§ 19. Правила вычисления производных

3.26. Решите уравнение $(x^2 - 4)(x^2 - 5x - 6) = 0$.

3.27. Решите неравенство $(x^2 - 4)(x^2 - 5x - 6) < 0$.

3.28. Решите неравенство $\frac{x-1}{(x+2)^3} < 0$.

Для вычисления производных будем использовать выведенные в предыдущем параграфе формулы:

$\left(x^2\right)' = 2x$; $(kx+b)' = k$; $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; $C' = 0$. Внесем их в таблицу.

$f(x)$	x^2	$kx+b$	$\frac{1}{x}$	C
$f'(x)$	$2x$	k	$-\frac{1}{x^2}$	0

Рассмотрим несколько правил вычисления производных.

1. Производная суммы: если функции U и V имеют производные, то производная суммы равна сумме производных, т. е. $(U+V)' = U' + V'$.

Доказательство. Пусть $U + V = W$. Рассмотрим сумму приращений функций U и V:

$$\Delta U + \Delta V = U(x+\Delta x) - U(x) + V(x+\Delta x) - V(x) = U(x+\Delta x) + V(x+\Delta x) - (V(x) + U(x)) =$$

$= W(x+\Delta x) - W(x) = \Delta W$. Тогда: $\frac{\Delta W}{\Delta x} = \frac{\Delta V + \Delta U}{\Delta x} = \frac{\Delta V}{\Delta x} + \frac{\Delta U}{\Delta x}$.

Если Δx стремится к нулю, то $W' = (U+V)' = U' + V'$.

Пример 1. Найдите производную функции:

а) $f(x) = x^2 + 5x$; б) $h(x) = x^2 + \frac{1}{x}$.

$(U+V)' = U' + V'$

Решение. а) $f'(x) = \left(x^2 + 5x\right)' = \left(x^2\right)' + (5x)' = 2x + 5$;

б) $h'(x) = \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)' = \left(x^2\right)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = 2x - \frac{1}{x^2}$.

2. Производная произведения: если функции U и V имеют производные, то $(UV)' = U'V + V'U$.

Пример 2. Найдите производную функции:
а) $f(x) = x^3$;   б) $f(x) = x^2 \cdot (3x - 1)$.

$$(UV)' = U'V + V'U$$

Решение. а) $f'(x) = \left(x^3\right)' = \left(x^2 \cdot x\right)' =$
$= \left(x^2\right)' \cdot x + x' \cdot x^2 = 2x \cdot x + 1 \cdot x^2 = 3x^2$;

б) $f'(x) = \left(x^2 \cdot (3x - 1)\right)' = \left(x^2\right)' \cdot (3x - 1) + (3x - 1)' \cdot x^2 =$
$= 2x \cdot (3x - 1) + 3 \cdot x^2 = 6x^2 - 2x + 3x^2 = 9x^2 - 2x$.

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак производной: $\left(Cf(x)\right)' = C\left(f(x)\right)'$.

Пример 3. Найдите производную функции:
а) $f(x) = 5x^2$;   б) $f(x) = \frac{7}{x}$.

Решение. а) $f'(x) = \left(5 \cdot x^2\right)' = 5\left(x^2\right)' = 5 \cdot 2x = 10x$;

б) $f'(x) = \left(\frac{7}{x}\right)' = \left(7 \cdot \frac{1}{x}\right)' = 7 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = 7 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{7}{x^2}$.

3. Производная частного: если функции U и V имеют производные, то $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2}$.

Пример 4. Найдите производную функции:
а) $f(x) = \frac{4x - 1}{5x + 6}$;   б) $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$.

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2}$$

Решение. а) $f'(x) = \left(\frac{4x - 1}{5x + 6}\right)' =$

$$= \frac{(4x - 1)' \cdot (5x + 6) - (5x + 6)'(4x - 1)}{(5x + 6)^2} = \frac{4 \cdot (5x + 6) - 5(4x - 1)}{(5x + 6)^2} = \frac{29}{(5x + 6)^2};$$

б) $f'(x) = \left(\frac{x^2}{x - 1}\right)' = \frac{\left(x^2\right)'(x - 1) - (x - 1)' \cdot x^2}{(x - 1)^2} = \frac{2x(x - 1) - 1 \cdot x^2}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$.

