3.69. Чему равен угловой коэффициент прямой:

а) $y = -x + 3$; б) $y = x + 3$; в) $y = \frac{x}{5} + 3$; г) $y = -8$?

3.70. Найдите значение выражения $\dfrac{5^{-1} \cdot 3^{-1} \cdot (0{,}4)^{-2}}{6 - \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}$.

3.71. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x^2 - 15} = \sqrt{4x - 3}$; б) $\sqrt[4]{x - 3} + 12 = \sqrt{x - 3}$.

3.72. Примените формулы двойного угла и найдите значение выражения:

а) $3 - 6\sin^2 \frac{5\pi}{12}$; б) $\cos\frac{7\pi}{8}\sin\frac{7\pi}{8}$; в) $\dfrac{4\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{11\pi}{12}}$.

3.73. Решите неравенство $\left(x^2 - 9\right)\left(x + 3\right) \geqslant 0$, используя метод интервалов.

3.74. Выясните, четной или нечетной является функция $f(x) = \dfrac{\cos 3x}{x^2 + 2}$.

§ 20. Геометрический смысл производной. Связь между знаком производной функции и ее возрастанием или убыванием

3.75. Для функции $y = (x - 1)^2 - 5$ найдите:

а) наименьшее значение; б) промежуток возрастания.

3.76. Сравните $f\left(-2\sqrt[4]{3}\right)$ и $f\left(-3\sqrt[4]{3}\right)$, если $f(x) = \frac{9}{x}$.

3.77. Найдите угловой коэффициент прямой и определите, какой угол (острый или тупой) составляет данная прямая с осью абсцисс:

а) $y = 3x + 1$; б) $y = -x + 5$; в) $y = 8 + 5x$.

Рассмотрим свойства производной функции, которые используют для изучения свойств функции $y = f(x)$ (рис. 128 на с. 240).

Прямую M_0M, проходящую через две точки графика функции $y = f(x)$, называют секущей. Тангенс угла β наклона секущей к оси абсцисс можно определить из прямоугольного треугольника M_0MH: $\operatorname{tg}\beta = \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Если Δx стремится к нулю, то точка M, двигаясь по кривой, приближается к точке M_0.

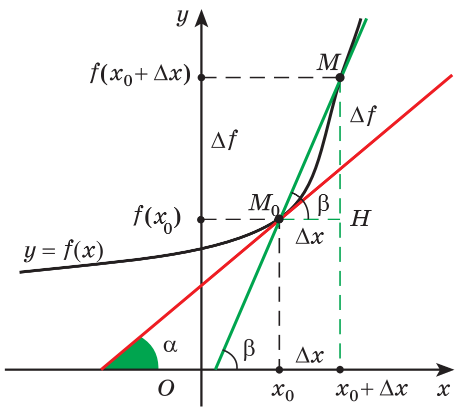


Рис. 128

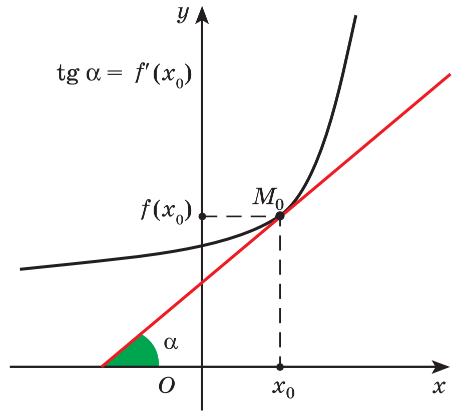


Рис. 129

В предельном положении, когда точка M совпадет с точкой M_0, прямая M_0M займет положение **касательной** к графику функции в точке $M_0(x_0;\ f(x_0))$.

Тангенс угла α наклона касательной к оси абсцисс равен числу, к которому стремится $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ при условии, что Δx стремится к нулю, т. е. производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Геометрический смысл производной: если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, то **тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной,** проведенной к графику функции в точке $(x_0;\ f(x_0))$, **равен производной функции** в этой точке, т. е. $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$ (рис. 129).

Для того чтобы найти угол наклона касательной к оси абсцисс, проведенной к графику функции $f(x)$ в точке $(x_0;\ f(x_0))$, нужно:

① Найти производную функции $f'(x)$. ② Найти значение производной в точке x_0, т. е. $f'(x_0)$. Полученное значение равно тангенсу угла наклона α касательной к оси абсцисс, т. е. $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$. ③ Сравнить значение $f'(x)$ с нулем. Если $f'(x_0) > 0$, то угол α острый и $\alpha = \operatorname{arctg} f'(x_0)$; если $f'(x_0) < 0$, то угол α тупой и $\alpha = \pi - \operatorname{arctg}(-f'(x_0))$; если $f'(x_0) = 0$, то $\alpha = 0$.	Найдите угол наклона к оси абсцисс касательной, проведенной к графику функции $f(x) = x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 0{,}5$. ① $f'(x) = \left(x^2\right)' = 2x$. ② $f'(0{,}5) = 2 \cdot 0{,}5 = 1$. $\operatorname{tg}\alpha = f'(0{,}5)$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha = 1$. ③ Так как $f'(x_0) > 0$, то угол α острый и $\alpha = \operatorname{arctg} 1$, значит, $\alpha = 45°$.

Пример 1. Найдите угол наклона к оси абсцисс касательной, проведенной к графику функции $f(x) = 5x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$.

