



«Веды толькі тады з'яўляюцца ведамі,
калі яны набыты намаганнямі
свайго мыслення, а не памяці»
(Л. М. Талстой).

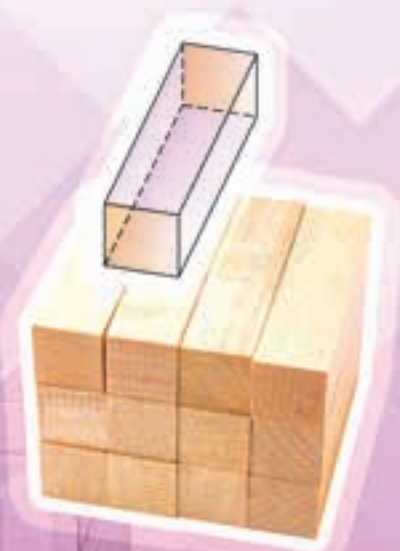
РАЗДЗЕЛ

2

ПАРАЛЕЛЬНАСЦЬ ПРАМЫХ І ПЛОСКАСЦЕЙ

У гэтым раздзеле вы будзеце вывучаць:

- » узаемнае размяшчэнне прамых у прасторы;
- » узаемнае размяшчэнне прамой і плоскасці ў прасторы;
- » узаемнае размяшчэнне дзвюх плоскасцей.



§ 4. Узаємне розміщення прямих у просторі

А) Дзве прямі простору називаються **паралельними прямими**, калі яны ляжаць у адной плоскості і не маюць агульных пунктаў.

На плоскості праз дадзены пункт можна правесці адзіную прамую, паралельную дадзенай. Гэта сцверджанне з'яўляецца праўдзівым і ў простору.

Тэарэма 1. Праз пункт па-за дадзенай прамой можна правесці адзіную прамую, паралельную дадзенай прамой.

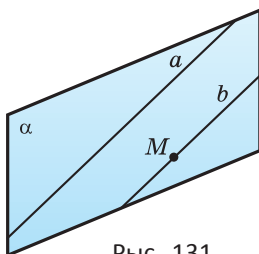


Рис. 131

Доказ. Няхай ёсць прамая a і пункт M па-за ёю (рис. 131). Па тэарэме 3 з параграфу 2 праз прамую a і пункт M праходзіць адзіная плоскасць — плоскасць α . Калі прамая праходзіць праз пункт M паралельна прамой a , то яна павінна ляжаць у плоскасці α . У плоскасці α праз пункт M праходзіць адзіная прамая b , паралельная прамой a . Прамая b — шуканая прамая, і яна адзіная.

На плоскості, калі адна з паралельных прамых перасякае іншую прамую, то і другая таксама перасякае яе. Аналагічнае сцверджанне з'яўляецца праўдзівым і ў простору.

Тэарэма 2. Калі адна з дзвюх паралельных прамых перасякае плоскасць, то і другая прамая перасякае гэту плоскасць.

Доказ. Няхай ёсць дзве паралельныя прамыя b і c , і адна з іх — прамая b — перасякае плоскасць β у пункце M (рис. 132).

Паколькі прамыя b і c паралельныя, то яны ляжаць у адной плоскасці, няхай гэта будзе плоскасць γ . Плошкості β і γ маюць агульны пункт M , таму па аксіёме 3 яны маюць і агульную прамую l . Гэта прамая ляжыць у плоскасці γ і перасякае прамую b у пункце M , таму яна перасякае паралельную ёй прамую c у пэўным пункце N .

Паколькі прамая l ляжыць і ў плоскасці β , то пункт N належыць гэтай плоскасці. Значыць, пункт N — агульны пункт плоскасцей β і γ .

Застаецца даказаць, што прамая c з плоскасцю β не мае іншых агульных пунктаў. Дапусцім, што гэта не так. Няхай прамая c мае з плоскасцю β яшчэ адзін агульны пункт K . Тады па аксіёме 2 прамая c ляжыць у плоскасці β . Атрымліваецца, што прамая c — агульная прамая плоскасцей β і γ . Але такой прамой з'яўляецца прамая l . Значыць, прамая c супадае з прамой l , што немагчыма, бо прамая b паралельная прамой c і перасякае прамую l .

