



«Першыя паняцці, з якіх пачынаецца якая-небудзь навука, павінны быць празрыстымі і прыведзенымі да найменшай колькасці. Тады толькі яны могуць служыць трывалай і дастатковай асновай вучэння»
(М. І. Лабачэўскі).

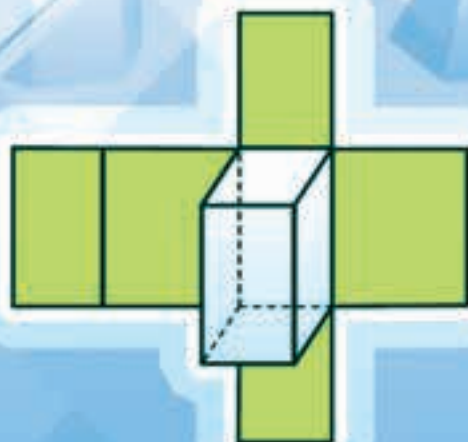
РАЗДЗЕЛ

1

УВОДЗІНЫ Ё СТЭРЭАМЕТРЫЮ

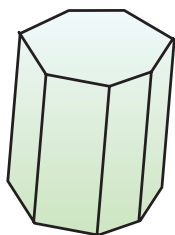
У гэтым раздзеле вы будзеце вывучаць:

- прасцейшыя прасторавыя фігуры;
- аксіёмы стэрэаметрыі і вынікі з іх;
- пабудаванні сячэнняў мнагаграннікаў.

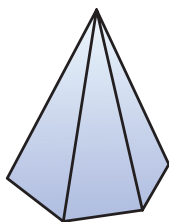


§ 1. Прастараваыя фігуры

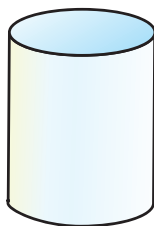
А) Геаметрычныя фігуры падзяляюцца на **плоскія** і **прастараваыя** ў залежнасці ад таго, усе ці не ўсе пункты фігуры належаць адной плоскасці. Плоскія фігуры вы вивучалі ў ранейшых класах, там пазнаёміліся і з некаторымі прастараваымі фігурамі — прызмай (рыс. 1), пірамідай (рыс. 2), цыліндрам (рыс. 3), конусам (рыс. 4), шарам (рыс. 5). Раздзел геаметрыі, у якім вивучаюцца плоскія фігуры, называецца *планіметрыяй*, а раздзел, у якім вивучаюцца прастараваыя фігуры, — *стэрэаметрыяй*.



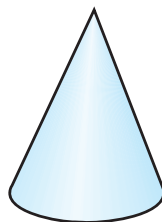
Рыс. 1



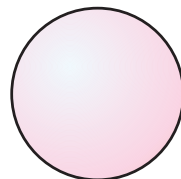
Рыс. 2



Рыс. 3

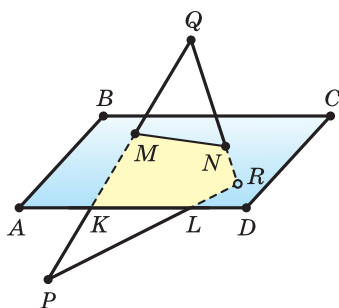


Рыс. 4



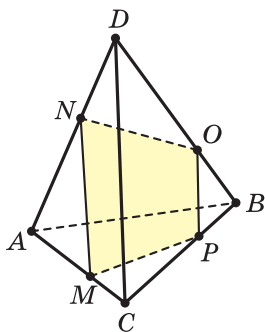
Рыс. 5

Тую ці іншую прастараваю фігуру даводзіцца рысаваць на плоскасці ліста ў сшытку або на плоскасці дошкі. Адпаведны рысунак выконваюць такім чынам, каб ён ствараў тое ўражанне, што і сама фігура, чый відарыс робіцца. Пры гэтым нябачныя лініі робяць *штырхавымі*.



Рыс. 6

На рысунку 6 паказаны паралелаграм $ABCD$ і трохвугольнік PQR , якія перасякаюцца па адрэзку MN . Частка QMN трохвугольніка PQR знаходзіцца над паралелаграмам $ABCD$, частка $PMNR$ — пад ім. Пры гэтым частка PKL чатырохвугольніка $PMNR$ бачная, а частка $KMNRL$ — нябачная. Звяртаем увагу на тое, што пункты K і L трохвугольніка PQR не належаць паралелаграму $ABCD$, а значыць, і яго старане AD .



Рыс. 7

На рысунку 7 паказана трохвугольная піраміда $DABC$, якую перасякае плоскасць па чатырохвугольніку $MNOP$. Пры гэтым у піраміды нябачным з'яўляецца кант AB , а ў сячэння $MNOP$ — яго стораны NO і MP .

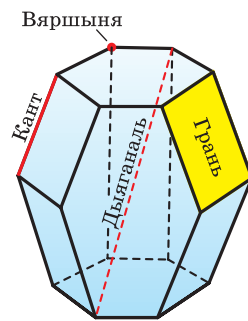
Адлюстраванне прастаравай фігуры на рысунку называюць **відарысам фігуры**.

Важным класам прастараваых фігур з'яўляюцца мнааграннікі, пад якімі разумеюць цэлы, абмежаваныя плоскімі мнагавугольнікамі.

Гэтыя многавугольнікі называюцца **гранямі** мнагагранніка, іх вяршыні — **вяршынямі** мнагагранніка, а стораны — **кантамі** мнагагранніка.

Адрэзак, што злучае дзве вяршыні мнагагранніка, якія не належаць адной грані, называецца **дыяганаллю** мнагагранніка (рыс. 8).

Мнагаграннік называецца *выпуклым*, калі ён размешчаны па адзін бок ад плоскасці любой яго грані. На рысунку 9 паказаны нявыпуклы мнагаграннік.