Решение. ① Найдем производную функции:

$$f'(x) = \left(5x^2\right)' = 5 \cdot 2x = 10x.$$

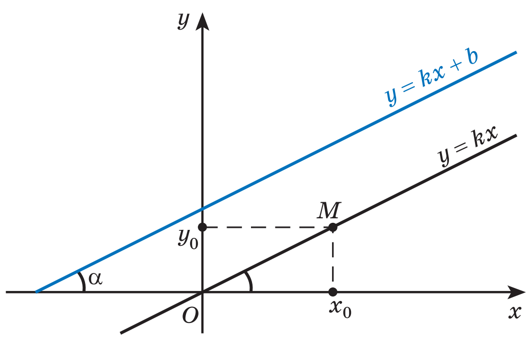
② Найдем значение производной в точке $x_0 = -1$:

$$f'(-1) = 10 \cdot (-1) = -10.$$

Получим тангенс угла наклона касательной к оси абсцисс:

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(-1) = -10.$$

③ Так как $f'(x_0) < 0$, то угол α тупой, значит, $\alpha = \pi - \operatorname{arctg}10$.



$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y_0}{x_0} = k$, так как $y_0 = kx_0$

Рис. 130

Заметим, что в уравнении прямой $y = kx + b$ коэффициент $k = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклона этой прямой к оси абсцисс (рис. 130).

Пример 2. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 + 1$ в точке $x_0 = 1$.

Решение. Запишем уравнение прямой $y = kx + b$. Если $y = kx + b$ является касательной к графику функции $y = f(x)$ в данной точке, то $k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$. Найдем значение производной функции $f'(x) = x^3 + 1$ в точке $x_0 = 1$: $f'(x) = 3x^2$, $f'(1) = 3$, значит, $k = 3$. Тогда $y = 3x + b$.

Найдем значение функции в точке $x_0 = 1$: $f(1) = 1^3 + 1 = 2$, т. е. прямая $y = 3x + b$ проходит через точку с координатами (1; 2).

Подставим найденные значения в уравнение прямой $y = 3x + b$ и получим: $2 = 3 \cdot 1 + b$; $b = -1$.

Таким образом, $y = 3x - 1$ — это уравнение касательной, проведенной к графику функции $f(x) = x^3 + 1$ в точке $x_0 = 1$.

Заметим, что не в любой точке графика функции можно провести касательную. Например, в точке (0; 0) касательной к графику функции

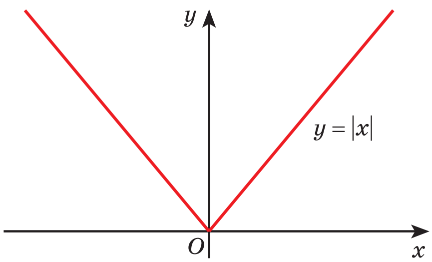


Рис. 131

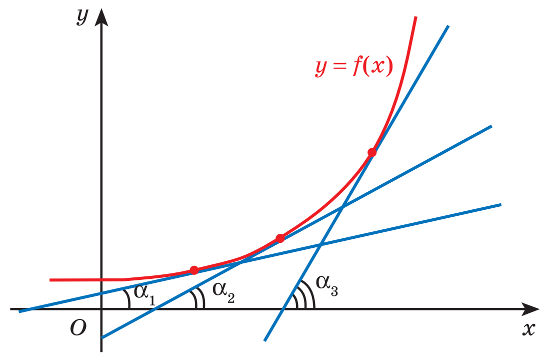


Рис. 132

$y = |x|$ не существует (рис. 131), значит, не существует производной в точке $x_0 = 0$ функции $y = |x|$.

Рассмотрим график функции $y = f(x)$, возрастающей на некотором промежутке. Проведем касательные в точках графика этой функции (рис. 132) и заметим, что углы, которые образуют эти касательные с осью абсцисс, — острые. Следовательно, производная этой функции в каждой точке этого промежутка положительна. Справедлива теорема, которую мы примем без доказательства.

Теорема 1 (признак возрастания функции)

Если функция имеет *положительную производную* в каждой точке некоторого промежутка, то она *возрастает* на этом промежутке.

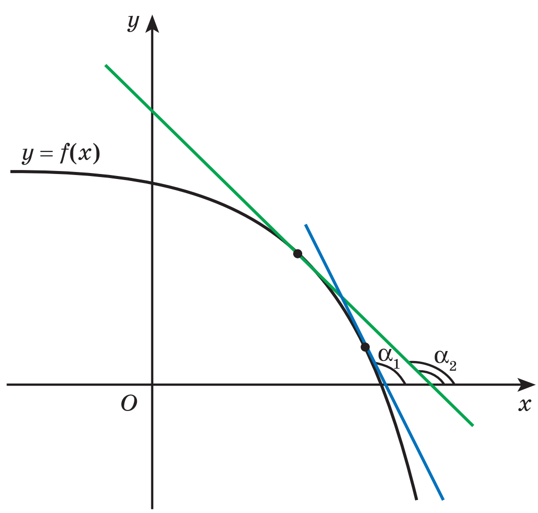


Рис. 133

Рассмотрим график функции $y = f(x)$, убывающей на некотором промежутке. Углы, которые образуют касательные к графику этой функции с осью абсцисс, — тупые (рис. 133). Значит, производная этой функции в каждой точке этого промежутка отрицательна.

Теорема 2 (признак убывания функции)

Если функция имеет *отрицательную производную* в каждой точке некоторого промежутка, то она *убывает* на этом промежутке.

Признаки возрастания и убывания функции сформулированы для непрерывных функций.

Представление о непрерывной функции дает ее график: его можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги. Так, на рисунке 134 изображен график непрерывной функции, а на рисунке 135 — график функции, которая не является непрерывной.