4. Производная степени: производная степени равна произведению показателя степени на степень с тем же основанием и показателем на единицу меньше, т. е. $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 5. Найдите производную функции:

а) $f(x) = x^8$; б) $f(x) = x^{15}$.

Решение. а) $f'(x) = \left(x^8\right)' = 8x^{8-1} = 8x^7$;

$$\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$$

б) $f'(x) = \left(x^{15}\right)' = 15x^{15-1} = 15x^{14}$.

Нахождение производной функции называется **дифференцированием** функции.

Правила 1—4 называются правилами дифференцирования. Их применяют для вычисления производных различных функций.

Пример 6. Найдите $f'(x)$, если:

а) $f(x) = 6x^2 - 9x + 2$; б) $f(x) = (3x^2 - 7)(4x^2 + 9)$;

в) $f(x) = \frac{1 - 2x^2}{4x^2 + 5}$; г) $f(x) = 4x^{10}$.

Решение. а) Найдем производную функции $f(x) = 6x^2 - 9x + 2$ по правилам нахождения производной суммы, вынесения постоянного множителя за знак производной и формул производных:

$$\left(6x^2 - 9x + 2\right)' = \left(6x^2\right)' - (9x)' + (2)' = 6\left(x^2\right)' - 9(x)' + 0 = 6 \cdot 2x - 9 \cdot 1 = 12x - 9.$$

б) Найдем производную функции $f(x) = (3x^2 - 7)(4x^2 + 9)$ по правилу нахождения производной произведения:

$$\left(\left(3x^2 - 7\right)\left(4x^2 + 9\right)\right)' = \left(3x^2 - 7\right)'\left(4x^2 + 9\right) + \left(4x^2 + 9\right)'\left(3x^2 - 7\right) =$$

$$= 6x\left(4x^2 + 9\right) + 8x\left(3x^2 - 7\right) = 48x^3 - 2x.$$

в) Найдем производную функции $f(x) = \frac{1 - 2x^2}{4x^2 + 5}$ по правилу нахождения производной частного:

$$\left(\frac{1 - 2x^2}{4x^2 + 5}\right)' = \frac{\left(1 - 2x^2\right)'\left(4x^2 + 5\right) - \left(4x^2 + 5\right)'\left(1 - 2x^2\right)}{\left(4x^2 + 5\right)^2} = \frac{-4x\left(4x^2 + 5\right) - 8x\left(1 - 2x^2\right)}{\left(4x^2 + 5\right)^2} =$$

$$= \frac{-16x^3 - 20x - 8x + 16x^3}{\left(4x^2 + 5\right)^2} = -\frac{28x}{\left(4x^2 + 5\right)^2}.$$

г) Используем правило вынесения постоянного множителя за знак производной и правило нахождения производной степени:

$$\left(4x^{10}\right)' = 4\left(x^{10}\right)' = 4 \cdot 10x^{10-1} = 40x^9.$$

Пример 7. Вычислите: а) $f'(1)$; б) $f'(4)$; в) $f'(-2)$; г) $f'(0)$, — если $f(x) = 3x^4 - 0{,}5x^2$.

Решение. Найдем производную функции $f(x) = 3x^4 - 0{,}5x^2$, используя правила нахождения производной суммы, степени и вынесения постоянного множителя: $f'(x) = \left(3x^4 - 0{,}5x^2\right)' = \left(3x^4\right)' - \left(0{,}5x^2\right)' = 12x^3 - x$.

Подставляя в выражение $12x^3 - x$ указанные значения переменной, находим:

а) $f'(1) = 12 - 1 = 11$; б) $f'(4) = 768 - 4 = 764$;
в) $f'(-2) = -96 + 2 = -94$; г) $f'(0) = 0$.

Пример 8. Решите уравнение $f'(x) = 3f(x)$, если $f(x) = 2x^3 - 3x^2$.

Решение. Найдем производную функции $f(x) = 2x^3 - 3x^2$, используя правила нахождения производной суммы, степени и вынесения постоянного множителя: $f'(x) = \left(2x^3 - 3x^2\right)' = 6x^2 - 6x$.