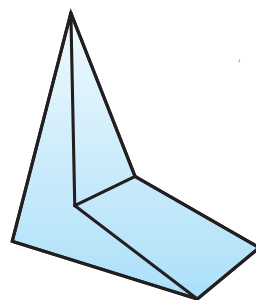
Рыс. 8

Б) Мы будзем вывучаць найпрасцейшыя выпуклыя мнагаграннікі — прызмы і піраміды.

Прызмай называецца мнагаграннік, дзве грані якога — роўныя n -вугольнікі, а астатнія n граняў — паралелаграмы.

Роўныя грані-многавугольнікі прызмы называюцца яе **асновамі**, а астатнія грані — **бакавымі гранямі**. Канты бакавой грані, якія не належаць асновам, называюцца **бакавымі кантамі** (рыс. 10).

У залежнасці ад колькасці старон асновы прызмы адрозніваюць **трохвугольную**, **чатырхвугольную**, **пяцівугольную** і г. д. прызмы. На рысунку 11 паказана шасцівугольная прызма.



Рыс. 9

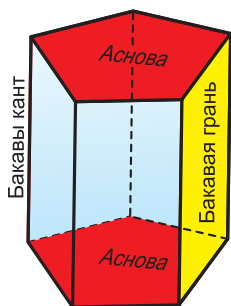
Сукупнасць бакавых граняў прызмы складаюць бакавую паверхню.

Плошча бакавой паверхні прызмы роўная суме плошчаў бакавых граняў.

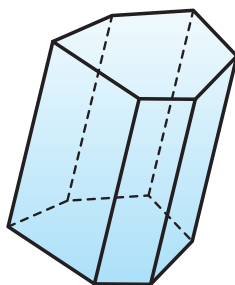
Прызмы падзяляюцца на *прамыя* і *нахіленыя*.

Прамая прызма — прызма, бакавыя грані якой з'яўляюцца прамавугольнікамі. Звычайна, рысуючы прамую прызму, яе бакавыя канты праводзяць вертыкальна (рыс. 12).

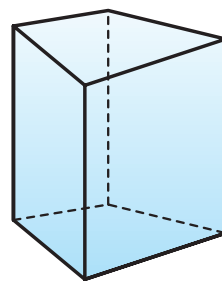
Прызма *прамая*, калі бакавыя канты перпендыкулярныя кантам асновы прызмы.



Рыс. 10



Рыс. 11

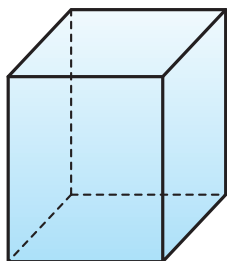


Рыс. 12

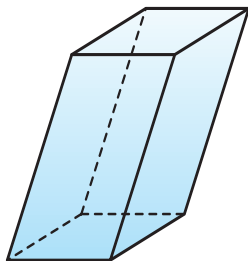
Прызма *нахіленая*, калі бакавыя канты не перпендыкулярныя кантам асновы прызмы.

Прамая прызма называецца **правільнай**, калі яе асновы з'яўляюцца правільнымі многавугольнікамі.

Прызма, асновамі якой з'яўляюцца паралелаграмы, называецца **паралелепіпедам**.



Рыс. 13



Рыс. 14

Паралелепіпед, як і прызма, можа быць і прамым (рыс. 13), і нахіленым (рыс. 14).

Прамы паралелепіпед, асновы якога з'яўляюцца прамавугольнымі, называецца **прамавугольным паралелепіпедам**.

Усе грані прамавугольнага паралелепіпеда з'яўляюцца прамавугольнікамі.

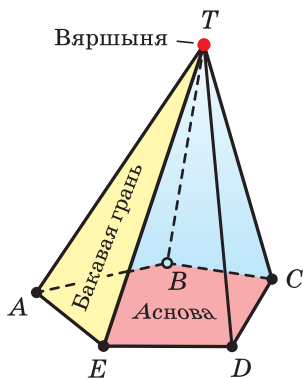
Тры канты прамавугольнага паралелепіпеда, якія збягаюцца ў адной вяршыні, называюцца **вымярэннямі** прамавугольнага паралелепіпеда.

Прамавугольны паралелепіпед, вымярэнні якога роўныя, называецца **кубам**. Усе грані куба — роўныя адзін аднаму квадраты.

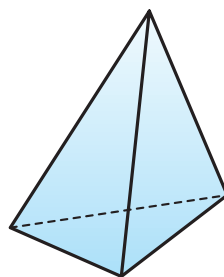
В) Пірамідай называецца мнагаграннік, адна грань якога — многавугольнік, а астатнія — трохвугольнікі з агульнай вяршыняй.

На рысунку 15 паказана піраміда $TABCDE$. Многавугольнік $ABCDE$ называюць **асновай піраміды**, трохвугольныя грані ATB , BTC , CTD , DTE , ETA — **бакавымі гранямі**, а агульную вяршыню T бакавых граняў — **вяршыняй піраміды**. Звычайна ў запісе абазначэння піраміды першая літара адпавядае яе вяршыні.

У залежнасці ад колькасці старон асноў піраміды адрозніваюць **трохвугольную**, **чатырохвугольную**, **пяцівугольную** і г. д. піраміды. Піраміда на рысунку 15 — пяцівугольная, а на рысунку 16 — трохвугольная.



Рыс. 15



Рыс. 16



Піраміда, основа якої — правильний многовугольник, а адрезак, що злучає її вершину з центром основи, перпендикулярний до будь-якої прямої, проведеної в площині основи через цей центр, називається **правильною**.

Вышина бакавої грані правильної піраміди, опущена з вершини піраміди, називається **апафемай** піраміди.

На рисунку 17 показана правильна чотирихвугільна піраміда $APQRS$, і адрезак AB — одна з її апафем.