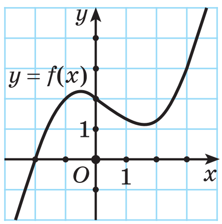


Рис. 134

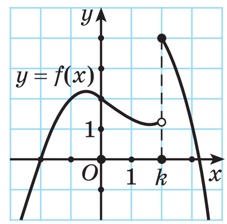
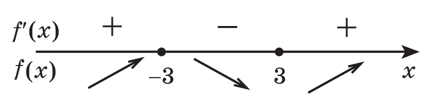


Рис. 135

Для того чтобы найти промежутки монотонности функции $y = f(x)$, нужно:

① Найти область определения функции $D(f)$. ② Найти производную функции $f'(x)$. ③ Решить неравенства $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$. Знаки производной и соответствующие промежутки монотонности функции отметить на схеме. ④ Записать ответ: решения неравенства $f'(x) > 0$ — это промежутки возрастания данной функции; решения неравенства $f'(x) < 0$ — это промежутки убывания данной функции. Для непрерывных функций концы промежутков монотонности можно включить в ответ.	Найдите промежутки монотонности функции $f(x) = x^3 - 27x$. ① $D(f) = \boldsymbol{R}$. ② $f'(x) = \left(x^3 - 27x\right)' = 3x^2 - 27.$ ③ $f'(x) > 0;\ 3x^2 - 27 > 0;\ x^2 - 9 > 0;$ $(x-3)(x+3) > 0;\ x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty);$ $f'(x) < 0$ при $x \in (-3; 3)$.  ④ *Ответ*: функция возрастает на промежутках $(-\infty; -3]$ и $[3; +\infty)$; функция убывает на промежутке $[-3; 3]$.

Пример 3. Найдите промежутки монотонности функции

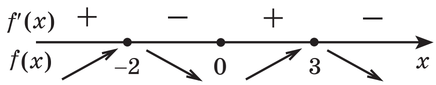
$$f(x) = 1 + 3x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}.$$

Решение. ① $D(f) = \mathbf{R}$.

② $f'(x) = 6x + x^2 - x^3 = -x(x^2 - x - 6) = -x(x-3)(x+2)$.

③ $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 3)$; $f'(x) < 0$ при $x \in (-2; 0) \cup (3; +\infty)$.

Отметим на схеме знаки производной и соответствующие промежутки монотонности функции.



④ *Ответ*: функция возрастает на промежутках $(-\infty; -2]$ и $[0; 3]$ и убывает на промежутках $[-2; 0]$ и $[3; +\infty)$.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную графически. Выясним, какой особенностью обладают точки A, B, C, D, M, K, отмеченные на рисунке 136.

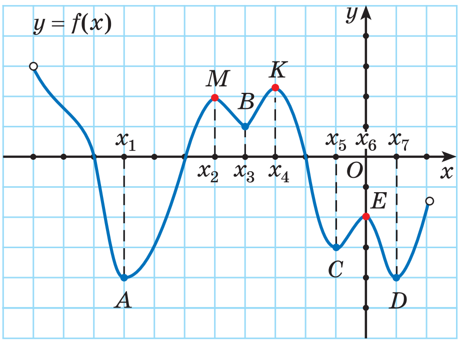


Рис. 136

Вблизи абсциссы x_1 точки A во всех точках значения функции (ординаты точек) больше, чем в точке A. Таким же свойством обладают точки B, C и D.

Точки x_1, x_3, x_5, x_7 — **точки минимума** данной функции (обозначается $x_{\min}$).

Вблизи абсциссы x_2 точки M во всех точках значения функции (ординаты точек) меньше, чем в точке M. Таким же свойством обладают точки K и E. Точки x_2, x_4, x_6 — **точки максимума** данной функции (обозначается $x_{\max}$).

Точки минимума и точки максимума называют **точками экстремума** функции. Так, точки x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 — точки экстремума данной функции.

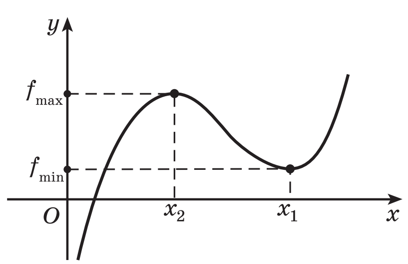


Рис. 137

На рисунке 137 точка x_1 — точка минимума функции $y = f(x)$. Значение функции в точке минимума $f(x_1)$ **называют минимумом функции** (обозначают $f_{\min}$).

Точка x_2 — точка максимума функции $y = f(x)$. Значение функции в точке максимума $f(x_2)$ **называют максимумом функции** (обозначают $f_{\max}$).

Минимумы и максимумы называют **экстремумами** функции.

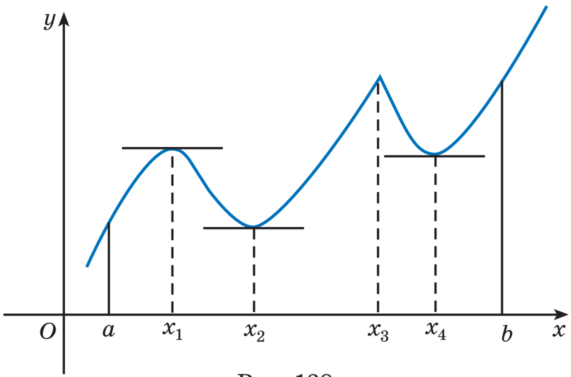


Рис. 138

В точках экстремума касательная к графику функции либо **параллельна оси абсцисс** (точки x_1, x_2, x_4 на рисунке 138), тогда производная в этой точке равна нулю, либо **не существует** (точка x_3), это означает, что производная в этой точке **не существует.**

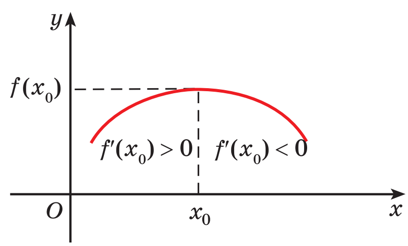


Рис. 139

Заметим, что слева от точки максимума функции $y = f(x)$ значения производной положительны (функция возрастает), а справа — отрицательны (функция убывает).