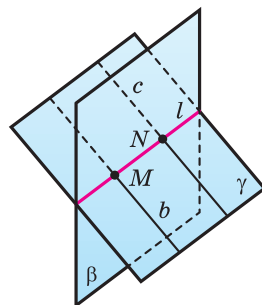


Рис. 132

Вы ведаеце, што калі на плоскасці дзве прамыя паралельныя трэцяй, то яны паралельныя і адна адной. Дакажам, што такое сцверджанне з'яўляецца правільным і ў прасторы.

Тэарэма 3. Калі дзве розныя прамыя паралельныя трэцяй прамой, то яны паралельныя і адна адной.

Доказ. Няхай прамыя m і n паралельныя прамой p (рис. 133). Дакажам, што прамая m паралельная прамой n , г. зн. прамыя m і n ляжаць у адной плоскасці і не перасякаюцца.

На прамой m выберам адвольна пункт A , праз яго і прамую n правядзём плоскасць α . Дакажам, што прамая m ляжыць у гэтай плоскасці. Дапусцім, што гэта не так. Улічыўшы, што прамая m мае з плоскасцю α агульны пункт, трэба пагадзіцца, што прамая m перасякае плоскасць α . Тады па тэарэме 2 гэту плоскасць перасякае прамая p , бо яна паралельная прамой m і прамая n паралельная прамой p . Але такое немагчыма, бо прамая n ляжыць у плоскасці α . Значыць, прамая m разам з прамой n ляжаць у плоскасці α .

Правыя m і n не перасякаюцца. Дапусцім, што гэта не так, г. зн. прамыя m і n перасякаюцца ў пэўным пункце B . Атрымліваецца, што праз пункт B праходзяць дзве розныя прамыя m і n , паралельныя прамой p , што супярэчыць тэарэме 1.

Выкарыстаўшы тэарэму 3, можна даказаць важныя сцверджанні пра паралелепіпед.

Тэарэма 4. У паралелепіпеда: а) супрацьлеглыя грані роўныя; б) усе яго дыяганалі перасякаюцца ў адным пункце і дзеляцца ім папалам.

Доказ. Няхай ёсць паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 134).

а) Дакажам, напрыклад, роўнасць супрацьлеглых граняў $ABCD$ і $A_1 B_1 C_1 D_1$.

Адрэзкі AB і $A_1 B_1$ а таксама BC і $B_1 C_1$ роўныя, як супрацьлеглыя стораны паралелаграмаў $ABB_1 A_1$ і $BCC_1 B_1$ адпаведна. Адрэзкі AA_1 і CC_1 паралельныя і роўныя адзін аднаму, бо кожны з іх паралельны адрэзку BB_1 і роўны яму. Значыць, чатырохвугольнік $ACC_1 A_1$ — паралелаграм. А таму адрэзкі AC і $A_1 C_1$ роўныя адзін аднаму як супрацьлеглыя стораны гэтага паралелаграма.

Паколькі $AB = A_1 B_1$, $BC = B_1 C_1$ і $AC = A_1 C_1$, то трохвугольнікі ABC і $A_1 B_1 C_1$ роўныя. Таму роўныя і вуглы ABC і $A_1 B_1 C_1$. Значыць, роўныя адзін аднаму і паралелаграмы-грані $ABCD$ і $A_1 B_1 C_1 D_1$.

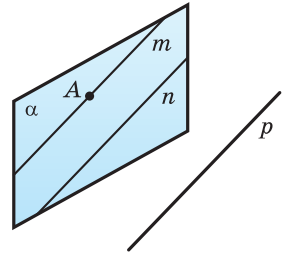


Рис. 133

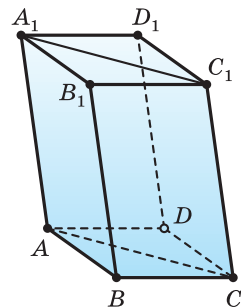


Рис. 134

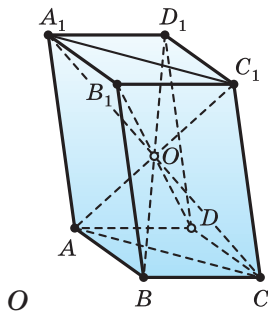


Рис. 135

б) Дакажам, што ўсе дыяганалі паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ перасякаюцца ў адным пункце і дзеляцца ім папалам.