Тогда уравнение $f'(x) = 3f(x)$ примет вид: $6x^2 - 6x = 3 \cdot (2x^3 - 3x^2)$. Решим его:

$$6x^2 - 6x = 6x^3 - 9x^2 \Leftrightarrow 6x^3 - 15x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(2x^2 - 5x + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 2, \\ x = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: 0; 0,5; 2.

Пример 9. Прямолинейное движение точки задано уравнением $s(t) = 2t^2 - 8t - 10$ (путь измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите скорость движения в момент времени, равный 8 с.

Решение. Так как мгновенная скорость движения, заданного функцией $s(t) = 2t^2 - 8t - 10$, равна производной этой функции, то $v_{\text{мгн}} = s'(t) = (2t^2 - 8t - 10)' = 4t - 8$ в момент времени, равный 8 с.

Найдем ее значение: $v_{\text{мгн}} = s'(8) = 4 \cdot 8 - 8 = 24\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)$.

Ответ: $24\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Примеры основных заданий и их решения

1. Найдите производную функции, используя правила дифференцирования:

а) $f(x) = x^2 - 5x + 2$; б) $g(x) = 2x^{19} - 0{,}3x^{33}$;

в) $h(x) = 3x^{15} - \frac{1}{x}$; г) $p(x) = \frac{x^3}{8} - \frac{3x}{7} + 8$.

Решение. а) $f'(x) = \left(x^2 - 5x + 2\right)' = \left(x^2\right)' - (5x)' + (2)' = 2x - 5$;

б) $g'(x) = \left(2x^{19} - 0{,}3x^{33}\right)' = \left(2x^{19}\right)' - \left(0{,}3x^{33}\right)' = 2\left(x^{19}\right)' - 0{,}3\left(x^{33}\right)' =$

$= 2 \cdot 19x^{18} - 0{,}3 \cdot 33x^{32} = 38x^{18} - 9{,}9x^{32}$;

в) $h'(x) = \left(3x^{15} - \frac{1}{x}\right)' = \left(3x^{15}\right)' + \left(-\frac{1}{x}\right)' =$

$= 3\left(x^{15}\right)' - \left(\frac{1}{x}\right)' = 3 \cdot 15x^{14} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 45x^{14} + \frac{1}{x^2}$;

г) $p'(x) = \left(\frac{x^3}{8} - \frac{3x}{7} + 8\right)' = \left(\frac{x^3}{8}\right)' - \left(\frac{3x}{7}\right)' + 8' =$

$= \frac{1}{8}\left(x^3\right)' - \frac{3}{7}x' + 0 = \frac{1}{8} \cdot 3x^2 - \frac{3}{7} \cdot 1 = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{7}$.

2. Вычислите $f'(8)$; $f'(5)$; $f'(-2)$; $f'(0)$, если $f(x) = \frac{3 - x}{x + 5}$.

Решение. Найдем производную функции $f(x) = \frac{3 - x}{x + 5}$.

По правилу нахождения производной частного получим:

$$f(x)' = \left(\frac{3 - x}{x + 5}\right)' = \frac{(3 - x)'(x + 5) - (x + 5)'(3 - x)}{(x + 5)^2} = \frac{-(x + 5) - (3 - x)}{(x + 5)^2} =$$

$$= \frac{-8}{(x + 5)^2} = -\frac{8}{(x + 5)^2}.$$

Тогда $f'(8) = -\frac{8}{169}$; $f'(5) = -\frac{8}{100}$; $f'(-2) = -\frac{8}{9}$; $f'(0) = -\frac{8}{25}$.

3. Решите уравнение $f'(x) = 0$, если $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x$.

Решение. $f'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - 3x\right)' = \left(\frac{x^3}{3}\right)' - (3x)' = \frac{1}{3}\left(x^3\right)' - 3x' = x^2 - 3$.

Решим уравнение $x^2 - 3 = 0$:

$$x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{3}, \\ x = -\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$.

4. Решите неравенство $f'(x) > 0$, если $f(x) = x^3 - 0{,}5x^2 - 4x$.

Решение. $f'(x) = \left(x^3 - 0{,}5x^2 - 4x\right)' = 3x^2 - x - 4$.

Решим неравенство $3x^2 - x - 4 > 0$.

Найдем нули функции $y = 3x^2 - x - 4$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1\frac{1}{3}$.