Говорят: ***«при переходе через точку максимума производная меняет знак с «плюса» на «минус»*** (рис. 139).

Если x_0 — точка минимума функции $y = f(x)$, то значения производной слева от этой точки отрицательны (функция убывает), а справа — положительны (функция возрастает).

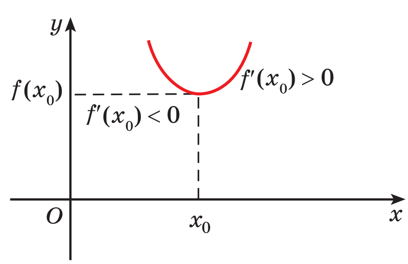


Рис. 140

Говорят: ***«при переходе через точку минимума производная меняет знак с «минуса» на «плюс»*** (рис. 140).

Теорема 3 (признак точки максимума функции)

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а производная меняет знак с «плюса» на «минус» при переходе через эту точку, то эта точка — точка максимума функции.

Теорема 4 (признак точки минимума функции)

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а производная меняет знак с «минуса» на «плюс» при переходе через эту точку, то эта точка — точка минимума функции.

Для того чтобы найти точки экстремума функции $y = f(x)$, нужно:

① Найти область определения функции $D(f)$.

② Найти производную функции $f'(x)$.

③ Найти точки из области определения, в которых производная равна нулю или не существует.

④ Если функция непрерывна в точке x_0, а производная при переходе через эту точку x_0 меняет знак:

- с «+» на «–», то эта точка — точка максимума функции;
- с «–» на «+», то эта точка — точка минимума функции.

Найдите точки экстремума функции $f(x) = 2x^3 - 24x$.

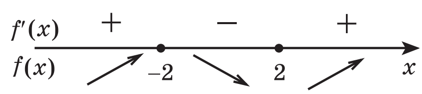
① $D(f) = \boldsymbol{R}$.

② $f'(x) = \left(2x^3 - 24x\right)' = 6x^2 - 24$.

③ $f'(x) = 0;\ 6x^2 - 24 = 0;\ x^2 - 4 = 0;$

$(x-2)(x+2) = 0;\ x_1 = -2,\ x_2 = 2.$

$f'(x)$ существует на всей области определения функции $y = f(x)$.



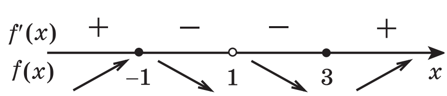
④ $x_{max} = -2,\ x_{min} = 2$.

Пример 4. Найдите точки экстремума и экстремумы функции $f(x) = \dfrac{3x + x^2}{x - 1}$.

Решение. ① $D(f) = (-\infty;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

② $f'(x) = \dfrac{(3 + 2x)(x - 1) - 1 \cdot \left(3x + x^2\right)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$.

③ $f'(x) = 0$ при $x = -1$ и $x = 3$.



④ $x_{max} = -1;\ x_{min} = 3$.

$$f_{max} = f(-1) = \frac{3 \cdot (-1) + (-1)^2}{-1 - 1} = 1;\quad f_{min} = f(3) = \frac{3 \cdot 3 + 3^2}{3 - 1} = 9.$$

Ответ: $x_{max} = -1;\ f_{max} = 1;\ x_{min} = 3;\ f_{min} = 9$.

На рисунках 141, *а*, *б*, *в* изображены касательные к графикам функции в точке x_0. Они параллельны оси абсцисс, следовательно, производная в точке x_0 равна нулю во всех трех случаях.
Но производная функции, изображенной на рисунке 141, *в*, *не меняет знак при переходе через эту точку, поэтому в данном случае точка x_0 не является точкой экстремума функции (она называется точкой перегиба).*

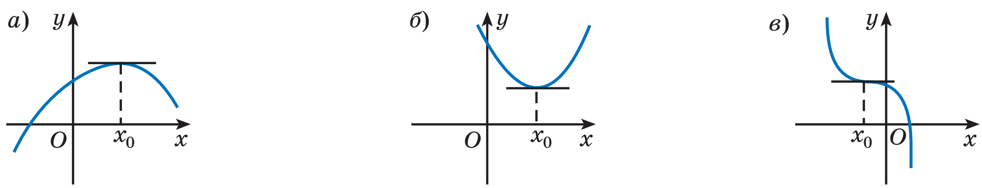


Рис. 141

На рисунках 142, *а*, *б*, *в* изображены графики функций, касательная в точке x_0 к которым не существует, т. е. не существует производной в точке x_0 во всех трех случаях. Но на рисунках 142, *а*, *б* эти точки являются точками экстремума, а на рисунке 142, *в* — точка x_0 не является точкой экстремума функции.