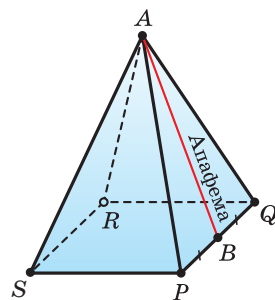


Рис. 17

Т е з е м а 1. У правильній піраміді роўныя яе: а) бакавыя грані; б) апафемы.

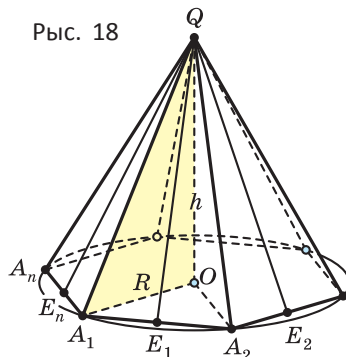
Доказ. Няхай $QA_1A_2...A_n$ — правильная піраміда і пункт O — центр яе асновы (рис. 18).

а) Паколькі трохвугольнікі QOA_1 і QOA_2 абодва прамавугольныя, маюць агульны катэт QO і роўныя катэты OA_1 і OA_2 , то яны роўныя. Таму роўныя і іх гіпатэнузы QA_1 і QA_2 . Аналагічна даказваецца, што іншыя бакавыя канты таксама роўныя QA_1 .

Бакавыя грані піраміды — раўнабедраныя трохвугольнікі з роўнымі бакавымі старанамі. Асновы гэтых трохвугольнікаў таксама роўныя паміж сабой як стораны правільнага многовугольніка, што ляжыць у аснове піраміды. Таму бакавыя грані роўныя адна адной па трох старанах.

б) Паколькі бакавыя грані піраміды $QA_1A_2...A_n$ роўныя адна адной, то роўныя і іх вышыні, праведзеныя з вершині Q , г. зн. што ўсе апафемы піраміды $QA_1A_2...A_n$ роўныя.

Рис. 18



Т е з е м а 2. Плошча бакавой паверхні правильнай піраміды роўная здабытку паўперыметра яе асновы і апафемы.

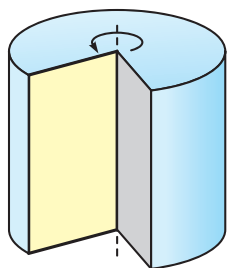
Доказ. Няхай $QA_1A_2...A_n$ — правильная піраміда (гл. рис. 18). Плошча S яе бакавой паверхні складаецца з плошчаў бакавых граняў-трохвугольнікаў, якія з'яўляюцца роўнымі адзін аднаму раўнабедранымі трохвугольнікамі з апафемай QE_1 , QE_2 , ..., QE_n , роўнымі адна адной. Таму

$$\begin{aligned} S &= S_{A_1QA_2} + S_{A_2QA_3} + \dots + S_{A_nQA_1} = \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot QE_1 + \frac{1}{2} A_2A_3 \cdot QE_2 + \dots + \\ &+ \frac{1}{2} A_nA_1 \cdot QE_n = \frac{1}{2} QE_1 \cdot (A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_nA_1) = \\ &= \frac{A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_nA_1}{2} \cdot QE_1 = p \cdot a, \end{aligned}$$

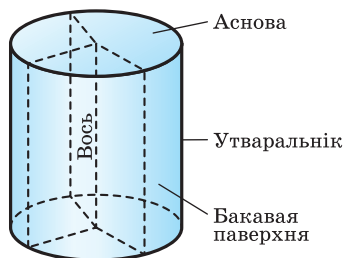
дзе p — паўперыметр асновы піраміды, a — апафема піраміды.

Г) Яшчэ адзін клас прасторавых фігур складаюць цэлы вярчэння, да якіх адносяцца цыліндр, конус, шар.

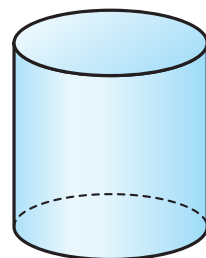
Цыліндрам называецца цэла, атрыманае вярчэннем прамавугольніка вакол адной з яго старон (рыс. 19). Пры гэтым вярчэнні адна старана прамавугольніка застаецца нерухомай, яе называюць *воссю цыліндра*. Старана, супрацьлеглая восі, утварае паверхню, якую называюць *бакавой паверхняй цыліндра*, а саму старану — *утваральнікам цыліндра*. Яшчэ дзве стараны прамавугольніка ўтвараюць паверхні, якія з'яўляюцца роўнымі кругамі, гэтыя кругі называюць *асновамі цыліндра* (рыс. 20). На рысунку 21 паказаны відарыс цыліндра.



Рыс. 19

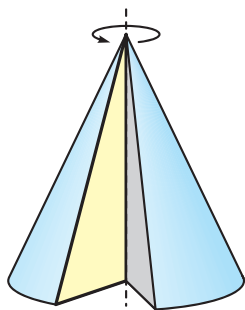


Рыс. 20

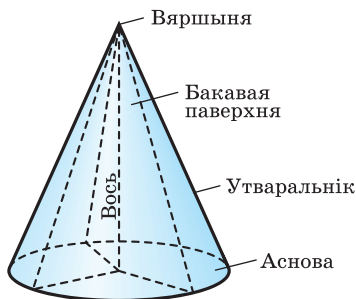


Рыс. 21

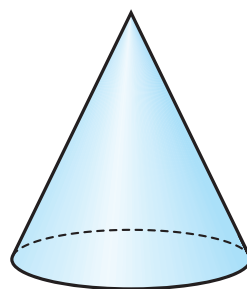
Конусам называецца цэла, атрыманае вярчэннем прамавугольнага трохвугольніка вакол аднаго з яго катэтаў (рыс. 22), які называюць *воссю конуса*. Другі катэт апісвае круг, які называюць *асновай конуса*; нерухомую вяршыню, якая не належыць аснове, называюць *вяршыняй конуса*. Гіпатэнуза пры вярчэнні ўтварае паверхню, якую называюць *бакавой паверхняй конуса*, саму гіпатэнузу называюць *утваральнікам конуса* (рыс. 23). На рысунку 24 паказаны відарыс конуса.