Чатырохвугольнік $AA_1 C_1 C$ — паралелаграм, бо яго супрацьлеглыя стораны AA_1 і CC_1 роўныя і паралельныя адна адной з-за таго, што кожны з адрэзкаў AA_1 і CC_1 роўны адрэзку DD_1 і паралельны яму (рис. 135). Таму дыяганалі AC_1 і CA_1 пунктам перасячэння дзеляцца папалам.

Чатырохвугольнік $DCB_1 A_1$ — таксама паралелаграм, таму яго дыяганаль DB_1 перасякае другую дыяганаль CA_1 у яе сярэдзіне, г. зн. у пункце O .

Нарэшце, чатырохвугольнік $ABC_1 D_1$ — паралелаграм, таму яго дыяганаль BD_1 перасякае другую дыяганаль AC_1 у яе сярэдзіне O .

Калі дзве прамыя перасякаюцца (рис. 136) або паралельныя (рис. 137), то яны ляжаць у адной плоскасці. Дзве прамыя, якія не ляжаць у адной плоскасці, называюцца **скрыжаванымі** (рис. 138).

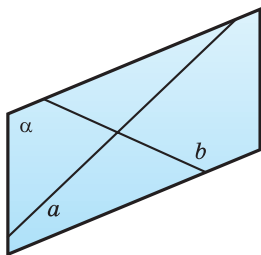


Рис. 136

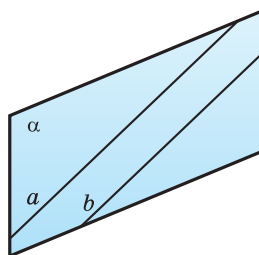


Рис. 137

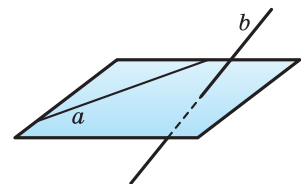


Рис. 138

Дакажам прымету скрыжаванасці прамых.

Тэарэма 5. Калі з дзвюх прамых адна належыць пэўнай плоскасці, а другая перасякае гэту плоскасць у пункце, не прыналежным першай прамой, то такія прамыя з'яўляюцца скрыжаванымі.

Доказ. Няхай прамая p ляжыць у плоскасці α , а прамая q перасякае гэту плоскасць у пункце A , што не належыць прамой p (рис. 139). Дакажам, што прамыя p і q скрыжоўваюцца.

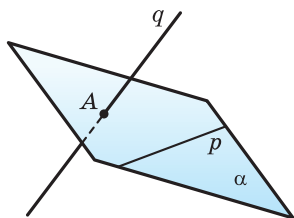


Рис. 139

Дапусцім, што прамыя p і q ляжаць у пэўнай плоскасці β . Тады плоскасці β належыць прамая p і пункт A , які належыць прамой q , і, значыць, плоскасць β супадае з плоскасцю α . Атрымалася, што плоскасці α належыць прамая q , якая па ўмове ёй не належыць. Гэта супярэчнасць азначае, што зробленае дапушчэнне непраўдзівае.

Б) Мы ведаем, што *вуглом паміж перасякальнымі прамымі* называецца велічыня аднаго з чатырох узніклых пры гэтым вуглоў, які не большы за 90° (рыс. 140).

Вуглом паміж скрыжаванымі прамымі называецца вугал паміж перасякальнымі прамымі, паралельнымі дадзеным скрыжаваным прамым.

Дакажам, што гэта азначэнне карэктнае, г. зн. не залежыць ад выбару пункта, праз які праходзяць прамыя, паралельныя дадзеным скрыжаваным прамым.

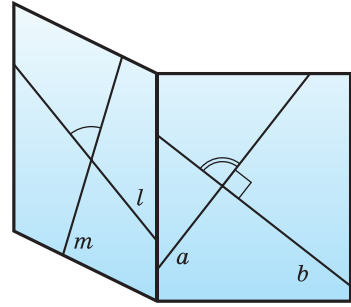


Рис. 140

Тэарэма 6. Вугал паміж перасякальнымі прамымі роўны вуглу паміж паралельнымі ім перасякальнымі прамымі.