Положительные значения функция принимает левее меньшего корня или правее большего: $x \in (-\infty;\ -1) \cup \left(1\frac{1}{3};\ +\infty\right)$.

Ответ: $(-\infty;\ -1) \cup \left(1\frac{1}{3};\ +\infty\right)$.

5. Решите неравенство $f'(x) < 0$, если $f(x) = \frac{1}{x^2} + x^2$.

Решение. $f'(x) = \left(\frac{1}{x^2} + x^2\right)' = \frac{1' \cdot x^2 - \left(x^2\right)' \cdot 1}{x^4} + \left(x^2\right)' = \frac{-2x}{x^4} + 2x =$

$= \frac{-2}{x^3} + 2x = \frac{2\left(x^4 - 1\right)}{x^3}$.

Решим неравенство $\frac{2\left(x^4 - 1\right)}{x^3} > 0$ методом интервалов:

$$\frac{2\left(x^4 - 1\right)}{x^3} > 0 \Leftrightarrow \frac{2\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + 1\right)}{x^3} > 0 \Leftrightarrow x \in (-1;\ 0) \cup (1;\ +\infty).$$

Ответ: $(-1;\ 0) \cup (1;+\infty)$.

6. Закон прямолинейного движения задан функцией $s(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} - 3t$. Найдите, при каких значениях времени мгновенная скорость движения больше 1.

Решение. Так как мгновенная скорость движения, заданного функцией $s(t)$, равна производной этой функции, то $v_{\text{мгн}} = s'(t) =$

$= \left(\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} - 3t\right)' = t^2 - 3t - 3$.

В соответствии с условием решим неравенство:

$t^2 - 3t - 3 > 1,\ \ t^2 - 3t - 4 > 0;\ \ t \in (-\infty;\ -1) \cup (4;\ +\infty).$

Так как $t > 0$, то $t \in (4;\ +\infty).$

Ответ: $t \in (4;\ +\infty).$

1. Производная функции $f(x) = x^5$ равна:
а) x^4; б) $4x^4$; в) $5x^6$; г) $5x^4$.
Выберите правильный ответ.

2. Производная функции $f(x) = 7 - 5x$ равна:
а) $7 + x$; б) $-5x$; в) -5; г) 7.
Выберите правильный ответ.

3.29. Найдите производную функции:

а) $f(x) = x^2 + x$; б) $f(x) = x - x^2$; в) $f(x) = 7x^2$;
г) $f(x) = -5x^2$; д) $f(x) = 6x^2 + 3x$; е) $f(x) = 9x^2 - 7x$;
ж) $f(x) = \frac{x^2}{4} - x$; з) $f(x) = \frac{x}{8} - \frac{5x^2}{7}$.

3.30. Найдите $f'(0)$ для функции:

а) $f(x) = 8x^2 - x + 2$; б) $f(x) = x^3 - x^2 - x - 9$;
в) $f(x) = x^7 + 2x^5 - 4$; г) $f(x) = -12x^4 + 7x^2 + x$;
д) $f(x) = \frac{x^4}{3} - 3x^2$; е) $f(x) = 0{,}1x^6 - x^3 + \frac{x}{2}$.

3.31. Решите уравнение $f'(x) = f(1)$, если $f(x) = 3x^2 - x + 2$.

3.32. Сравните $f'(-1)$ и $f'(1)$ для функции:

а) $f(x) = x^4 - \frac{1}{x}$; б) $f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{8}{x}$.

3.33. Найдите производную функции, используя правило нахождения производной произведения:

а) $f(x) = (x^2 - 2x)(x^2 + 3)$; б) $f(x) = (x^3 + x^2)(x^2 - 8x)$;
в) $f(x) = x^4(5x^2 - x)$; г) $f(x) = 3x^7(1 - x^9)$.

3.34. Верно ли, что $f'(2) < g'(2)$, если $f(x) = \left(\frac{x^2}{5} - x\right)\left(5x^3 - 1\right)$, а $g(x) = \left(x^2 - x + 2\right)\left(\frac{x^3}{6} - x\right)$?

3.35. Найдите производную функции, используя правило нахождения производной частного:

а) $f(x) = \frac{5x-2}{5x+2}$; б) $f(x) = \frac{x^2-3}{x^2+3}$;

в) $f(x) = \frac{2x-9}{x+3}$; г) $f(x) = \frac{4x^2}{1-x}$.