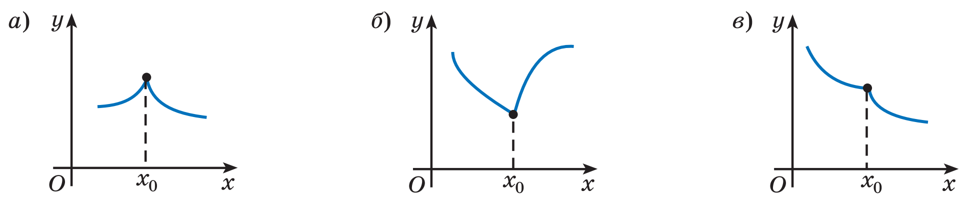


Рис. 142

Внутренние точки области определения функции, в которых производная равна нулю или не существует, называются ее **критическими** точками.

Примеры основных заданий и их решения

1. Найдите тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной, проведенной к графику функции $f(x) = x^2 + 5x$ в точке $x_0 = -1$.

Решение. 1) Найдем производную функции: $f'(x) = \left(x^2 + 5x\right)' = 2x + 5.$

2) Найдем значение производной в точке $x_0 = -1$: $f'(-1) = 2 \cdot (-1) + 5 = 3.$

3) $\operatorname{tg}\alpha = f'(-1)$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

2. Найдите угол наклона к оси абсцисс касательной, проведенной к графику функции $f(x) = \frac{1}{x}$ в точке $N(1;\ 1)$.

Решение. ① Найдем производную функции: $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

② Найдем значение производной в точке $x_0 = 1$: $f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$.
③ $\operatorname{tg}\alpha = f'(1) = -1$.
④ Так как $f'(x_0) < 0$, то угол α тупой, значит, $\alpha = \pi - \operatorname{arctg} 1 =$
$= \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

3. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = 3x - x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Решение. Уравнение прямой, являющейся касательной к графику данной функции в данной точке, имеет вид $y = kx + b$. Так как $k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$, то найдем значение производной данной функции в точке $x_0 = 1$: $f'(x) = 3 - 2x$; $f'(1) = 3 - 2 \cdot 1 = 1$, значит, $k = 1$. Тогда $y = x + b$. Найдем значение функции в точке $x_0 = 1$: $f(1) = 3 \cdot 1 - 1^2 = 2$, т. е. прямая $y = x + b$ проходит через точку с координатами $(1;\ 2)$. Подставим найденные значения в уравнение прямой $y = x + b$ и получим: $2 = 1 + b$; $b = 1$. Таким образом, $y = x + 1$ — это уравнение искомой касательной.

4. Функция $y = h(x)$ задана графически (рис. 143). Определите значение производной данной функции в точках x_1, x_2, x_3.

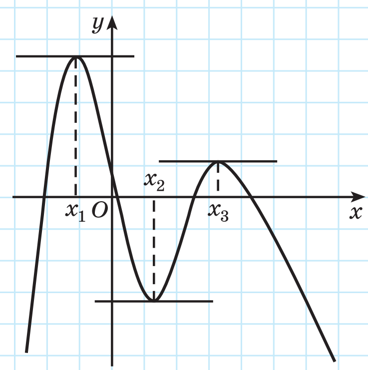


Рис. 143

Решение. Так как касательные к графику функции в точках x_1, x_2, x_3 параллельны оси абсцисс, то угол наклона касательных в этих точках к оси абсцисс равен нулю, т. е. $\alpha = 0$, тогда $\operatorname{tg} 0 = 0$, а так как $\operatorname{tg}\alpha = h'(x_0)$, то $h'(x_1) = h'(x_2) = h'(x_3) = 0$.

5. Для графика функции, изображенного на рисунке 144, выберите верные утверждения:
1) $f'(x) = 0$; 2) $f'(x) < 0$; 3) $f'(x) > 0$.

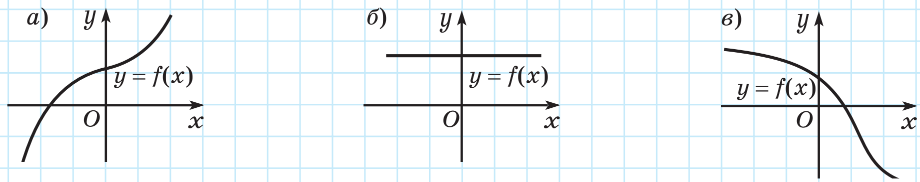


Рис. 144

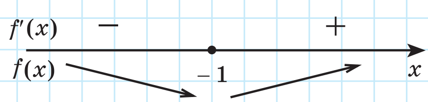
Решение. а) На рисунке 144, *а* изображен график возрастающей функции. На этом графике нет точки, в которой касательная к графику параллельна оси абсцисс, значит, производная функции положительна $f'(x) > 0$. Верно утверждение 3).
б) На рисунке 144, *б* изображен график постоянной функции, значит, $f'(x) = 0$. Верно утверждение 1).
в) На рисунке 144, *в* изображен график убывающей функции. На этом графике нет точки, в которой касательная к графику параллельна оси абсцисс, значит, производная функции отрицательна $f'(x) < 0$. Верно утверждение 2).

6. Найдите промежутки монотонности функции:
а) $f(x) = x^2 + 2x - 3$; б) $f(x) = -x^3 - 4x^2$.

Решение. а) ① $D(f) = \boldsymbol{R}$.

② $f'(x) = \left(x^2 + 2x - 3\right)' = 2x + 2.$

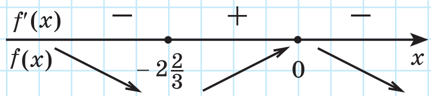
③ $f'(x) > 0$; $2x + 2 > 0$; $x > -1$; $x \in (-1; +\infty)$;
$f'(x) < 0$ при $x \in (-\infty; -1)$.



④ *Ответ:* функция возрастает на промежутке $[-1; +\infty)$; функция убывает на промежутке $(-\infty; -1]$.
б) ① $D(f) = \boldsymbol{R}$.