Доказ. Няхай прамыя a і b перасякаюцца ў пункце O , прамыя a_1 і b_1 — у пункце O_1 і $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$ (рыс. 141).

Ад пункта O на прамой a адкладзём роўныя адрэзкі OA і OB , а на прамой b — адрэзак OC , роўны адрэзку OA . Праз пункты A і B правядзём прамыя, паралельныя прамой OO_1 , яны перасякуць прамую a_1 ў пунктах A_1 і B_1 адпаведна. Праз пункт C правядзём прамую, паралельную прамой OO_1 , яна перасячэ прамую b_1 у пункце C_1 .

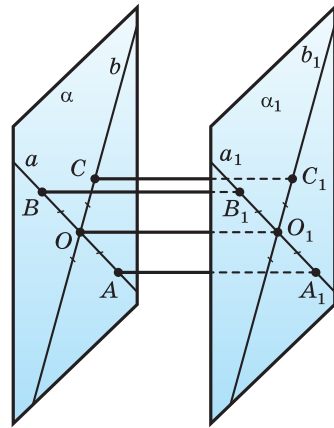


Рис. 141

Чатырохвугольнік OO_1A_1A з'яўляецца паралелаграмам, бо яго супрацьлеглыя стораны OA і O_1A_1 паралельныя і роўныя. Таму $AA_1 = OO_1$ і $AA_1 \parallel OO_1$. Гэтаксама, паколькі чатырохвугольнік OO_1B_1B — паралелаграм, то $BB_1 = OO_1$ і $BB_1 \parallel OO_1$, а паколькі OO_1C_1C — паралелаграм, то $BB_1 = CC_1$ і $CC_1 \parallel OO_1$.

Паколькі кожны з адрэзкаў AA_1 , BB_1 , CC_1 роўны і паралельны адрэзку OO_1 , то яны роўныя і паралельныя адзін аднаму. Таму чатырохвугольнікі AA_1C_1C і BB_1C_1C абодва з'яўляюцца паралелаграмамі і, значыць, $AC = A_1C_1$ і $BC = B_1C_1$.

Цяпер па прымеце роўнасці трохвугольнікаў па трох старанах можна сцвярджаць, што $\triangle AOC = \triangle A_1O_1C_1$ і $\triangle BOC = \triangle B_1O_1C_1$, а таму $\angle AOC = \angle A_1O_1C_1$ і $\angle BOC = \angle B_1O_1C_1$.

Такім чынам мы даказалі, што вуглы, утвораныя пры перасячэнні прамых a і b , такія самыя, як і пры перасячэнні прамых a_1 і b_1 .

На рысунку 142 паказана, як можна знайсці вугал паміж скрыжаванымі прамымі: выбраць адвольна пункт A прасторы і праз яго правесці

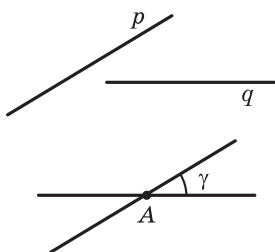


Рис. 142

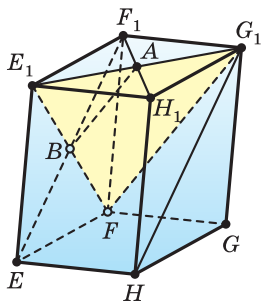


Рис. 143

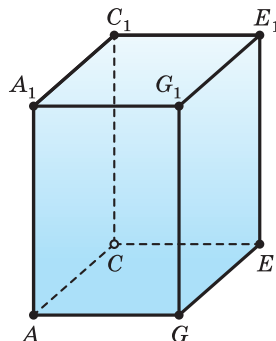


Рис. 144

прямая, паралельна цьому скриваваному прямим. Зрозуміла, що пункт A може бути вибраний і на одній з скриваваних прямих.

