3.146. Вычислите:

а) $\frac{16^2 \cdot 3^5}{12^4}$; б) $\frac{8^5 \cdot 3^4}{48^3}$; в) $\frac{15^{10}}{25^4 \cdot 3^9}$; г) $\frac{10^3 \cdot 6^2}{4^4 \cdot 5^4}$.

3.147. Сократите дробь:

а) $\frac{7x^2 - 6x - 1}{7x + 1}$; б) $\frac{1 - 4x^2}{2x^2 - 5x - 3}$.

§ 22. Наибольшее и наименьшее значения функции

3.148. Найдите наименьшее значение функции:

а) $y = x^2 - 2x - 3$; б) $y = 2\cos 3x$;

в) $y = 3\sin x - 1$; г) $y = |x| - 5$.

3.149. Найдите наибольшее значение функции:

а) $g(x) = -x^2 + 6x - 2$; б) $y = 5\cos x$;

в) $y = -2\sin x - 1$; г) $y = -|x| - 1$.

Рассмотрим задачу. Для упаковки подарка изготовили коробку, имеющую форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием. Коробку украсили, оклеив все ребра параллелепипеда цветной лентой (рис. 160). Всего потребовалось 3,6 м ленты. Найдите размеры коробки, если известно, что ее объем наибольший.

Рис. 160

Решение. Обозначим сторону основания коробки через x м ($x > 0$), а высоту — через b м. Тогда длина ленты равна сумме длин всех ребер коробки: $8x + 4b = 3,6$.

Объем коробки равен $V(x) = x^2b$. Из равенства $8x + 4b = 3,6$ выразим $b = 0,9 - 2x$, тогда $V(x) = x^2(0,9 - 2x)$ и $0,9 - 2x > 0$, т. е. $x < 0,45$.

Получили функцию $V(x) = x^2(0,9 - 2x)$, для которой нужно найти наибольшее значение при $0 < x < 0,45$.

Для решения задач на отыскание наибольшего (наименьшего) значения функции применяется производная функции.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$ для $x \in [a; b]$. Если внутри отрезка $[a; b]$ нет критических точек, тогда она возрастает или убывает на отрезке

$[a;\ b]$ (рис. 161). Следовательно, наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ достигаются на концах промежутка.

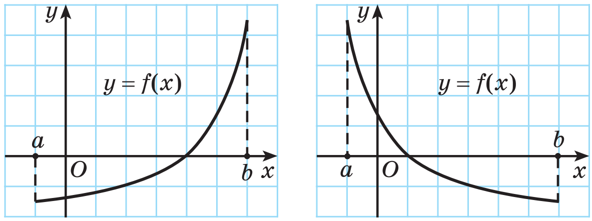


Рис. 161

Если же внутри отрезка $[a;\ b]$ есть конечное число критических точек, то эти точки разбивают отрезок на конечное число отрезков (рис. 162). Внутри каждого из них нет критических точек, а значит, на каждом из них функция возрастает или убывает. Следовательно, наибольшее и наименьшее значения функции на каждом из них достигаются на концах промежутков. Концы этих промежутков являются или критическими точками данной функции, или концами отрезка $[a;\ b]$. Значит, наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ достигаются в критических точках или на концах промежутка.

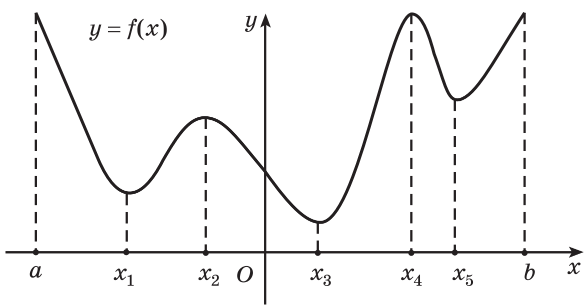


Рис. 162

Для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$, нужно:

① Найти производную функции $f'(x)$. ② Найти точки, в которых производная равна нулю или не существует (критические точки функции). ③ Выбрать из этих точек те, которые принадлежат отрезку $[a;\ b]$.	Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = -2x^3 - 6x^2 + 5$ на отрезке $[-1;\ 1]$. ① $f'(x) = -6x^2 - 12x$. ② $-6x^2 - 12x = 0;\ x^2 + 2x = 0;$ $x(x+2) = 0;\ x_1 = 0,\ x_2 = -2.$

