Глава 3

ПРОИЗВОДНАЯ

§ 18. Определение производной функции

3.1. Из городов A и B навстречу друг другу одновременно вышли два поезда. Двигаясь без остановок с постоянной скоростью, они встретились через 30 ч после выхода. Сколько времени затратил на прохождение пути AB каждый поезд, если известно, что первый прибыл в город B на 25 ч позже, чем второй прибыл в город A?

3.2. Две бригады, работая вместе, обработали участок земли за 12 ч. За какое время могла бы обработать этот участок каждая из бригад в отдельности, если скорости выполнения работы бригадами относятся как 3 : 2?

3.3. Уборку урожая с участка начал один комбайн. Через 2 ч к нему присоединился другой комбайн, и через 8 ч совместной работы они убрали 80 % урожая. За сколько часов мог бы убрать урожай с участка каждый комбайн в отдельности, если известно, что одному на это необходимо на 5 ч больше, чем другому?

В задачах на процессы (движения, работы, планирования и т. д.), как правило, скорость рассматриваемого процесса предполагается постоянной на всем указанном в условии задачи промежутке времени.

Формула, выражающая связь между s (пройденным путем) и t (временем движения) при постоянной скорости движения (v) имеет вид $s = vt$.

Эта зависимость s от t линейная, ее график удобно изображать в системе координат (рис. 125): горизонтальная ось — ось времени (t), вертикальная ось — ось пройденного пути (s).

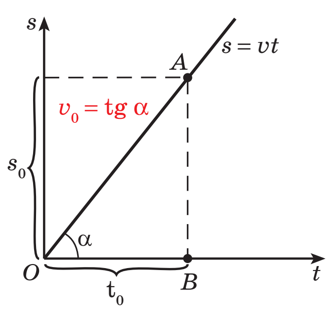


Рис. 125

Графиком линейной зависимости $s = vt$ является прямая.

Заметим, что пройденный путь (s_0) численно равен длине отрезка AB, время t_0 численно равно длине отрезка OB. Из прямоугольного треугольника OAB отношение катета, противолежащего острому углу α, к прилежащему катету равно тангенсу угла α, то есть

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{s_0}{t_0} = v_0.$$

Таким образом, делением пройденного пути на затраченное на этот путь время находится v_0 — средняя скорость.

Тангенс угла α равен численному значению скорости протекания процесса, а угол наклона прямой OA к оси абсцисс характеризует скорость процесса движения.

В реальных процессах скорость движения (других процессов) не является постоянной даже на небольшом промежутке времени. В физике рассматривается как понятие **средней скорости,** модуль которой равен отношению модуля перемещения ко всему времени перемещения, так и **мгновенной скорости.**

Рассмотрим алгоритм вычисления этих величин.

Пусть функция $s(t)$ — зависимость пройденного пути от времени — задана графически (рис. 126).

① Выберем t_0 — начальный момент времени.

② Найдем $s(t_0)$ — расстояние (пройденный путь) в момент t_0 от начала отсчета.

③ Выберем Δt — некоторый промежуток времени.

④ Получим $t_0 + \Delta t$ — новый момент времени.

⑤ Отметим $s(t_0 + \Delta t)$ — расстояние в момент времени $t_0 + \Delta t$ от начала отсчета.

⑥ Найдем Δs — расстояние, пройденное за промежуток времени Δt:

$$\Delta s = s\left(t_0 + \Delta t\right) - s\left(t_0\right).$$

⑦ Найдем **среднюю скорость** движения на промежутке Δt:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