Приклад. На рисунку 143 пункти A і B — пункти пересічення діагоналей граней $E_1F_1G_1H_1$ і EE_1F_1F паралелепіпеда $EFGHE_1F_1G_1H_1$. Побудуємо кут між скриваваними прямими AB і HG_1 . Для цього в площині E_1FG_1 , в якій належить пункт G_1 і пряма AB , пропустимо через пункт G_1 паралельно прямій AB пряму. Ця пряма G_1F . Кут FG_1H — шуканий кут між скриваваними прямими AB і HG_1 .

Кут між паралельними прямими лічимо нуль.

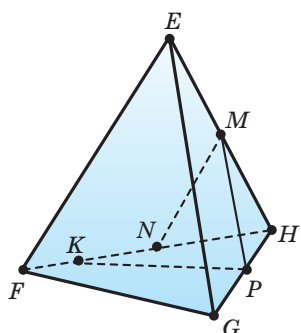
Прямі, кут між якими нуль 90° , називаються **перпендикулярними** прямими.

Перпендикулярні прямі можуть бути пересікальними, а можуть бути і скриваваними. Наприклад, перпендикулярні прямі AC і AG , які проходять через відповідні ребра прямокутного паралелепіпеда $ACEGA_1C_1E_1G_1$ (рис. 144), пересікаються, а перпендикулярні прямі AC і EE_1 скриваються.

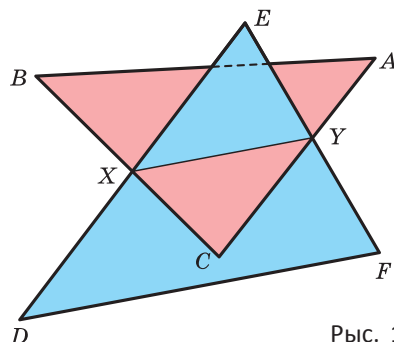


1. Сформулюйте твердження про прямих, що проходять через заданий пункт паралельно заданій прямій.
2. Які дві прямих простору називаються паралельними; пересікальними; скриваваними?
3. Сформулюйте твердження про паралельні прямі, одна з яких пересікає задану площину.
4. Сформулюйте твердження про прямих, паралельних іншій прямій.
5. Сформулюйте властивість супротивних кутів граней прямокутного паралелепіпеда; діагоналей прямокутного паралелепіпеда.
6. Сформулюйте ознаку скриваваних прямих.
7. Який кут називають кутом між пересікальними прямими; скриваваними прямими; паралельними прямими?

8. Як пабудаваць вугал паміж скрыжаванымі прамымі?
9. Якія прамыя называюць перпендыкулярнымі?
10. Пункты M, N, P — адпаведна сярэдзіны кантаў HE, HF, HG трохвугольнай піраміды $EFGH$ (рыс. 145), а пункт K ляжыць на адрэзку FN . Вызначце ўзаемнае размяшчэнне прамых:
- а) PK і FG ; б) MP і EG ; в) NH і EF .
11. Вызначце, ці перасякаюцца прамыя, на якіх ляжаць асновы двух трохвугольнікаў BAC і DFE (рыс. 146), што маюць агульную сярэднюю лінію.



Рыс. 145



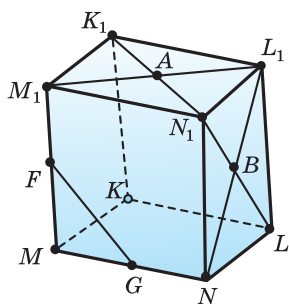
Рыс. 146

12. Вызначце ўзаемнае размяшчэнне ліній ракі і ліній моста (рыс. 147).

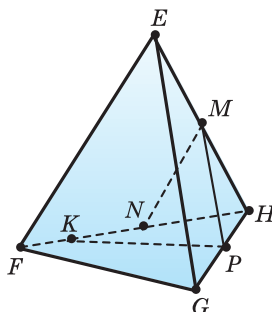


Рыс. 147

13. Ёсць куб $LKMNL_1K_1M_1N_1$. Пакажыце скрыжаваныя прамыя, выкарыстаўшы рысунак 148.
14. У трохвугольнай пірамідзе $EFGH$ пункты M, N, P — сярэдзіны кантаў HE, HF, HG адпаведна, а пункт K ляжыць на адрэзку FN (рыс. 149). Вызначце ўзаемнае размяшчэнне прамых:
- а) KP і MN ; б) MN і EG ; в) MH і FG .