④ Вычислить значения функции в выбранных критических точках и на концах отрезка [a; b]. ⑤ Выбрать из этих значений наибольшее значение функции $y = f(x)$ на отрезке [a; b] (обозначается $\max\limits_{[a;\,b]} f(x)$) и наименьшее значение функции $y = f(x)$ на отрезке [a; b] (обозначается $\min\limits_{[a;\,b]} f(x)$).	Точек, в которых производная не существует, нет. ③ $x_1 = 0 \in [-1; 1]$, $x_2 = -2 \notin [-1; 1]$. ④ $f(0) = -2 \cdot 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 5 = 5;$ $f(-1) = -2 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 + 5 = 1;$ $f(1) = -2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 5 = -3.$ ⑤ $\max\limits_{[-1;\,1]} f(x) = f(0) = 5;$ $\min\limits_{[-1;\,1]} f(x) = f(1) = -3.$

Вернемся к задаче, рассмотренной в начале параграфа.

Для функции $V(x) = x^2(0{,}9 - 2x)$ найдем наибольшее значение на отрезке [0; 0,45] (присоединим концы промежутка).

① Найдем производную функции $V'(x)$:

$$V'(x) = \left(x^2(0{,}9 - 2x)\right)' = \left(-2x^3 + 0{,}9x^2\right)' = -6x^2 + 1{,}8x.$$

② Найдем точки, в которых производная равна нулю или не существует (критические точки функции):

$$-6x^2 + 1{,}8x = 0;\ \ x^2 - 0{,}3x = 0;\ \ x(x - 0{,}3) = 0;\ \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 0{,}3. \end{array}\right.$$

Точек, в которых производная не существует, нет.

③ Выберем из этих точек те, которые принадлежат отрезку [0; 0,45]:

$$x = 0 \in [0;\ 0{,}45],\ \ x = 0{,}3 \in [0;\ 0{,}45].$$

④ Вычислим значение функции в выбранных критических точках и на концах отрезка [0; 0,45]:

$$V(0) = 0^2 \cdot (0{,}9 - 2 \cdot 0) = 0;$$

$$V(0{,}3) = 0{,}3^2 \cdot (0{,}9 - 2 \cdot 0{,}3) = 0{,}09 \cdot 0{,}3 = 0{,}027;$$

$$V(0{,}45) = 0{,}45^2 \cdot (0{,}9 - 2 \cdot 0{,}45) = 0.$$

⑤ Выберем из этих значений наибольшее:

$$\max\limits_{[0;\,0{,}45]} V(x) = V(0{,}3) = 0{,}027.$$

Таким образом, наибольшее значение функции $V(x) = x^2(0{,}9 - 2x)$ для $x \in [0;\ 0{,}45]$ достигается при $x = 0{,}3$.

Найдем значение b. Если $x = 0{,}3$, то $b = 0{,}9 - 2x = 0{,}9 - 2 \cdot 0{,}3 = 0{,}3$.

Ответ: коробка имеет наибольший объем, если все ее ребра равны по 0,3 м.

Пример 1. Участок земли прямоугольной формы одной стороной граничит с рекой. При каких размерах площадь участка будет наибольшей, если для его ограждения выделена сетка длиной 900 м?

Решение. Наибольшее значение нужно найти для площади прямоугольника.

Длина изгороди равна $2a + b$, где a и b — длины сторон участка прямоугольной формы, причем b — сторона участка, прилегающая к берегу реки.

Площадь прямоугольника: $S = ab$.

Выразим b из условия $2a + b = 900$ и получим $b = 900 - 2a$, тогда $S(a) = a(900 - 2a)$.

По смыслу задачи $a > 0$ и $b > 0$, т. е. $900 - 2a > 0$; $a < 450$, значит, $0 < a < 450$.

Рассмотрим функцию $S(a) = a(900 - 2a)$ и найдем наибольшее значение этой функции для $a \in [0; 450]$.

① $S'(a) = \left(a(900 - 2a)\right)' = \left(900a - 2a^2\right)' = 900 - 4a$.

② $900 - 4a = 0$; $a = 225$.

③ $225 \in [0; 450]$.

④ $S(225) = 225 \cdot (900 - 2 \cdot 225) = 101\,250$;

$S(0) = 0 \cdot (900 - 2 \cdot 0) = 0$;

$S(450) = 450 \cdot (900 - 2 \cdot 450) = 0$.

⑤ $\max\limits_{[0;\,450]} S(a) = S(225) = 101\,250$.