② $f'(x) = \left(-x^3 - 4x^2\right)'$; $f'(x) = \left(-x^3\right) - \left(4x^2\right)'$;
$f'(x) = -3x^2 - 8x$; $f'(x) = -x(3x + 8)$.

③ $f'(x) > 0$ при $x \in \left(-2\frac{2}{3};\ 0\right)$; $f'(x) < 0$ при $x \in \left(-\infty;\ -2\frac{2}{3}\right) \cup (0; +\infty)$.



④ *Ответ:* функция возрастает на промежутке $\left[-2\frac{2}{3};\ 0\right]$ и убывает на промежутках $\left(-\infty;\ -2\frac{2}{3}\right]$ и $[0;\ +\infty)$.

7. По графику функции $y = f(x)$ (рис. 145) найдите точки экстремума и экстремумы функции.

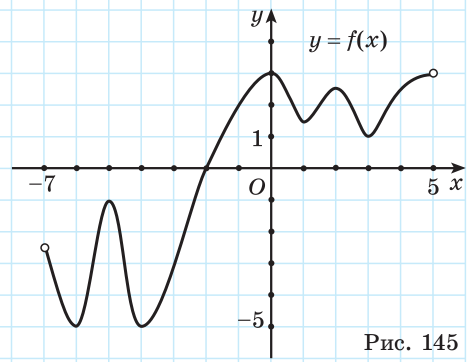


Рис. 145

Решение. Точки минимума: -6; -4; 1 и 3.

Минимумы функции равны:

$f(-6) = -5$; $f(-4) = -5$;

$f(1) = 1{,}5$; $f(3) = 1$.

Точки максимума: -5; 0 и 2.

Максимумы функции равны:

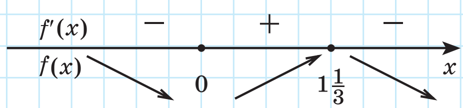
$f(-5) = -1$; $f(0) = 3$; $f(2) = 2{,}5$.

8. Найдите точки экстремума функции $f(x) = -x^3 + 2x^2$.

Решение. а) ① $D(f) = \boldsymbol{R}$.

② $f'(x) = -3x^2 + 4x$.

③ $f'(x) = 0$; $-3x^2 + 4x = 0$; $3x^2 - 4x = 0$; $x(3x - 4) = 0$; $x = 0$, $x = 1\frac{1}{3}$.



④ $x_{\max} = 1\frac{1}{3}$, $x_{\min} = 0$.

9. Найдите точки максимума и минимума функции $f(x) = 3x^4 - 6x^3 - 1$.

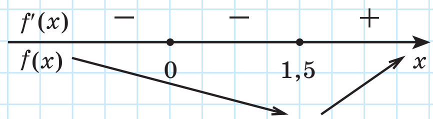
Решение. ① $D(f) = \boldsymbol{R}$.

② $f'(x) = 12x^3 - 18x^2$.

③ $f'(x) = 0$; $12x^3 - 18x^2 = 0$; $2x^3 - 3x^2 = 0$; $x^2(2x - 3) = 0$;

$x = 0$, $x = 1{,}5$.

При переходе через точку 0 знак производной не меняется.

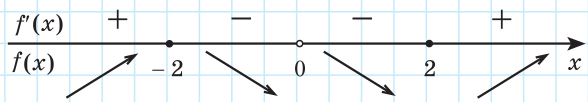


④ $x_{\min} = 1{,}5$, точек максимума функция не имеет.

10. Найдите промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}$.

Решение. $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{(x^2+4)'x - x'(x^2+4)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 4}{x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}.$$



Функция возрастает на промежутках $(-\infty;\ -2]$ и $[2;\ +\infty)$.
Функция убывает на промежутках $[-2;\ 0)$ и $(0;\ 2]$.
$x_{\min} = 2$; $x_{\max} = -2$.

$f_{\min} = f(2) = \dfrac{2^2+4}{2} = 4$; $f_{\max} = f(-2) = \dfrac{(-2)^2+4}{-2} = -4$.

?

1. Если производная в точке функции $y = f(x)$ равна: а) 2; б) –1; в) 0; г) 0,1, — то угол, который образует касательная к графику функции в этой точке:
1) тупой; 2) острый; 3) прямой; 4) равен нулю.
Выберите правильные ответы.

2. Определите знак производной функции $y = f(x)$ в точках A, B, C, D на рисунке 146.

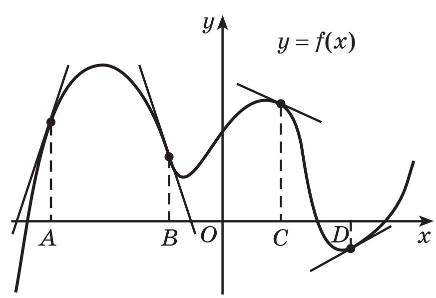


Рис. 146

3.78. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 4x$ в точке:

а) $x_0 = 5$; б) $x_0 = -2$; в) $x_0 = 1$; г) $x_0 = 2$.

3.79. На рисунке 147 изображен график функции $y = f(x)$. Укажите несколько точек, в которых касательная к графику данной функции образует с осью абсцисс:

а) острый угол; б) тупой угол.

В каких точках касательная к графику данной функции параллельна оси абсцисс?

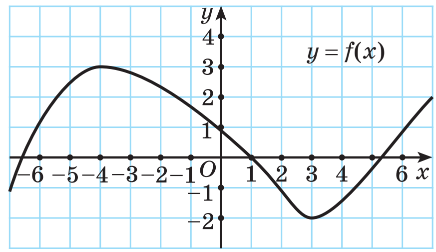


Рис. 147

3.80. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x_0 = 1$, если:

а) $f(x) = x^3 - 3x^2$; б) $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{x}$; в) $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$.