Рыс. 22

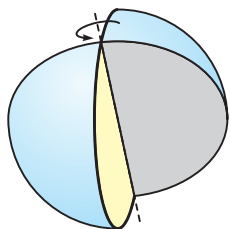


Рыс. 23

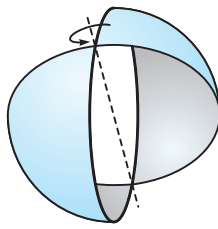


Рыс. 24

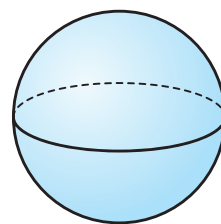
Шарам называецца цэла, атрыманае вярчэннем круга вакол свайго дыяметра (рыс. 25). Пры гэтым вярчэнні акружнасць апісвае паверхню, якую называюць *сферай* (рыс. 26). На рысунку 27 паказаны відарыс шара.



Рыс. 25



Рыс. 26



Рыс. 27



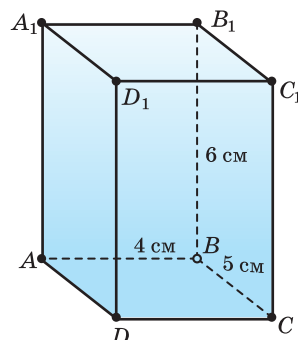
1. Якія геаметрычныя фігуры называюцца плоскімі; прасторавымі?
2. Якое цела называюць мнагаграннікам?
3. Што называюць гранямі мнагагранніка; кантамі мнагагранніка; вяршынямі мнагагранніка?
4. Які мнагаграннік называецца прызмай?
5. Што называюць асновамі прызмы; бакавымі гранямі прызмы; бакавымі кантамі прызмы?
6. Якая прызма называецца прамой прызмай; нахіленай прызмай?
7. Якая прызма называецца правільнай прызмай?
8. Якая прызма называецца паралелепіпедам; прамым паралелепіпедам?
9. Які прамы паралелепіпед называецца прамавугольным паралелепіпедам?
10. Якія канты прамавугольнага паралелепіпеда называюцца яго вымярэннямі?
11. Які мнагаграннік называецца пірамідай?
12. Што называюць асновай піраміды; бакавымі гранямі піраміды; вяршыняй піраміды?
13. Якая піраміда называецца правільнай пірамідай?
14. Які адрэзак называецца апафемай правільнай піраміды?
15. Сфармулюйце ўласцівасць бакавых кантаў правільнай піраміды; бакавых граняў правільнай піраміды; апафем правільнай піраміды.
16. Чаму роўная плошча бакавой паверхні правільнай піраміды?
17. Якое цела называецца цыліндрам?
18. Якое цела называецца конусам?
19. Якое цела называецца шарам?
20. Ці праўда, што:
 - а) колькасць вяршынь любой прызмы — лік цотны?
 - б) колькасць кантаў любой прызмы — лік, кратны тром?
21. Знайдзіце колькасць дыяганалей сямівугольнай прызмы.
22. Ці існуе піраміда, якая мае 11 кантаў? Абгрунтуйце свой адказ.



Задача 1. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні прамой чатырохвугольнай прызмы, у аснове якой знаходзіцца прамавугольнік з вымярэннямі 4 см і 5 см, а бакавы кант роўны 6 см.

Рашэнне. Няхай $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прамая прызма; $ABCD$ — прамавугольнік, $AB = 4$ см, $BC = 5$ см, $BB_1 = 6$ см (рыс. 28).

$ABB_1 A_1$, $CBB_1 C_1$, $CDD_1 C_1$, $ADD_1 A_1$ — прамавугольнікі ($ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прамая прызма), таму $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = 6$ см.



Рыс. 28

$$S_{ABB_1 A_1} = AB \cdot BB_1 = 4 \cdot 6 = 24 \text{ (см}^2\text{)}, \text{ бо } AB = CD \text{ і } BB_1 = CC_1.$$

$$S_{CBB_1 C_1} = CB \cdot BB_1 = 5 \cdot 6 = 30 \text{ (см}^2\text{)}, \text{ бо } AD = BC \text{ і } AA_1 = CC_1.$$

$$\begin{aligned} \text{Значыць, } S_{\text{бак}} &= S_{ABB_1 A_1} + S_{DCC_1 D_1} + S_{CBB_1 C_1} + S_{ADD_1 A_1} = 2 \cdot (S_{ABB_1 A_1} + S_{CBB_1 C_1}) = \\ &= 2 \cdot (24 + 30) = 108 \text{ (см}^2\text{)}. \end{aligned}$$

А д к а з: 108 см^2 .



Бакавая паверхня прамой прызмы роўная здабытку перыметра яе асновы і бакавога канта. Дакажыце гэта самастойна.

Задача 2. Бакавая паверхня правільнай чатырохвугольнай піраміды роўная 240 см^2 , а яе апафема — 12 см. Знайдзіце плошчу асновы піраміды.

Рашэнне. Няхай $SABCD$ — правільная чатырохвугольная піраміда; $S_{\text{бак}} = 240 \text{ см}^2$; SH — апафема; $SH = 12$ см (рыс. 29).

$$S_{\text{бак}} = \frac{1}{2} P_{ABCD} \cdot SH, \text{ бо піраміда правільная, таму } 240 = \frac{1}{2} \cdot P_{ABCD} \cdot 12,$$

$$\text{бо } P_{ABCD} = 2 \cdot 240 : 12 = 40 \text{ (см)}.$$

$$AB = 40 : 4 = 10 \text{ (см)}, \text{ бо } ABCD \text{ — квадрат.}$$

$$S_{ABCD} = AB^2 = 10^2 = 100 \text{ (см}^2\text{)}.$$

А д к а з: 100 см^2 .