Таким образом, наибольшее значение функции $S(a) = a(900 - 2a)$ для $a \in [0; 450]$ достигается при $a = 225$.

Найдем значение b. Если $a = 225$, то $b = 900 - 2a = 900 - 2 \cdot 225 = 450$.

Ответ: площадь участка будет наибольшей, если сторона, прилегающая к берегу реки, будет равна 450 м, а другая сторона — 225 м.

Алгоритм решения задач на вычисление наибольшего и наименьшего значения величины

① Выделить в условии задачи величину, для которой нужно найти наибольшее (наименьшее) значение.

② Записать выражение этой величины в соответствии с условием задачи: получить функцию от одной переменной.

③ Найти промежуток изменения переменной функции.

④ Исследовать функцию на промежутке.

⑤ Записать ответ в соответствии с условием задачи.

Пример 2. На странице печатный текст должен занимать 150 $см^2$. Верхнее и нижнее поля страницы равны по 3 см, правое и левое — по 2 см. Какими должны быть размеры страницы, чтобы ее общая площадь была наименьшей?

Решение. ① Наименьшее значение нужно найти для площади страницы.

② $S = ab$, где a и b — размеры страницы.

По условию задачи $(a - 6)(b - 4) = 150$, откуда $b = \dfrac{150}{a-6} + 4$.

Тогда $S(a) = a \cdot \left(\dfrac{150}{a-6} + 4\right)$.

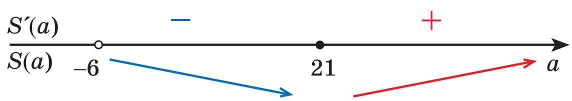
③ По смыслу задачи $a > 6$, т. е. $a \in (6;\ +\infty)$.

④ Исследуем функцию $S(a) = a \cdot \left(\dfrac{150}{a-6} + 4\right)$ на промежутке $(6;\ +\infty)$.

$$S'(a) = \left(a \cdot \left(\frac{150}{a-6} + 4\right)\right)' = \left(\frac{4a^2 + 126a}{a-6}\right)' = \frac{\left(4a^2 + 126a\right)'(a-6) - (a-6)'\left(4a^2 + 126a\right)}{(a-6)^2} =$$

$$= \frac{(8a + 126)(a-6) - 1 \cdot \left(4a^2 + 126a\right)}{(a-6)^2} = \frac{4a^2 - 48a - 756}{(a-6)^2} = \frac{4(a-21)(a+9)}{(a-6)^2}.$$

Точка $a = 21$ — единственная критическая точка данной функции на промежутке $(6;\ +\infty)$, являющаяся точкой минимума.



Следовательно, в этой точке функция $S(a) = a \cdot \left(\dfrac{150}{a-6} + 4\right)$ на промежутке $(6;\ +\infty)$ достигает наименьшего значения.

Общая площадь страницы будет наименьшей, если $a = 21$ см, а $b = \dfrac{150}{a-6} + 4 = 14$ (см).

⑤ *Ответ*: 14 см и 21 см.

Примеры основных заданий и их решения

1. С помощью рисунка 163 (см. с. 270), на котором изображен график функции $y = f(x)$, найдите наибольшее и наименьшее значения функции на отрезках:

а) $[2;\ 3]$; б) $[-3;\ 3]$; в) $[-7;\ 1]$.

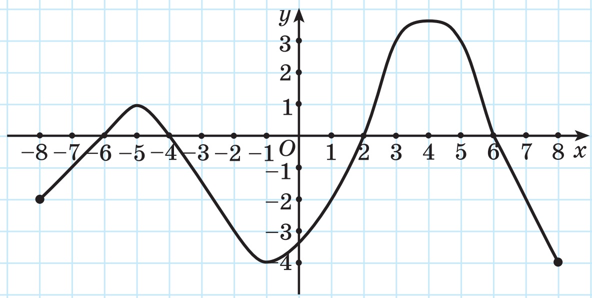


Рис. 163

Решение. а) $\max\limits_{[2;\,3]} f(x) = f(3) = 3;\ \min\limits_{[2;\,3]} f(x) = f(2) = 0;$

б) $\max\limits_{[-3;\,3]} f(x) = f(3) = 3;\ \min\limits_{[-3;\,3]} f(x) = f(-1) = -4;$

в) $\max\limits_{[-7;\,1]} f(x) = f(-5) = 1;\ \min\limits_{[-7;\,1]} f(x) = f(-1) = -4.$

2. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = 5 + 4x^3 - x^4$ на отрезке $[-1;\ 4]$.