3.81. К графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 проведена касательная (рис. 148). Найдите $f'(x_0)$.

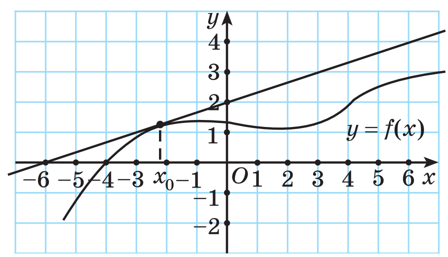


Рис. 148

3.82. Используйте алгоритм и найдите угол наклона к оси абсцисс касательной, проведенной к графику функции:

а) $f(x) = x^2$ в точке $x_0 = 0{,}5$;

б) $f(x) = \frac{x^2}{2} - 1$ в точке $x_0 = \sqrt{3}$;

в) $f(x) = -x^3 + x^2$ в точке $x_0 = 1$;

г) $f(x) = \frac{6-x}{x}$ в точке $x_0 = -2$.

3.83. Верно ли, что касательная к графику функции $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$ в точке $x_0 = 1$ составляет тупой угол с осью абсцисс?

3.84. В какой точке графика функции $f(x) = 2x^2 + \sqrt{3}x - 3$ касательная к графику данной функции наклонена к оси абсцисс под углом 60°?

3.85. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

а) $f(x) = x^2 + 4x + 2$, $x_0 = 1$; б) $f(x) = 3x - x^2$, $x_0 = 0$;

в) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x$, $x_0 = -2$; г) $f(x) = x^4 - 9x^2$, $x_0 = -1$.

3.86. Определите последовательность действий и составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{2}{x-1}$ в точке $x_0 = -1$.

3.87. Определите, принадлежит ли точка графику функции $f(x) = \frac{3x - 2}{x + 1}$, составьте уравнение касательной к графику данной функции в точке:

а) $A(1;\ 0{,}5)$; б) $A(0;\ -2)$.

3.88. Определите порядок действий и составьте уравнение касательной к графику функции $y = x^3 + 3x^2 - 5$ в точке пересечения этого графика с осью ординат.

3.89. На рисунке 149 изображен график функции $y = f(x)$. Найдите значения аргумента, при которых:

а) $f'(x) > 0$; б) $f'(x) < 0$.

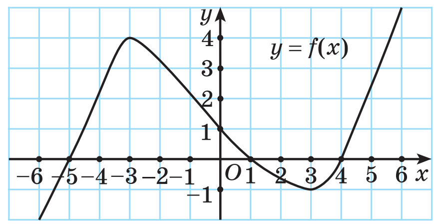


Рис. 149

3.90. Используйте алгоритм и найдите промежутки монотонности функции:

а) $f(x) = 2x^2 - 5$;

б) $f(x) = x^3 - 3x$;

в) $f(x) = x^4 - 2x^2$; г) $f(x) = 8 - 6x^2 - x^4$.

3.91. Найдите промежутки убывания функции $f(x) = \frac{3}{x} - 8x$.

3.92. Примените алгоритм и определите промежутки монотонности функции:

а) $f(x) = x^3 - x^2 - x - 7$; б) $f(x) = 4x - x^4$;

в) $f(x) = 5 + 3x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$.

3.93. Определите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $f(x) = \frac{x + 4}{x}$; б) $f(x) = \frac{x - 5}{2x + 3}$.

3.94. Докажите, что функция $y = f(x)$ возрастает на всей области определения:

а) $f(x) = 6x - 5$; б) $f(x) = x^3 + 7x$;

в) $f(x) = x^3 - x^2 + 6x + 5$; г) $f(x) = x^7 - x^4 + x + 5$.

3.95. Приведите пример функции, убывающей на всей области определения.

3.96. Используйте алгоритм и найдите точки экстремума функции:

а) $f(x) = x^2 - 4x + 7$; б) $f(x) = x^3 - \frac{3x^2}{2}$;

в) $f(x) = 5 + 3x - x^2 - \frac{x^3}{3}$; г) $f(x) = 2x^4 - x$.

3.97. На рисунке 150 изображен график функции $y = f(x)$, заданной на промежутке $[-7; 7]$. Найдите значения аргумента, при которых $f'(x) = 0$.

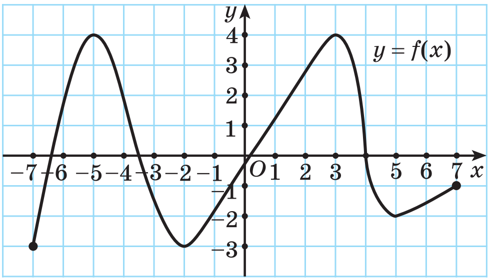


Рис. 150

3.98. Функция $y = f(x)$ определена на множестве действительных чисел. Известно, что $f'(x) = (x-2)(x+3)(x-1)$. Найдите промежутки возрастания функции.

3.99. Используйте алгоритм и найдите точки экстремума и экстремумы функции:

а) $f(x) = 8 - 6x - x^2$; б) $f(x) = 4x^2 - x^4$;

в) $f(x) = x + \frac{9}{x}$; г) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$.

3.100. Докажите, что функция $f(x) = -x^5 - 4x^3$ не имеет экстремумов.

3.101. Найдите минимум функции $f(x) = (x+1)(x-2)^2$.

