-4}$; е) $\sqrt[6]{x^2+x-3}=\sqrt[6]{1-2x}$.

2.272. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций:

а) $y = \sqrt{7x^2 + x - 2}$ и $y = \sqrt{7x - 2}$;

б) $y = \sqrt{3x^2 + 4x - 14}$ и $y = \sqrt{x^2 - x - 2}$.

2.273. Найдите корни уравнения:

а) $\sqrt{x+5} - \sqrt{x} = 1$; б) $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = 1$;

в) $2\sqrt{3x+2} - \sqrt{6x} = 2$; г) $\sqrt{2x-1} - \sqrt{x-1} = 1$.

2.274. Решите уравнение, используя свойства функций:

а) $\sqrt{3x-2} + \sqrt{2x+5} = 5$; б) $\sqrt{x+4} + \sqrt{2x+6} = 7$;

в) $\sqrt{3x-5} = 3 - \sqrt{x-2}$; г) $\sqrt{15-x} + \sqrt{3-x} = 6$.

2.275. Найдите абсциссы точек пересечения графика функции $y = \sqrt{5x+1} + \sqrt{7-x}$ и прямой $y = 6$.

2.276. Решите уравнение с помощью метода замены переменной:

а) $\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} - 12 = 0$; б) $\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[6]{x} = 3$;

в) $\sqrt{x-7} - 5\sqrt[4]{x-7} + 4 = 0$; г) $\sqrt[3]{x+3} + \sqrt[6]{x+3} = 2$;

д) $x^2 - 12 - 2\sqrt{x^2-12} = 8$; е) $x^2 + 5x = 5\sqrt{x^2+5x+28} - 4$.

2.277. Найдите корни уравнения:

а) $\sqrt{\frac{3x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{3x}} = \frac{5}{2}$; б) $\sqrt[3]{\frac{x}{x-7}} + \sqrt[3]{\frac{x-7}{x}} = \frac{10}{3}$.

2.278. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x+6} \cdot \sqrt{x+1} = 6$; б) $\sqrt{3x-5} \cdot \sqrt{x-2} = x - 1$;

в) $\frac{x+3}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{2x+6}$.

2.279. Функция $f(x)$ задана формулой $f(x) = x^2 - 4x$. Найдите: $f(2)$; $f(-2)$; $f(0)$; $f(0{,}5)$.

2.280. Решите неравенство $\frac{8x+3}{16} - \frac{2x-5}{3} \geqslant \frac{11-7x}{12}$.

2.281. Вычислите:

а) $\cos\frac{7\pi}{4}$; б) $\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$; в) $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{4}$; г) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{23\pi}{3}\right)$.

2.282. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy + 4, \\ x + y = 6. \end{cases}$

2.283. Сократите дробь $\frac{x^2 - 2x - 35}{25 - x^2}$.

2.284. Приведите к стандартному виду $\left(2\frac{1}{2}a^4b^8\right)^2 \cdot \left(-1\frac{2}{7}a^5b^{12}\right)$.

2.285. Используйте метод замены переменной и решите уравнение $4(x - 7)^4 + 3(x - 7)^2 - 1 = 0$.

Итоговая самооценка

После изучения этой главы я должен:

- знать и уметь применять определение корня n-й степени из числа;
- знать и уметь применять определение арифметического корня n-й степени из числа;
- знать и уметь применять свойства корней n-й степени из числа;
- уметь строить графики функций $y = \sqrt[n]{x}$, $n \in N$, $n > 1$ и выполнять их преобразования;
- уметь решать иррациональные уравнения;
- владеть различными способами анализа и моделирования учебных и практических ситуаций.

Я проверяю свои знания

1. Среди данных выражений выберите выражения, имеющие смысл:
а) $\sqrt[8]{2}$; б) $\sqrt[6]{-11}$; в) $\sqrt[5]{7}$; г) $\sqrt[3]{-5}$; д) $\sqrt[10]{0}$; е) $\sqrt[9]{-1}$.

2. Выберите функцию, график которой изображен на рисунке 124:

а) $y = x^3$; б) $y = \sqrt[3]{x}$; в) $y = 3x$; г) $y = \frac{3}{x}$.

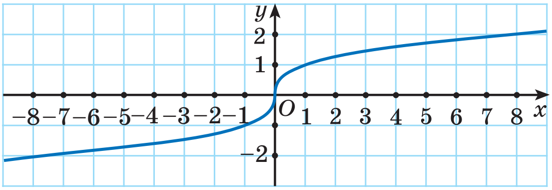

Рис. 124

3. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{27} - \sqrt[4]{16}$; б) $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}} + \sqrt[4]{1}$;

в) $\sqrt[7]{128} : \sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$; г) $\sqrt[3]{0,008} - \left(\sqrt[4]{3}\right)^4$.

4. Решите уравнение:

а) $\sqrt[4]{2x+1} = 3$; б) $\sqrt[5]{-2x-5} = -1$;

в) $\sqrt[6]{x^2 - 2x + 61} = 2$; г) $\sqrt[3]{x^2 - x - 131} = -5$.

5. Сравните числа:

а) $\sqrt{5}$ и $\sqrt[3]{10}$; б) $\sqrt[10]{29}$ и $\sqrt[5]{3\sqrt{3}}$; в) $\sqrt{\sqrt[3]{2}}$ и $\sqrt[5]{\sqrt{3}}$.

6. Решите уравнение:

а) $\sqrt{2x^2 - x - 6} = -x$; б) $\sqrt{x^2 - 4x + 5} = \sqrt{x - 1}$;

в) $\sqrt{2x+4} - \sqrt{7-x} = 3$; г) $2\sqrt{x-2} - \sqrt[4]{x-2} = 15$.

7. Упростите выражение:

а) $\left(0,8\sqrt[4]{x} + 2\sqrt{y}\right)^2 - \left(0,8\sqrt[4]{x} - 2\sqrt{y}\right)^2$;

б) $\left(\sqrt[4]{x} - 2\sqrt[4]{y}\right)\left(\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[4]{y}\right) + 4\sqrt[8]{y^7} : \sqrt[8]{y^3}$.

8. Найдите область определения функции:

а) $f(x) = \sqrt[8]{x^2 - 9x + 8}$; б) $f(x) = \sqrt[4]{3 - 8x} + \frac{7}{\sqrt[5]{x+1}}$;

в) $f(x) = \sqrt[8]{x+5} - \frac{9}{\sqrt[4]{9-7x}}$; г) $f(x) = \sqrt[10]{25 - x^2} + \sqrt[6]{x^2 - 6x + 5}$.

9. Внесите множитель под знак корня:

а) $2a\sqrt[6]{-a}$; б) $-m\sqrt[5]{m^3}$;

в) $-y\sqrt[6]{-y^7}$; г) $(y-2)\sqrt[4]{4-2y}$.

10. Решите уравнение $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-1} = 4 - 3x - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 1}$.

Дополнительные материалы к учебному пособию «Алгебра, 10» можно найти на сайте http://e-vedy.adu.by, курс «Математика. 10 класс».