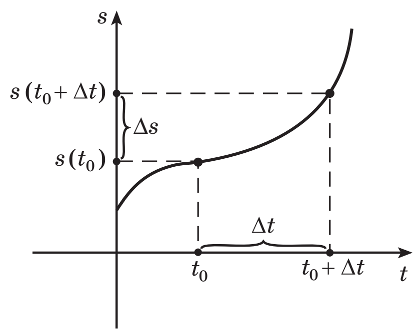


Рис. 126

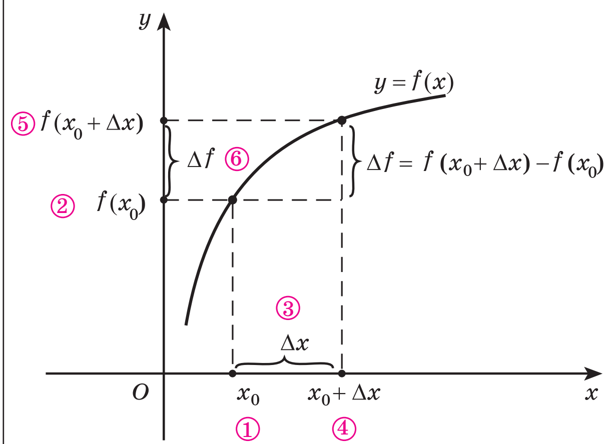
⑧ Если промежуток Δt бесконечно уменьшается, говорят «стремится к нулю» ($\Delta t \to 0$), то средняя скорость $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ стремится к **мгновенной скорости** ($v_{\text{ср}} \to v_{\text{мгн}}$).

Мгновенная скорость фиксируется при движении автомобиля на трассе с помощью приборов фиксации скорости, например радара.

По аналогии со средней и мгновенной скоростями процесса движения в математике рассматриваются средняя и мгновенная скорости изменения различных функций.

Для вычисления значений этих величин рассмотрим, как изменяется значение функции при переходе от одного значения аргумента к другому, иначе говоря, найдем **приращение функции**.

Для того чтобы вычислить приращение функции $y = f(x)$, нужно:

① Выбрать некоторое значение аргумента x_0 — первоначальное значение аргумента. ② Найти $f(x_0)$ — первоначальное значение функции. ③ Изменить значение аргумента, для этого выбрать Δx — приращение аргумента. ④ Получить $x_0 + \Delta x$ — наращенное значение аргумента. ⑤ Найти наращенное значение функции $f(x_0 + \Delta x)$. ⑥ Найти приращение функции $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.	Проиллюстрируем этапы нахождения приращения функции на графике. 

Например, используя алгоритм, найдем приращение функции $f(x) = x^2$ при переходе от x_0 к $x_0 + \Delta x$.

① Выберем некоторое значение аргумента x_0 — первоначальное значение аргумента.

② Найдем $f(x_0)$ — первоначальное значение функции: $f(x_0) = x_0^2$.

③ Изменим значение аргумента. Выберем Δx — приращение аргумента.

④ Получим $x_0 + \Delta x$ — наращенное значение аргумента.

⑤ Найдем наращенное значение функции:

$$f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2.$$

⑥ Найдем приращение функции:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2.$$

Пример 1. Найдите значение приращения функции $f(x) = x^2$, если:

а) $x_0 = 1$; $\Delta x = 0{,}5$; б) $x_0 = 2$; $\Delta x = 0{,}5$;
в) $x_0 = 1$; $\Delta x = 0{,}1$; г) $x_0 = -1$; $\Delta x = 0{,}1$.

Решение. Подставим данные значения x_0 и Δx в найденное выражение $\Delta f = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$ для $f(x) = x^2$.

а) При $x_0 = 1$ и $\Delta x = 0{,}5$ получим

$$\Delta f = 2x_0\Delta x + \Delta x^2 = 2 \cdot 1 \cdot 0{,}5 + 0{,}25 = 1{,}25;$$

б) при $x_0 = 2$ и $\Delta x = 0{,}5$ получим

$$\Delta f = 2x_0\Delta x + \Delta x^2 = 2 + 0{,}25 = 2{,}25;$$

в) при $x_0 = 1$ и $\Delta x = 0{,}1$ получим

$$\Delta f = 2x_0\Delta x + \Delta x^2 = 0{,}2 + 0{,}01 = 0{,}21;$$

г) при $x_0 = -1$ и $\Delta x = 0{,}1$ получим

$$\Delta f = 2x_0\Delta x + \Delta x^2 = -0{,}2 + 0{,}01 = -0{,}19.$$

Заметим, что приращение функции зависит от первоначального значения аргумента и от приращения аргумента.