Плошча бакавой паверхні піраміды роўная суме плошчаў бакавых граняў.

Задача 3. Апафема правільнай чатырохвугольнай піраміды роўная 30 см, а адрэзак, што злучае вяршыню піраміды з цэнтрам асновы, — 24 см. Знайдзіце бакавую паверхню піраміды.

Р а ш є н н є. Няхай $SABCD$ — правильна чотирохкуткова піраміда, SH — апафема, $SH = 30$ см, O — центр основи $ABCD$, $SO = 24$ см (гл. рис. 29).

$$OH = \sqrt{SH^2 - SO^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18 \text{ (см)}, \text{ бо } SO \perp OH,$$

$AB = 2 \cdot OH = 2 \cdot 18 = 36$ (см), бо $ABCD$ — квадрат, $P_{ABCD} = 4 \cdot AB = 4 \cdot 36 = 144$ (см).

$$S_{\text{бак}} = \frac{1}{2} P_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{2} \cdot 144 \cdot 30 = 2160 \text{ (см}^2\text{)}, \text{ бо}$$

піраміда правильна.

А д к а з: 2160 см^2 .

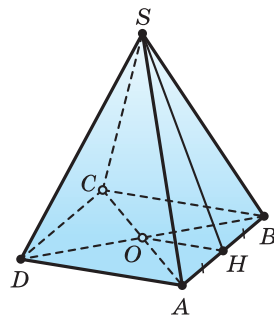


Рис. 29



У правильній піраміді адрізок, який з'єднує центр основи піраміди з основою апафему піраміди, — радіус акружності, уможливленої у основі піраміди. Дакажете гэта самастойна.

Задача 4. Старана основи AB правильній трохкутковій піраміді $MABC$ роўная $6\sqrt{3}$ см, а адрізок, што з'єднує вершину M піраміди з центром O основи, — 8 см. Знайдзіце:

- бакавыя канты піраміды;
- бакавую паверхню піраміды;
- поўную паверхню піраміды.

Р а ш є н н є. Няхай $MABC$ — правильна трохкуткова піраміда, $AB = 6\sqrt{3}$ см, O — центр основи ABC ; $MO = 8$ см (рис. 30).

а) $OA = \frac{AB\sqrt{3}}{3} = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{3} = 6$ (см), бо OA — радіус акружності, апісаної каля правильного трохкутника ABC .

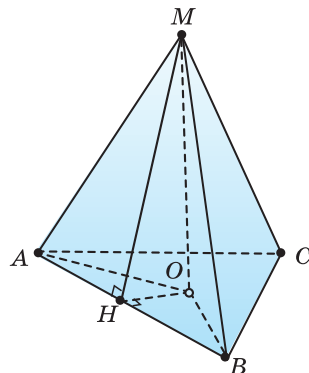


Рис. 30

$$MA = \sqrt{MO^2 + OA^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ (см)}, \text{ бо } MO \perp OA.$$

$MA = MB = MC = 10$ (см), бо $MABC$ — правильна трохкуткова піраміда.

б) Няхай MH — апафема. Тады H — середина AB (у $\triangle AMB$ $MA = MB$ і $MH \perp AB$).

$OH \perp AB$ (медыяна, праведзеная да асновы раўнабедранага трохвугольніка OAB), таму OH — радыус умежанай у $\triangle ABC$ акружнасці і $OH = \frac{OA}{2} = \frac{6}{2} = 3$ (см).

$$MH = \sqrt{MO^2 + OH^2} = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73} \text{ (см), бо } MO \perp OH.$$

$$P_{ABC} = 3 \cdot AB = 3 \cdot 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3} \text{ (см)},$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3} \cdot AB^2}{4} = \frac{\sqrt{3}(6\sqrt{3})^2}{4} = 27\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}, \text{ бо } \triangle ABC \text{ — правільны.}$$

$$S_{\text{бак}} = \frac{1}{2} P_{ABC} \cdot MH = \frac{1}{2} \cdot 18\sqrt{3} \cdot \sqrt{73} = 9\sqrt{219} \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$\text{в) } S_{\text{поўн}} = S_{\text{бак}} + S_{ABC} = 9\sqrt{219} + 27\sqrt{3} = 9\sqrt{3}(\sqrt{73} + 3) \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$\text{Адказ: а) } MA = MB = MC = 10 \text{ см; б) } S_{\text{бак}} = 9\sqrt{219} \text{ см}^2;$$

$$\text{в) } S_{\text{поўн}} = 9\sqrt{3}(\sqrt{73} + 3) \text{ см}^2.$$



Плошча поўнай паверхні піраміды роўная суме плошчы бакавой паверхні і плошчы асновы.



1. Адкажыце, якая — плоская ці прасторавая — ломаная паказана на рысунку:

а) 31;

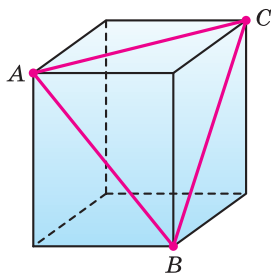
в) 33;

д) 35;

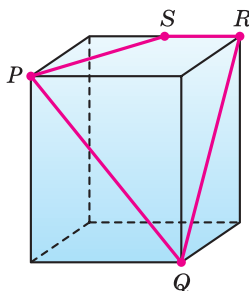
б) 32;

г) 34;

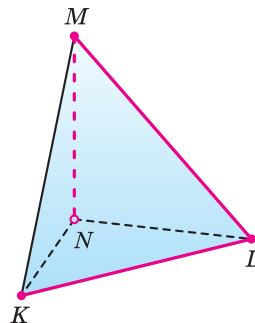
е) 36.