3.36. Найдите производную функции $f(x) = \frac{\left(2x-\sqrt{5}\right)\left(2x+\sqrt{5}\right)}{x-4}$.

3.37. Найдите значение выражения $f'(-3) + f'(-2)$ для функции $f(x) = \frac{x^3+x^2-2}{x}$.

3.38. Найдите производную функции $y = f(x)$ в точке x_0, если:

а) $f(x) = x^6 - 2x^4 - x + 3,\ x_0 = -2$; б) $f(x) = 3x - 1 + \frac{6}{x},\ x_0 = 1$;

в) $f(x) = \left(x^3 - 4\right)\left(x^5 - 1\right),\ x_0 = \sqrt{2}$; г) $f(x) = \frac{5-x}{x^2},\ x_0 = -5$.

3.39. Производная функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3$ в некоторой точке x_0 равна 0,25. Найдите $f(x_0)$.

3.40. Решите уравнение $f'(x) = 0$, если:

а) $f(x) = x - 2x^2$; б) $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 1$;

в) $f(x) = \frac{x^5}{5} - x^3 + 2x$; г) $f(x) = \frac{5}{x} + 20x$.

3.41. Найдите, при каких значениях переменной равна нулю производная функции $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 20x$.

3.42. Решите уравнение $f'(x) = -1$, если:

а) $f(x) = \frac{6x-1}{6x+1}$; б) $f(x) = \frac{2x^2}{x-4}$.

3.43. Решите неравенство $f'(x) > 0$, если:

а) $f(x) = x^3 - x^2 - x$; б) $f(x) = 27x - x^3$; в) $f(x) = \frac{-2x^3}{3} + x^2 + 24$;

г) $f(x) = \frac{x}{x^2+3}$; д) $f(x) = x + \frac{4}{x}$; е) $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$.

3.44. Найдите, при каких значениях переменной производная функции принимает положительные значения:

а) $f(x) = x^3 - 48x$; б) $f(x) = (x-2)(1-x^2)$; в) $f(x) = \frac{3x-1}{x}$.

3.45. Решите неравенство $f'(x) \geqslant 0$, если $f(x) = \frac{x^2+3}{3(x-1)}$.

3.46. Примените формулу квадрата разности или квадрата суммы для нахождения производной функции и решите уравнение $f'(x) = 0$, если:

а) $f(x) = (2x-1)^2$; б) $f(x) = \frac{(3x+5)^2}{x+1}$.

3.47. Дана функция $f(x) = (4x+13)^2$. Сравните $f'(-3)$ и $f'(-\sqrt{5})$.

3.48. Решите неравенство $f'(x) \leqslant 0$, если $f(x) = (x-2)(x+3)^2$.

3.49. Найдите скорость точки, движущейся прямолинейно по закону $s(t) = -t^2 + 10t - 7$, в момент времени $t = 3$ с, если путь измеряется в метрах.

3.50. Движение точки происходит по закону $s(t) = t^2 + 4t + 2$ (путь измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите, в какой момент времени скорость движения точки равна 8 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

3.51. Две точки движутся по законам $s_1(t) = 4t^2 + 2$ и $s_2(t) = 3t^2 + 4t - 1$ (путь измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите скорости движения точек в те моменты, когда пройденные ими расстояния равны.

3.52. Найдите производную функции:

а) $f(x) = 9x^2 + x$; б) $f(x) = 8x - x^2$;

в) $f(x) = -x^2 + 2x$; г) $f(x) = \frac{x^2}{2} - 9x$.

3.53. Найдите $f'(1)$ для функции:

а) $f(x) = 5x^2 + x - 3$; б) $f(x) = x^8 - x^5 - x + 2$;

в) $f(x) = -10x^5 - 3x^2 - x$; г) $f(x) = \frac{x^6}{9} + 4x^2$.

3.54. Сравните $f'(2)$ и $f'(3)$ для функции $f(x) = x^3 - \frac{2}{x}$.

3.55. Найдите производную функции, используя правило нахождения производной произведения:

а) $f(x) = (2x^2 - x)(x^2 + 7)$; б) $f(x) = (x^2 - 6x)x^3$.

3.56. Найдите $f'(0)$ для функции $f(x)=\left(\frac{x^4}{8}+2x\right)\left(x^2-x\right)$.