Для функции $f(x) = x^2$ найдем отношение приращения функции к приращению аргумента при переходе от x_0 к $x_0 + \Delta x$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x.$$

Пусть Δx бесконечно уменьшается, т. е. Δx стремится к нулю, тогда отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$ стремится к $2x_0$ $\left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \to 2x_0 \text{ при } \Delta x \to 0\right)$, которое уже не зависит от приращения Δx.

При $x_0 = 2$ это число равно 4, при $x_0 = 1$ это число равно 2 и т. д.

Определение. Производной функции $y = f(x)$ в точке называется число, к которому стремится отношение приращения функции к приращению аргумента $\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)$ при приращении аргумента (Δx), стремящемся к нулю.

Производная функции обозначается $f'(x)$ и читается «эф штрих от x».

Поскольку для функции $f(x) = x^2$ отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$ стремится к $2x_0$ при Δx, стремящемся к нулю, то производная этой функции в точке x_0 равна $2x_0$.

Можно записать $\left(x^2\right)' = 2x$ (так как x_0 — произвольная точка, то индекс в обозначении $2x_0$ можно опустить). Производная при данном значении x есть число. Если производная данной функции существует для каждого x из некоторого промежутка, то она является функцией от x.

Для того чтобы найти производную функции $y = f(x)$, нужно:

① Найти приращение функции при переходе от x_0 к $x_0 + \Delta x$.	Найдите производную функции $f(x) = \frac{1}{x}$. ① $f(x_0) = \frac{1}{x_0}$; $f(x_0 + \Delta x) = \frac{1}{x_0 + \Delta x}$, тогда $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0}$; $\Delta f = \frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{x_0(x_0 + \Delta x)} = \frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}$.
② Найти $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ — отношение приращения функции к приращению аргумента.	② $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)} : \Delta x = \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)} = -\frac{1}{x_0^2 + x_0 \Delta x}$.
③ Найти производную функции $f'(x_0)$ — число, к которому стремится $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при условии, что Δx стремится к нулю.	③ При $\Delta x \to 0$ получим, что $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to -\frac{1}{x_0^2}$. Таким образом, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

Пример 2. Найдите производную функции $f(x) = 5x - 9$.

Решение. ① $f(x_0) = 5x_0 - 9$; $f(x_0 + \Delta x) = 5(x_0 + \Delta x) - 9$, тогда

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (5(x_0 + \Delta x) - 9) - (5x_0 - 9)$;

$\Delta f = 5(x_0 + \Delta x) - 9 - 5x_0 + 9$;

$\Delta f = 5(x_0 + \Delta x) - 5x_0$;

$\Delta f = 5x_0 + 5\Delta x - 5x_0$;

$\Delta f = 5\Delta x$.

② $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{5\Delta x}{\Delta x} = 5$.

③ Отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ не зависит от Δx, оно постоянно и равно 5, т. е. при $\Delta x \to 0$ получим, что $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to 5$.

Таким образом, $(5x - 9)' = 5$.

Пример 3. Найдите производную функции $f(x) = \frac{1}{x}$ в точке $x = 2$.

Решение. Так как $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, то подставим в выражение $-\frac{1}{x^2}$ значение $x = 2$.

Принятое обозначение: $f'(2) = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$.

Вернемся к мгновенной скорости движения. При Δt, стремящемся к нулю, средняя скорость стремится к мгновенной ($v_{ср} \to v_{мгн}$ при $\Delta t \to 0$), следовательно, мгновенная скорость является производной функции $s(t)$.

Пример 4. Закон движения задан функцией $s(t) = t^2 - t$. Найдите скорость движения в момент времени $t = 3$.

Решение. Так как мгновенная скорость $(v_{мгн})$ движения, заданного функцией $s(t)$, равна производной этой функции в точке, то найдем производную функции $s(t) = t^2 - t$, т. е. $s'(t)$.

① Найдем приращение функции при переходе от t_0 к $t_0 + \Delta t$.