Рыс. 148



Рыс. 149



Задача 1. Діагоналі грані $L_1K_1M_1N_1$ куба $LKMNL_1K_1M_1N_1$ пересикаються в пункце A , а діагоналі грані LL_1N_1N — у пункце B . Сярэдынамі кантаў MM_1 і MN з'яўляюцца пункты F і G адпаведна (рыс. 150). Вызначце ўзаемнае размяшчэнне прамых AB і FG .

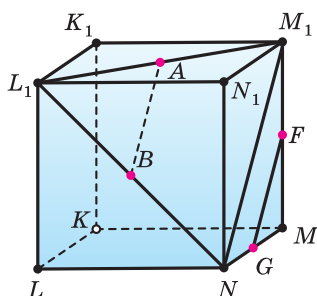


Рис. 150

Рашэнне. $LKMNL_1K_1M_1N_1$ — куб, таму $L_1K_1M_1N_1$ — квадрат і LL_1N_1N — квадрат.

$L_1K_1M_1N_1$ — квадрат і $L_1M_1 \cap K_1N_1 = A$, таму A — сярэдына L_1M_1 .

LL_1N_1N — квадрат і $L_1N \cap LN_1 = B$, таму B — сярэдына L_1N .

Паколькі AB — сярэдняя лінія $\triangle NL_1M_1$ (A — сярэдына L_1M_1 і B — сярэдына L_1N), то $AB \parallel NM_1$.

Паколькі FG — сярэдняя лінія $\triangle NMM_1$ (F — сярэдына MM_1 і G — сярэдына MN), то $FG \parallel NM_1$.
 $AB \parallel NM_1$ і $FG \parallel NM_1$, таму $AB \parallel FG$.

А д к а з: $AB \parallel FG$.

Задача 2. Адрэзак XY мае з плоскасцю β адзіны агульны пункт X . Праз пункт Y і сярэдзіну Z адрэзка XY праведзены паралельныя прамыя, якія перасякаюць плоскасць β у пунктах Y_1 і Z_1 адпаведна (рыс. 151).

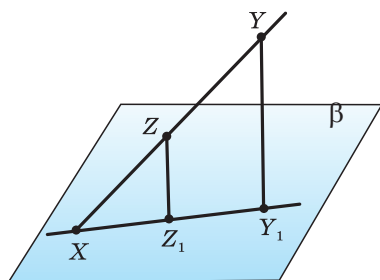


Рис. 151

Знайдзіце даўжыню адрэзка YY_1 , улічыўшы, што $ZZ_1 = 10$ см.

Рашэнне. Перасякальныя прамыя XY і YY_1 вызначаюць плоскасць XYY_1 .

$XY_1 \subset (XYY_1)$ і $XY_1 \subset \beta$, таму $(XYY_1) \cap \beta = XY_1$.
 $Y_1 \in \beta$, $Z_1 \in \beta$ і $YY_1 \parallel ZZ_1$, таму $ZZ_1 \subset (XYY_1)$ і $Z_1 \in XY_1$.

ZZ_1 — сярэдняя лінія $\triangle XYY_1$ (Z — сярэдына XY і $YY_1 \parallel ZZ_1$), таму $YY_1 = 2ZZ_1 = 2 \cdot 10 = 20$ (см).

А д к а з: 20 см.

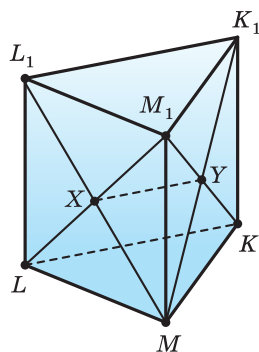


Рис. 152

Задача 3. $LKML_1K_1M_1$ — правільная трохвугольная прызма, даўжыня кожнага канта якой роўная 1 м. Дыяганалі граняў LL_1M_1M і MM_1K_1K перасякаюцца адпаведна ў пунктах X і Y (рыс. 152). Знайдзіце плошчу чатырохвугольніка XL_1K_1Y .