Решение. ① $f'(x) = 12x^2 - 4x^3.$

② $12x^2 - 4x^3 = 0;\ 3x^2 - x^3 = 0;\ x^2(3 - x) = 0;\ x_1 = 0,\ x_2 = 3.$
Точек, в которых производная не существует, нет.

③ $x_1 = 0 \in [-1;\ 4],\ x_2 = 3 \in [-1;\ 4].$

④ $f(0) = 5 + 4 \cdot 0^3 - 0^4 = 5;\ f(3) = 5 + 4 \cdot 3^3 - 3^4 = 32;$

$f(-1) = 5 + 4 \cdot (-1)^3 - (-1)^4 = 0;\ f(4) = 5 + 4 \cdot 4^3 - 4^4 = 5.$

⑤ $\max\limits_{[-1;\,4]} f(x) = f(3) = 32;\ \min\limits_{[-1;\,4]} f(x) = f(-1) = 0.$

3. Открытый бак с квадратным основанием должен вмещать 500 л (дм^3) жидкости. В каком случае на его изготовление уйдет наименьшее количество материала?

Решение. ① Нужное количество материала для изготовления бака (без отходов) равно площади поверхности бака. Наименьшее значение нужно найти для площади поверхности бака.

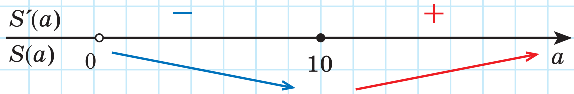
② Площадь поверхности бака $S = a^2 + 4ah$, где a — сторона основания, h — высота. Объем бака $V = a^2h$. Выразим h и получим $h = \frac{500}{a^2}$, откуда $S(a) = a^2 + \frac{2000}{a}$.

③ По смыслу задачи $a > 0$, т. е. $a \in (0; +\infty)$.

④ Исследуем функцию $S(a) = a^2 + \frac{2000}{a}$ на промежутке $(0; +\infty)$.

$S'(a) = 2a - \frac{2000}{a^2} = \frac{2a^3 - 2000}{a^2} = \frac{2(a^3 - 1000)}{a^2}$. $S'(a) = 0$ при $a = 10$.

Точка $a = 10$ — единственная критическая точка функции $S(a) = a^2 + \frac{2000}{a}$ на промежутке $(0; +\infty)$, и она является точкой минимума.



Значит, в этой точке функция $S(a) = a^2 + \frac{2000}{a}$ на промежутке $(0; +\infty)$ достигает наименьшего значения. Таким образом, в том случае, когда сторона основания бака $a = 10$ дм, а высота бака $h = \frac{500}{a^2} = 5$ дм, на изготовление бака уйдет наименьшее количество материала.

④ *Ответ*: на изготовление бака уйдет наименьшее количество материала, если сторона его основания будет равна 10 дм, а высота — 5 дм.

1. Если функция имеет на отрезке точку максимума, то эта функция:
а) принимает наибольшее значение в этой точке; б) принимает наибольшее значение на одном из концов отрезка; в) не принимает наибольшего значения; г) принимает наибольшее значение на конце отрезка или в точке максимума. Выберите правильный ответ.

2. Если функция имеет на отрезке точку минимума, то эта функция:
а) принимает наименьшее значение в этой точке; б) принимает наименьшее значение на одном из концов отрезка; в) не принимает наименьшего значения; г) принимает наименьшее значение на конце отрезка или в точке минимума. Выберите правильный ответ.

3.150. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = -x^3 + 2$ на отрезке $[-1; 4]$.

3.151. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = -2x^2 + 8x - 7$ на отрезках:
а) $[-1; 4]$; б) $[-5; 1]$.

3.152. На отрезке [–6; –0,5] найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $f(x) = \frac{6}{x}$; б) $f(x) = -\frac{12}{x}$.

3.153. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^2 - 6x - 7$ на отрезке:

а) [1; 6]; б) [–2; 3]; в) [–1; 7]; г) [5; 7].

3.154. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ на отрезке:

а) [–2; 0]; б) [–1; 1]; в) [–2; 4]; г) [–3; –2].

3.155. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на соответствующем отрезке:

а) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 1,\ [-4; 4]$; б) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x - 1,\ [2; 4]$;

в) $f(x) = \frac{x^4}{4} - 8x^2,\ [-1; 2]$; г) $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1,\ [-2; 2]$.

3.156. Найдите два числа, сумма которых равна 40, а произведение — наибольшее из возможных.