$s(t_0) = t_0^2 - t_0$; $s(t_0 + \Delta t) = (t_0 + \Delta t)^2 - (t_0 + \Delta t)$, тогда

$\Delta s = s(x_0 + \Delta x) - s(x_0) = \left((t_0 + \Delta t)^2 - (t_0 + \Delta t)\right) - (t_0^2 - t_0)$;

$\Delta s = (t_0 + \Delta t)^2 - (t_0 + \Delta t) - t_0^2 + t_0$;

$\Delta s = t_0^2 + 2t_0\Delta t + \Delta t^2 - t_0 - \Delta t - t_0^2 + t_0$;

$\Delta s = 2t_0\Delta t + \Delta t^2 - \Delta t$.

② $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2t_0\Delta t + \Delta t^2 - \Delta t}{\Delta t} = 2t_0 + \Delta t - 1$.

③ При $\Delta t \to 0$ получим, что $\frac{\Delta s}{\Delta t} \to 2t_0 - 1$.

Таким образом, $s'(t) = (t^2 - t)' = 2t - 1$, т. е. $v_{мгн} = s'(t) = 2t - 1$.

Скорость движения в момент времени $t = 3$ равна $s'(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$.

Вообще говоря, если изменение какой-то величины задается функцией $y = f(t)$, то мгновенная скорость изменения этой величины при $t = t_0$ равна $f'(t_0)$, или коротко: производная есть скорость изменения функции.

Примеры основных заданий и их решения

1. Найдите приращение функции при переходе от x_0 к $x_0 + \Delta x$, если:

а) $f(x) = x^2 - 5$; б) $f(x) = 2x + 3$.

Решение. а) ① Выберем некоторое значение аргумента x_0 — первоначальное значение аргумента.

② Найдем $f(x_0)$ — первоначальное значение функции: $f(x_0) = x_0^2 - 5$.

③ Изменим значение аргумента. Выберем Δx — приращение аргумента.

④ Получим $x_0 + \Delta x$ — наращенное значение аргумента.

⑤ Найдем наращенное значение функции:

$$f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 - 5 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 5.$$

⑥ Найдем приращение функции:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0);$$

$$\Delta f = \left(x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 5\right) - \left(x_0^2 - 5\right);$$

$$\Delta f = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 5 - x_0^2 + 5; \quad \Delta f = 2x_0\Delta x + \Delta x^2.$$

б) $f(x_0) = 2x_0 + 3;$ $f(x_0 + \Delta x) = 2(x_0 + \Delta x) + 3,$ тогда

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \left(2(x_0 + \Delta x) + 3\right) - (2x_0 + 3);$$

$$\Delta f = 2(x_0 + \Delta x) + 3 - 2x_0 - 3; \quad \Delta f = 2(x_0 + \Delta x) - 2x_0;$$

$$\Delta f = 2x_0 + 2\Delta x - 2x_0; \quad \Delta f = 2\Delta x.$$

2. Найдите отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$, если:

а) $f(x) = x^2 - 5;$ б) $f(x) = 2x + 3.$

Решение. Воспользуемся результатами предыдущего задания и получим:

а) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x;$ б) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{2\Delta x}{\Delta x} = 2.$

3. Определите, к чему стремится отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ для функции:

а) $f(x) = x^2 - 5;$ б) $f(x) = 2x + 3,$ — если Δx стремится к нулю ($\Delta x \to 0$).

Решение. Используем результаты предыдущего задания и получим:

а) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x,$ так как второе слагаемое в сумме стремится к нулю, то сумма стремится к $2x_0$, т. е. при $\Delta x \to 0$ получим, что $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to 2x_0$.

б) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 2,$ так как отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ не зависит от Δx, то оно постоянно и равно 2. Таким образом, при $\Delta x \to 0$ получим, что $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to 2.$

4. Найдите производную функции:

а) $f(x) = x^2 - 5$; б) $f(x) = 2x + 3$.

Решение. Так как производная функции равна числу, к которому стремится $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, то, используя результаты предыдущего задания, получим:

а) $f'(x) = \left(x^2 - 5\right)' = 2x$; б) $f'(x) = (2x + 3)' = 2$.