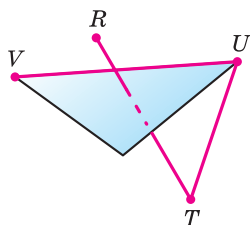
Рыс. 31



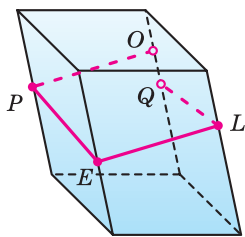
Рыс. 32



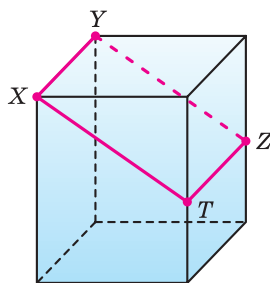
Рыс. 33



Рыс. 34



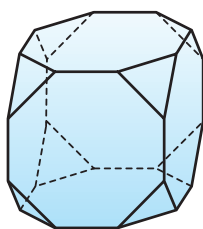
Рыс. 35



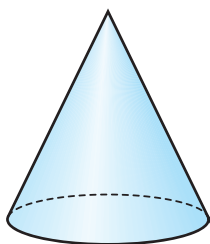
Рыс. 36

2. Вызначце, ці з'яўляецца мнагаграннікам цела, паказанае на рысунку:

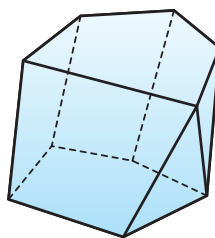
- а) 37; б) 38; в) 39; г) 40; д) 41; е) 42.



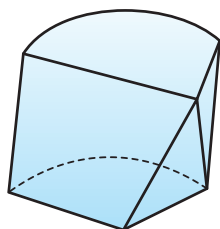
Рыс. 37



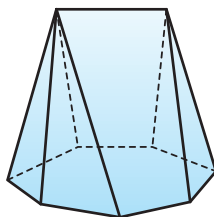
Рыс. 38



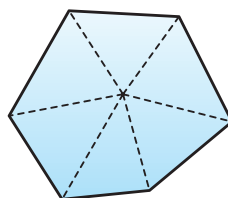
Рыс. 39



Рыс. 40



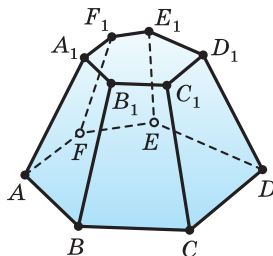
Рыс. 41



Рыс. 42

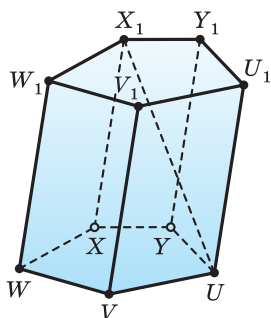
3. На рысунку 43 паказаны мнагаграннік $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$. Назавіце:

- а) грані з агульным кантам CD ;
 б) грані з агульным кантам DD_1 ;
 в) грані з агульнай вяршыняй E ;
 г) грані з агульнай вяршыняй C_1 ;
 д) канты з агульнай вяршыняй A ;
 е) канты з агульнай вяршыняй F_1 .

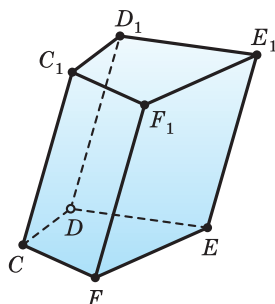


Рыс. 43

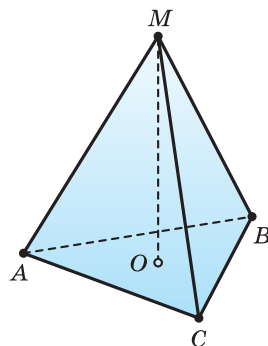
4. На рысунку 44 паказана пяцівугольная прызма $UVWXYU_1V_1W_1X_1Y_1$ і яе дыяганаль UX_1 . Назавіце іншыя дыяганалі гэтага мнагагранніка.
5. На рысунку 45 паказана чатырохвугольная прызма. Назавіце:
 - а) асновы прызмы;
 - б) бакавыя грані з кантам EE_1 ;
 - в) грані з кантам DE .
6. Старана асновы правільнай трохвугольнай прызмы роўная 6 см, а бакавы кант — 11 см. Знайдзіце бакавую і поўную паверхні прызмы.
7. Старана асновы правільнай n -вугольнай прызмы роўная a , а яе бакавы кант — h . Знайдзіце бакавую і поўную паверхні прызмы, улічыўшы, што:
 - а) $n = 3, a = 5, h = 10$;
 - б) $n = 4, a = 10, h = 30$;
 - в) $n = 6, a = 18, h = 32$.
8. Асновай прамой прызмы з'яўляецца трохвугольнік са старанамі 3 см і 5 см і вуглом паміж імі ў 120° , а найбольшая з плошчаў бакавых граняў роўная 35 см^2 . Знайдзіце поўную паверхню прызмы.
9. Асновай прамога паралелепіпеда з бакавым кантам 8 м з'яўляецца ромб з дыяганалямі 10 м і 24 м. Знайдзіце бакавую і поўную паверхню паралелепіпеда.
10. Асновай прамой прызмы з'яўляецца раўнабедраная трапецыя з асновамі 25 см і 15 см і вышынёй 12 см. Знайдзіце бакавую паверхню прызмы, улічыўшы, што яе бакавы кант роўны 20 см.
11. Старана асновы ABC правільнай трохвугольнай піраміды $MABC$ роўная $10\sqrt{3}$ см, а адрэзак, што злучае вяршыню M піраміды з цэнтрам O асновы, — 12 см (рыс. 46). Знайдзіце:
 - а) апафему піраміды;
 - б) бакавую паверхню піраміды;
 - в) поўную паверхню піраміды.