3.57. Найдите производную функции, используя правило нахождения производной частного:

а) $f(x)=\frac{7x+3}{7x-3}$; б) $f(x)=\frac{5x^2-x}{x+2}$.

3.58. Сравните $f'(-1)$ и $f'(-2)$ для функции $f(x)=\frac{x^4-5x+3}{x}$.

3.59. Производная функции $f(x)=-\frac{1}{12}x^3$ в некоторой точке x_0 равна $-0{,}25$. Найдите $f(x_0)$.

3.60. Решите уравнение $f'(x)=0$, если:

а) $f(x)=8x^2-x$; б) $f(x)=x^5-2x^3+x$.

3.61. Решите уравнение $f'(x)=1$, если:

а) $f(x)=\frac{x-5}{x+5}$; б) $f(x)=\frac{3x}{x-1}$.

3.62. Решите неравенство $f'(x)<0$, если:

а) $f(x)=3x^2+2x$; б) $f(x)=-x^3+2x^2-x$;

в) $f(x)=\frac{9}{x}+x$; г) $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$.

3.63. Найдите, при каких значениях переменной производная функции $f(x)=x^4-\frac{x^2}{2}$ принимает положительные значения.

3.64. Решите неравенство $f'(x)\leqslant 0$, если $f(x)=\frac{2x^2+6}{3(x+1)}$.

3.65. Примените формулу квадрата разности для нахождения производной функции $f(x)=(5x-9)^2$ и сравните $f'(1)$ и $f'\left(\sqrt{5}\right)$.

3.66. Решите неравенство $f'(x)\leqslant 0$, если:

а) $f(x)=(x+7)^2$; б) $f(x)=\frac{(x-2)^2}{x-1}$.

3.67. Найдите скорость точки, движущейся прямолинейно по закону $s(t)=-t^2+9t+8$, в момент времени $t=4$ с, если путь измеряется в метрах.

3.68. Движение точки происходит по закону $s(t)=t^2-9t+4$ (путь измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите, в какой момент времени скорость движения точки равна 11 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

3.69. Чему равен угловой коэффициент прямой:

а) $y = -x + 3$; б) $y = x + 3$; в) $y = \frac{x}{5} + 3$; г) $y = -8$?

3.70. Найдите значение выражения $\frac{5^{-1} \cdot 3^{-1} \cdot (0{,}4)^{-2}}{6 - \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}$.

3.71. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x^2 - 15} = \sqrt{4x - 3}$; б) $\sqrt[4]{x - 3} + 12 = \sqrt{x - 3}$.

3.72. Примените формулы двойного угла и найдите значение выражения:

а) $3 - 6\sin^2 \frac{5\pi}{12}$; б) $\cos\frac{7\pi}{8}\sin\frac{7\pi}{8}$; в) $\frac{4\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{11\pi}{12}}$.

3.73. Решите неравенство $\left(x^2 - 9\right)\left(x + 3\right) \geqslant 0$, используя метод интервалов.

3.74. Выясните, четной или нечетной является функция $f(x) = \frac{\cos 3x}{x^2 + 2}$.

§ 20. Геометрический смысл производной. Связь между знаком производной функции и ее возрастанием или убыванием

3.75. Для функции $y = (x - 1)^2 - 5$ найдите:

а) наименьшее значение; б) промежуток возрастания.

3.76. Сравните $f\left(-2\sqrt[4]{3}\right)$ и $f\left(-3\sqrt[4]{3}\right)$, если $f(x) = \frac{9}{x}$.

3.77. Найдите угловой коэффициент прямой и определите, какой угол (острый или тупой) составляет данная прямая с осью абсцисс:

а) $y = 3x + 1$; б) $y = -x + 5$; в) $y = 8 + 5x$.

Рассмотрим свойства производной функции, которые используют для изучения свойств функции $y = f(x)$ (рис. 128 на с. 240).

Прямую M_0M, проходящую через две точки графика функции $y = f(x)$, называют секущей. Тангенс угла β наклона секущей к оси абсцисс можно определить из прямоугольного треугольника M_0MH: $\operatorname{tg}\beta = \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Если Δx стремится к нулю, то точка M, двигаясь по кривой, приближается к точке M_0.