5. Вычислите производную функции:

а) $f(x) = x^2 - 5$; б) $f(x) = 2x + 3$ — в точке $x = 4; -2; 0; 0{,}5$.

Решение. Воспользуемся результатами, полученными в предыдущем задании.

а) Так как $f'(x) = 2x$, то подставим значения переменной x в выражение $2x$ и получим:

$f'(4) = 2 \cdot 4 = 8$; $f'(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$;

$f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$; $f'(0{,}5) = 2 \cdot 0{,}5 = 1$;

б) $f'(x) = (2x + 3)' = 2$, так как производная функции $f(x) = 2x + 3$ равна 2 и не зависит от x, то при любом значении переменной ее значение равно 2, т. е. $f'(4) = f'(-2) = f'(0) = f'(0{,}5) = 2$.

6. Закон движения задан функцией:

а) $s(t) = t^2 - 5$; б) $s(t) = 2t + 3$.

Найдите скорость движения в момент времени $t = 5$.

Решение. а) Так как мгновенная скорость движения, заданного функцией $s(t)$, равна производной этой функции, то

$v_{\text{мгн}} = s'(t) = \left(t^2 - 5\right)' = 2t$. В момент $t = 5$ найдем ее значение:

$v_{\text{мгн}} = s'(5) = 2 \cdot 5 = 10$.

б) Так как $v_{\text{мгн}} = s'(t) = (2t + 3)' = 2$ не зависит от t, то в любой момент времени она равна 2.

7. Найдите производную линейной функции $f(x) = kx + b$.

Решение. ① $f(x_0) = kx_0 + b$; $f(x_0 + \Delta x) = k(x_0 + \Delta x) + b$, тогда

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (k(x_0 + \Delta x) + b) - (kx_0 + b);$

$\Delta f = k(x_0 + \Delta x) + b - kx_0 - b; \quad \Delta f = k(x_0 + \Delta x) - kx_0;$

$\Delta f = kx_0 + k\Delta x - kx_0; \quad \Delta f = k\Delta x.$

② $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k.$

③ Так как отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ не зависит от Δx, то оно постоянно и равно k, значит, $f'(x) = (kx + b)' = k.$

8. Используйте результат предыдущего задания и найдите производную функции:

а) $f(x) = 3x + 5;$ б) $f(x) = x.$

Решение. а) $f(x) = 3x + 5,$ так как $k = 3,$ то $(3x + 5)' = 3;$

б) $f(x) = x,$ так как $k = 1,$ то $(x)' = 1.$

9. Найдите производную постоянной функции $y = C.$

Решение. $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = C - C = 0,$ поэтому $C' = 0.$

Верно ли, что:

а) $(3x + 4)' = 3;$ б) $(-3 + 5x)' = 5;$ в) $(-7x)' = -7;$ г) $6' = 0$?

3.4. По графику функции $y = x^2$ (рис. 127) определите приращение функции при переходе от значения аргумента:

а) 1 к значению 2;
б) 1 к значению 1,5;
в) -2 к значению $-0,5$.

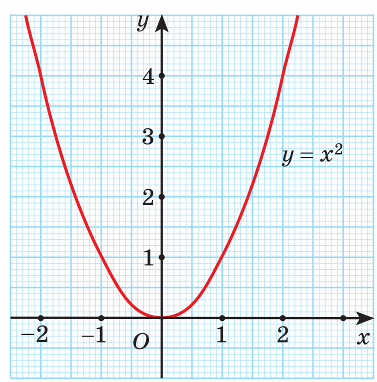


Рис. 127

3.5. Найдите с помощью алгоритма приращение функции $y = x^2$ при переходе от значения аргумента:

а) 1 к значению 2;
б) 1 к значению 1,5;
в) -2 к значению $-0,5$.

3.6. Найдите с помощью алгоритма приращение функции при переходе от x_0 к $x_0 + \Delta x$, если:

а) $f(x) = x^2 + 1$; б) $f(x) = -3x + 2$; в) $f(x) = 3x^2$; г) $f(x) = \frac{8}{x}$.