Рыс. 44

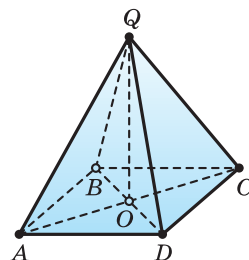


Рыс. 45



Рыс. 46

12. Апафема правільнай чатырохвугольнай піраміды роўная 15 см, а адрэзак, што злучае вяршыню піраміды з цэнтрам асновы, — 12 см. Знайдзіце:
- а) бакавы кант;
 - б) бакавую паверхню піраміды;
 - в) поўную паверхню піраміды.
13. Бакавая паверхня правільнай шасцівугольнай піраміды роўная 150 см^2 , а яе апафема — 10 см. Знайдзіце плошчу асновы піраміды.
14. Старана асновы правільнай шасцівугольнай піраміды роўная 10 см, а адрэзак, што злучае вяршыню піраміды з цэнтрам асновы, — $\sqrt{69}$ см. Знайдзіце:
- а) бакавы кант і апафему піраміды;
 - б) бакавую паверхню піраміды;
 - в) поўную паверхню піраміды.
15. Апафема правільнай шасцівугольнай піраміды роўная 26 см, а адрэзак, што злучае вяршыню піраміды з цэнтрам асновы, — 10 см. Знайдзіце:
- а) бакавы кант і старану асновы піраміды;
 - б) бакавую паверхню піраміды;
 - в) поўную паверхню піраміды.
16. Асновай піраміды $QABCD$ з'яўляецца ромб $ABCD$ са стараной, роўнай 10 см, адна з дыяганалей якога 16 см. Адрэзак, што злучае вяршыню Q піраміды з пунктам O перасячэння дыяганалей асновы, перпендыкулярны гэтым дыяганалям і роўны 14 см (рыс. 47). Знайдзіце:
- а) бакавыя канты піраміды;
 - б) бакавую паверхню піраміды.
17. Асновай піраміды $REFGH$ з'яўляецца паралелаграм $EFGH$ са старанамі 10 см і 18 см, плошчай 90 см^2 . Адрэзак, што злучае вяршыню R піраміды з пунктам O перасячэння дыяганалей асновы, перпендыкулярны гэтым дыяганалям і роўны 6 см. Знайдзіце:
- а) бакавыя канты піраміды;
 - б) бакавую паверхню піраміды;
 - в) поўную паверхню піраміды.
- 18*. Асновай піраміды з'яўляецца паралелаграм са старанамі 8 м, 10 м і меншай дыяганаллю 6 м. Адрэзак, што злучае вяршыню піраміды з пунктам перасячэння дыяганалей асновы,



Рыс. 47

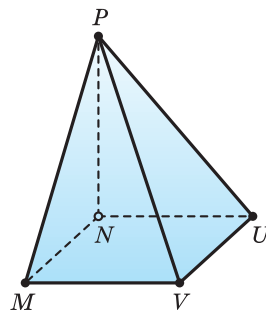
перпендыкулярны гэтым дыяганалям і роўны 4 м. Знайдзіце:

- а) бакавыя канты піраміды;
- б) бакавую паверхню піраміды;
- в) поўную паверхню піраміды.

- 19*.** Асновай піраміды $PMNUV$ з'яўляецца квадрат $MNUV$ (рыс. 48). Бакавы кант PN перпендыкулярны да кожнай прамой плоскасці асновы, што праходзіць праз пункт N , вуглы M і U граняў PMV і PUV прамыя, а вуглы M і U граняў PMN і PUN роўныя 45° кожны. Найбольшы бакавы кант роўны 24 см. Знайдзіце:

- а) іншыя бакавыя канты піраміды;
- б) бакавую паверхню піраміды;
- в) поўную паверхню піраміды.

- 20*.** Асновай піраміды з'яўляецца ромб са стараной 15 см і меншай дыяганаллю 18 см. Адрэзак, што злучае вяршыню піраміды з пунктам перасячэння дыяганалей, перпендыкулярны ім і роўны 12 см. Знайдзіце вышыні граняў піраміды.

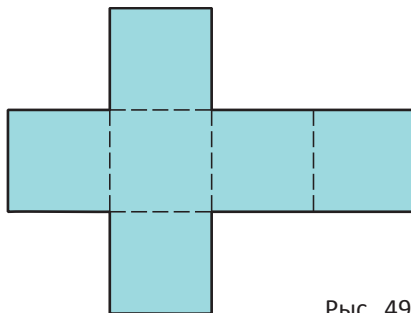


Рыс. 48



Прасторавое мадэляванне

1. Зрабіце выкрайку паверхні куба з кантам 5 см, прадугледзеўшы палоскі для склейвання (рыс. 49), і склейце сам куб.
2. Якія з фігур, паказаных на рысунку 50, з'яўляюцца разгорткамі куба?
3. Зрабіце выкрайку паверхні прамой прызмы з бакавым кантам 5 см, у аснове якой знаходзіцца трапецыя са старанамі 6 см, 3 см, 3 см, 3 см, і склейце саму прызму.



Рыс. 49

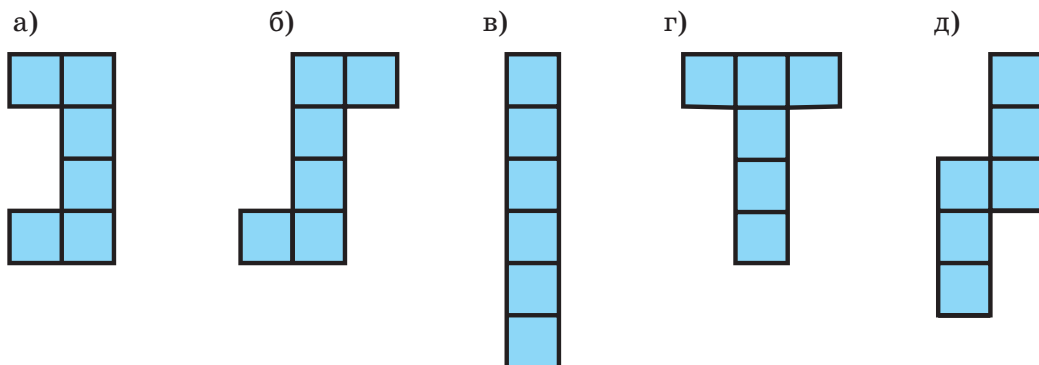


Рис. 50

4. Зрабіце выкрайку паверхні правільнай чатырохвугольнай піраміды (рис. 51), старана асновы якой роўная 5 см, а бакавы кант — 7 см, і склейце саму піраміду.