3.102. Найдите промежутки монотонности и точки экстремума функции:

а) $f(x) = 12x - x^3$; б) $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1$.

3.103. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки минимума и максимума функции $f(x) = \frac{x^2 - 8x}{x+1}$.

3.104. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $f(x) = x^2 + 2x$ в точке: а) $x_0 = 2$; б) $x_0 = -1$; в) $x_0 = -3$.

3.105. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x_0 = -2$, если:

а) $f(x) = 2x^3 - x^2$;

б) $f(x) = 3x - \frac{1}{x}$;

в) $f(x) = \frac{x-5}{x-1}$.

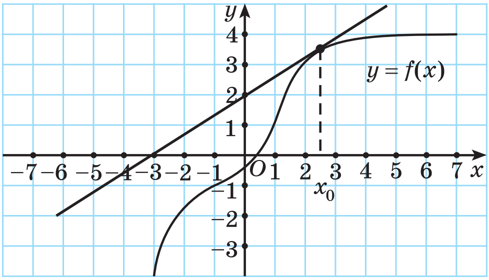


Рис. 151

3.106. К графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 проведена касательная (рис. 151). Найдите $f'(x_0)$.

3.107. Используйте алгоритм и найдите угол наклона к оси абсцисс касательной, проведенной к графику функции:

а) $f(x) = \frac{x^2}{2} - x$ в точке $x_0 = -1$; б) $f(x) = x^3 - 3x^2$ в точке $x_0 = 1$.

3.108. Определите последовательность действий и найдите, в какой точке графика функции $f(x) = x^2 + 6x + 5$ касательная к графику данной функции наклонена к оси абсцисс под углом 45°.

3.109. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

а) $f(x) = x^2 - 3x + 7$, $x_0 = 2$; б) $f(x) = \frac{x^4}{4} - 3x$, $x_0 = 0$.

3.110. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2 - \frac{4}{x}$ в точке $x_0 = 2$.

3.111. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{7 - x}{x - 3}$ в точке графика $A(4;\ 3)$.

3.112. Выберите последовательность действий и составьте уравнение касательной к графику функции $y = 3x^3 + 2x + 5$ в точке пересечения этого графика с осью ординат.

3.113. Найдите промежутки монотонности функции:

а) $f(x) = 4x^2 + 2x$; б) $f(x) = x^4 - 8x^2$; в) $f(x) = 3x - x^3$.

3.114. Найдите промежутки возрастания функции $f(x) = 5x - \frac{4}{x}$. Можно ли записать промежутки убывания этой функции?

3.115. Найдите промежутки убывания функции $f(x) = 1 + x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{3x^4}{4}$.

3.116. Используйте алгоритм и найдите промежутки убывания и возрастания функции $f(x) = \frac{4x + 3}{x - 1}$.

3.117. На рисунке 152 изображен график функции $y = f(x)$, заданной на промежутке [–7; 7]. Найдите значения аргумента, при которых $f'(x) = 0$.

3.118. Используйте алгоритм и найдите точки экстремума функции:

а) $f(x) = x^2 + 6x - 4$;

б) $f(x) = 3x^2 - x^3$.

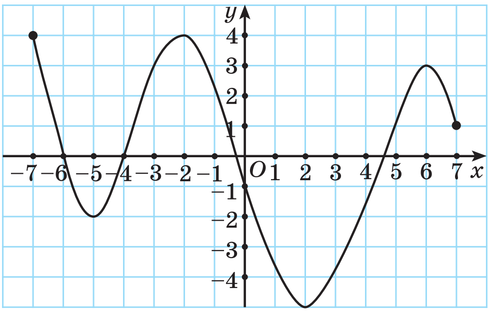


Рис. 152

3.119. Найдите точки экстремума и экстремумы функции:

а) $f(x) = 5 - 4x - x^2$; б) $f(x) = 3x - x^3$; в) $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

3.120. Найдите максимум функции $f(x) = (x-4)^2(x-1)$. Можно ли найти минимум этой функции?

3.121. Найдите промежутки монотонности и точки экстремума функции:

а) $f(x) = x^3 - 3x$; б) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 5$.

3.122*. Найдите промежутки возрастания и убывания, а также точки экстремума функции $f(x) = \frac{x^2 + 9}{x}$.

3.123. Воспользуйтесь свойствами корней n-й степени и найдите значения выражений $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ и $\sqrt[4]{m} : \sqrt[4]{n}$, если:

а) $a = 25,\ b = 5,\ m = 3,\ n = 243$;
б) $a = 0{,}27,\ b = 0{,}1,\ m = 0{,}6,\ n = 9{,}6$;
в) $a = 3\frac{4}{7},\ b = \frac{5}{49},\ m = \frac{5}{8},\ n = \frac{2}{125}$.

3.124. Найдите промежутки монотонности функции:

а) $f(x) = (x-3)^2 - 1$; б) $f(x) = -2(x+5)^2 + 7$.

3.125. Решите уравнение:

а) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} = 0$; б) $\sqrt{2}\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$.

3.126. Выполните действия:

$$\left(\frac{3a}{a+5} - \frac{8a}{a^2 + 10a + 25}\right) : \frac{3a+7}{a^2 - 25} + \frac{5a - 25}{a+5}.$$

§ 21. Применение производной к исследованию функций

3.127. Постройте график функции:

а) $y = \frac{3}{x}$; б) $y = \sqrt{x}$; в) $y = x^3$; г) $y = |x|$.

3.128. Примените алгоритм построения графика функции $g(x) = -x^2 + 6x - 2$.

3.129. Постройте график функции $y = 3(x-1)^2$, используя преобразование графика функции $y = 3x^2$.