3.7. Найдите отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, если:

а) $f(x) = x^2 + 1$; б) $f(x) = -3x + 2$; в) $f(x) = 3x^2$; г) $f(x) = \frac{8}{x}$.

3.8. Определите, к чему стремится отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ для функции:

а) $f(x) = x^2 + 1$; б) $f(x) = -3x + 2$; в) $f(x) = 3x^2$;

г) $f(x) = \frac{8}{x}$, — если Δx стремится к нулю $(\Delta x \to 0)$.

3.9. Найдите производную функции, используя алгоритм:

а) $f(x) = x^2 + 1$; б) $f(x) = -3x + 2$; в) $f(x) = 3x^2$; г) $f(x) = \frac{8}{x}$.

3.10. Вычислите производную функции:

а) $f(x) = x^2 + 1$; б) $f(x) = -3x + 2$; в) $f(x) = 3x^2$;

г) $f(x) = \frac{8}{x}$ — в точках $x = -2;\ -1;\ 0{,}5;\ 8$.

3.11. Закон движения задан функцией:

а) $s(t) = 3t + 5$; б) $s(t) = t^2 + 7$.

Найдите скорость движения в момент времени $t = 4$.

3.12. Воспользуйтесь тем, что $f'(x) = (kx + b)' = k$, и найдите производную функции:

а) $f(x) = 8x - 2$; б) $f(x) = -x + 2$;

в) $f(x) = \frac{x}{6} - 3$; г) $f(x) = 5 - \frac{x}{4}$.

3.13. Для функции $f(x) = 3x^2 - 6x$ найдите:

а) приращение функции при переходе от x_0 к $x_0 + \Delta x$; б) приращение функции, если $x_0 = 1$; $\Delta x = 0{,}1$; в) отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$; г) к чему стремится отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, если Δx стремится к нулю; д) производную функции; е) производную функции в точке $x = 5$.

3.14. Найдите с помощью алгоритма приращение функции при переходе от x_0 к $x_0 + \Delta x$, если:

а) $f(x) = x^2 + 8$; б) $f(x) = -2x + 7$.

3.15. Найдите отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, если:

а) $f(x) = x^2 + 8$; б) $f(x) = -2x + 7$.

3.16. Определите, к чему стремится отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ для функции:

а) $f(x) = x^2 + 8$; б) $f(x) = -2x + 7$, — если Δx стремится к нулю.

3.17. Найдите производную функции, используя алгоритм:

а) $f(x) = x^2 + 8$; б) $f(x) = -2x + 7$.

3.18. Вычислите производную функции:

а) $f(x) = x^2 + 8$; б) $f(x) = -2x + 7$ — в точках $x = -3$; 0; $1{,}5$; 9.

3.19. Закон движения задан функцией $s(t) = t^2 + 1$. Найдите скорость движения в момент времени $t = 10$.

3.20. Воспользуйтесь тем, что $f'(x) = (kx + b)' = k$, и найдите производную функции:

а) $f(x) = 5x - 8$; б) $f(x) = -6x + 1$;

в) $f(x) = \frac{2x}{7} - 5$; г) $f(x) = 7 - \frac{x}{9}$.

3.21. Для функции $f(x) = x^2 + 5x$ найдите:

а) приращение функции при переходе от x_0 к $x_0 + \Delta x$;

б) приращение функции, если $x_0 = 2$; $\Delta x = 0{,}1$;

в) отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$;

г) к чему стремится отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, если Δx стремится к нулю;

д) производную функции;

е) производную функции в точке $x = -3$.

3.22. Среди чисел -3; $\frac{2}{7}$; $\sqrt[5]{3}$; 0; 9; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $5{,}(23)$; -7; π; $7{,}8$; 15 выберите натуральные, целые, рациональные, иррациональные. Какому числовому множеству принадлежат все данные числа?

3.23. Прямая $y = kx + b$ проходит через точки $A(2; 0)$ и $B(-2; 10)$. Запишите уравнение этой прямой.

3.24. Решите уравнение $\frac{1 - 9x}{x^2 + 2x - 3} + \frac{3x - 1}{x - 1} = \frac{2x}{x + 3}$.

3.25. Найдите нули функции $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x$.