3.157. Число 18 представьте в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы произведение первого слагаемого и квадрата второго слагаемого было наибольшим.

3.158. Забором длиной 60 м нужно огородить прямоугольную площадку наибольшей площади. Найдите размеры этой площадки.

3.159. Декоративной изгородью длиной 36 м нужно огородить с трех сторон прямоугольную клумбу наибольшей площади. Найдите размеры этой клумбы.

3.160. Площадь прямоугольного участка, выделенного для экспериментального овощеводства, равна 1 га. Найдите, какими должны быть размеры участка, чтобы на изгородь ушло наименьшее количество сетки.

3.161. Правилами перевозки пассажиров в метрополитене предусмотрено, что бесплатно можно проводить ручную кладь, размеры которой в сумме измерений по длине, ширине и высоте не превосходят 120 сантиметров. Найдите размеры ящика с квадратным дном, который удовлетворяет этому условию и имеет наибольший объем.

3.162. Из всех прямоугольных параллелепипедов, у которых в основании лежит квадрат и площадь полной поверхности равна 24 дм^2, найдите параллелепипед наибольшего объема.

3.163. Металлический контейнер с крышкой объемом 72 дм^3 имеет форму прямоугольного параллелепипеда, стороны основания которого относятся как 1 : 2. При каких размерах контейнера на покраску его полной поверхности потребуется меньше всего краски?

3.164. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции
$f(x) = x^3 - 2$ на отрезке $[-5; 2]$.

3.165. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции
$f(x) = 4x^2 - 24x + 1$ на отрезках:

а) $[-1; 4]$; б) $[-5; 1]$.

3.166. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = -\frac{8}{x}$ на отрезке $[-4; -1]$.

3.167. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции
$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$ на отрезке:

а) $[-1; 3]$; б) $[-4; -1]$; в) $[-3; 1]$; г) $[2; 3]$.

3.168. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции
$f(x) = x^4 - 8x^2 - 3$ на отрезке:

а) $[-3; -1]$; б) $[-1; 0]$; в) $[-1; 3]$; г) $[-3; 3]$.

3.169. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции
$f(x) = \frac{x^3}{3} + 1,5x^2 + 2x + 3$ на отрезке $[-3; 0]$.

3.170. Найдите два числа, сумма которых равна 60, а произведение — наибольшее из возможных.

3.171. Представьте число 10 в виде суммы двух неотрицательных слагаемых так, чтобы сумма квадратов этих слагаемых была наименьшей.

3.172. Забором длиной 100 м нужно огородить прямоугольную площадку наибольшей площади. Найдите размеры этой площадки.

3.173. Площадь прямоугольника равна 81 м^2. Найдите наименьший возможный периметр этого прямоугольника.

3.174. Каркас деревянного ящика укрепили, обив все его ребра металлической лентой. Всего использовано 10 м ленты. Найдите размеры ящика, зная, что он имеет форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, а его объем — наибольший.

3.175. Вычислите:

а) $5\sqrt{64} - 3\sqrt[3]{64}$; б) $\sqrt[6]{2{,}25} : \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$.

3.176. Решите уравнение:

а) $2\cos^2 x + 5\cos x + 2 = 0$; б) $2\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0$.

3.177. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа: а) -9 и 7; б) $3\sqrt{7} + 1$ и $3\sqrt{7} - 1$.

3.178. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + y^2 = 41. \end{cases}$

Итоговая самооценка

После изучения этой главы я должен:

- знать определение производной функции в точке;
- знать физический смысл производной;
- знать формулы для вычисления производной;
- знать правила дифференцирования;
- знать геометрический смысл производной;
- уметь использовать алгоритм вычисления производной функции по определению;
- уметь применять правила дифференцирования;
- уметь решать задачи на применение физического и геометрического смысла производной;
- уметь применять алгоритмы для определения промежутков монотонности, точек экстремума и экстремумов функций, построения графиков функций;
- уметь применять алгоритмы нахождения наибольшего и наименьшего значений функций с помощью производной.

Я проверяю свои знания

1. Функция задана формулой $f(x) = 5x^2 - 6x$. Выберите верное равенство:

а) $f'(1) = -1$; б) $f'(1) = 4$; в) $f'(1) = 5$; г) $f'(1) = 1$.

2. С помощью графика функции $y = f(x)$, изображенного на рисунке 164, найдите:

а) значения аргумента, при которых $f'(x) = 0$;