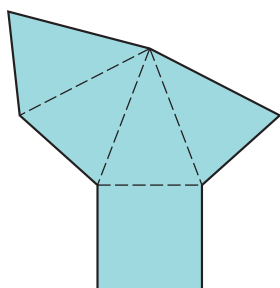


Рис. 51



Рис. 52

5. Зрабіце выкрайку паверхні піраміды, стораны асновы якой роўныя 4 см, 5 см і 7 см, а бакавыя канты — 7 см кожны, і склейце саму піраміду.

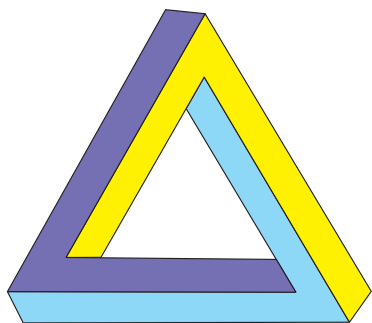
6. Знак нулявога кіламетра Беларусі ўстаноўлены на плошчы Незалежнасці (рис. 52). Яго мадэллю з'яўляецца правільная чатырохвугольная піраміда, у якой суседнія бакавыя канты ўзаемна перпендыкулярныя, а старана асновы роўная 1 м 40 см. Якая колькасць матэрыялу спатрэбіцца для абліцоўвання бакавой паверхні такой піраміды?

7. Ці можа разгорткай піраміды быць:

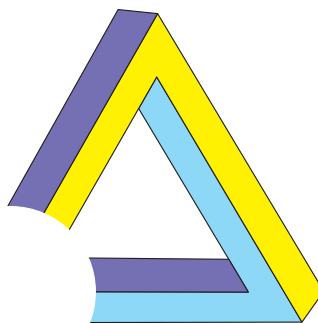
- | | |
|--------------------|-------------------|
| а) шасцівугольнік; | в) ромб; |
| б) прамавугольнік; | г) трохвугольнік? |

Адлюстраванне прасторавых фігур

Каб атрымаць відарыс прызмы, дастаткова пабудаваць многавугольнік — аснову прызмы. З вяршынь асновы правесці прамыя, паралельныя пэўнай фіксаванай прамой, і адкласці на іх роўныя адрэзкі. Злучаючы канцы гэтых адрэзкаў, атрымаем многавугольнік — другую аснову прызмы.



Рыс. 53



Рыс. 54



Рыс. 55

Каб атрымаць відарыс піраміды, дастаткова пабудаваць відарыс асновы піраміды, выбраць пэўны пункт у якасці выявы вяршыні піраміды і злучыць яго з вяршынямі многавугольніка асновы піраміды.

Не кожны відарыс успрымаецца намі як адлюстраванне фігуры, якая рэальна існуе. Ходкі выраз «падман зроку» па сутнасці сваёй няправільны. Вочы не могуць падмануць нас, паколькі з'яўляюцца толькі прамежкавым звяном паміж аб'ектам і мозгам чалавека. Падман звычайна ўзнікае не з-за таго, што мы бачым, а з-за таго, што неўсвядомлена разважаем і міжвольна памыляемся.

Немагчымыя аб'екты ўяўляюць сабою рысункі на двухмернай плоскасці, і гэтыя рысункі адлюстроўваюць трохмерныя структуры, існаванне якіх у рэальным трохмерным свеце падаецца немагчымым. Класічным прыкладам такой простае фігуры з'яўляецца немагчымы трохвугольнік Пенроўза (рыс. 53). У гэтым трохвугольніку кожны вугал сам па сабе з'яўляецца магчымым, але парадокс узнікае тады, калі мы разглядаем яго цалкам. Стораны трохвугольніка накіраваны адначасова і на гледача, і ад яго, таму асобныя часткі трохвугольніка не могуць утварыць рэальны трохмерны аб'ект.

Наш мозг інтэрпрэтуе рысунак на плоскасці як трохмерную мадэль. Свядомасць задае «глыбіню», на якой знаходзіцца кожны пункт рысунка. Нашы ўяўленні пра рэальны свет сутыкаюцца з супярэчнасцю, з пэўнай непаслядоўнасцю, і даводзіцца рабіць некаторыя дапушчэнні: прамыя двухмерныя лініі інтэрпрэтуюцца як прамыя трохмерныя лініі; двухмерныя паралельныя лініі інтэрпрэтуюцца як трохмерныя паралельныя лініі; вострыя і тупыя вуглы інтэрпрэтуюцца як прамыя вуглы ў перспектыве; знешнія лініі разглядаюцца як мяжа формы, якая надзвычай важная для ўспрымання поўнай выявы.

Чалавечая свядомасць спачатку стварае агульны рысунак прадмета, а затым разглядае яго асобныя часткі. Кожны вугал сумяшчальны з прасторавай перспектывай, але, уз'яднаўшыся, яны ўтвараюць прасторавы парадокс. Калі закрыць любы з вуголоў трохвугольніка (рыс. 54), то немагчымасць існавання знікае.

Падобныя фігуры сталі крыніцай натхнення для многіх творцаў. Графік Маўрыцыя Эшэр стварыў шэраг літаграфій (рыс. 55), якія прынеслі яму вядомасць мастака-ілюзіяніста.