Рашэнне. $LKML_1K_1M_1$ — правільная трохвугольная прызма і $LK = KM = LM = L_1K_1 = K_1M_1 = L_1M_1 = LL_1 = KK_1 = MM_1 = 1$ м, таму LL_1M_1M і MM_1K_1K — квадраты са старонай 1 м.

Таму $ML_1 = MK_1 = \sqrt{2}$ м.

$X = ML_1 \cap LM_1$ і $Y = KM_1 \cap MK_1$, тому $MX = XL_1$ і $K_1Y = YM$.
 $MX = XL_1$ і $K_1Y = YM$, тому XY — середня лінія $\triangle ML_1K_1$.

XY — середня лінія $\triangle ML_1K_1$, тому $XY = \frac{1}{2} L_1K_1 = \frac{1}{2} (м)$ і $XY \parallel L_1K_1$.

XY — середня лінія $\triangle ML_1K_1$, тому $S_{MHY} = \frac{1}{4} S_{ML_1K_1}$, $S_{XL_1K_1Y} = \frac{3}{4} S_{ML_1K_1}$.

$$p_{ML_1K_1} = \frac{ML_1 + L_1K_1 + MK_1}{2} = \frac{\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2}}{2} = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2} (м).$$

$$\begin{aligned} S_{ML_1K_1} &= \sqrt{p_{ML_1K_1} (p_{ML_1K_1} - ML_1) (p_{ML_1K_1} - L_1K_1) (p_{ML_1K_1} - MK_1)} = \\ &= \sqrt{\frac{1 + 2\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1 + 2\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} \right) \left(\frac{1 + 2\sqrt{2}}{2} - 1 \right) \left(\frac{1 + 2\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} \right)} = \\ &= \sqrt{\frac{1 + 2\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2\sqrt{2} - 1}{2} \right) \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{4} (м^2). \end{aligned}$$

$$S_{XL_1K_1Y} = \frac{3}{4} S_{ML_1K_1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{16} (м^2).$$

А д к а з: $\frac{3\sqrt{7}}{16} м^2$.

Задача 4. На канце HX трохвугольної піраміди $HXYZ$ (рис. 153) выбрані такі пункт S , што $HS : SX = 2 : 5$, і праз яго праведзена прамая q , паралельная медыяне HP грані HYZ . Знайдзіце медыяну HP , улічыўшы, што даўжыня адрэзка прамой q , размешчанага ўнутры піраміды, роўная 35 см.

Рашэнне. Паколькі пункты X і P ляжаць як у плоскасці HXP , так і ў плоскасці XYZ , то $(HXP) \cap (XYZ) = XP$. Пункт S прамой HX ляжыць у плоскасці HXP , бо $HX \subset (HXP)$.

Прамая q праходзіць праз пункт S плоскасці HXP паралельна прамой HP гэтай плоскасці, таму $q \subset (HXP)$.

Паколькі прамыя $q \parallel HP$, а прамыя HP і XP перасякаюцца, то перасякаюцца і прамыя q і XP . Няхай $q \cap XP = Q$.

$\triangle HXP \sim \triangle SXQ$ ($SQ \parallel HP$), таму $HP : SQ = HX : SX$,

$$\begin{aligned} HP &= SQ \cdot HX : SX = SQ \cdot \frac{HS + SX}{SX} = SQ \cdot \left(\frac{HS}{SX} + 1 \right) = \\ &= 35 \cdot \left(\frac{2}{5} + 1 \right) = 49 (см). \end{aligned}$$

А д к а з: 49 см.

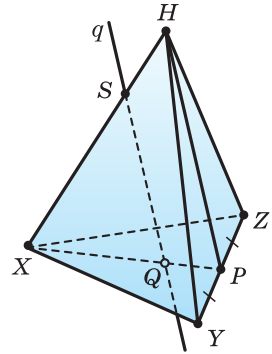


Рис. 153

Задача 5. Прямая l паралельна діагоналі AC паралелограма $ABCD$ і не лежить у його площині. Доведіть, що пряма l і CD — скрещовані, і знайдіть кут між ними, якщо $\angle BAC = 60^\circ$.

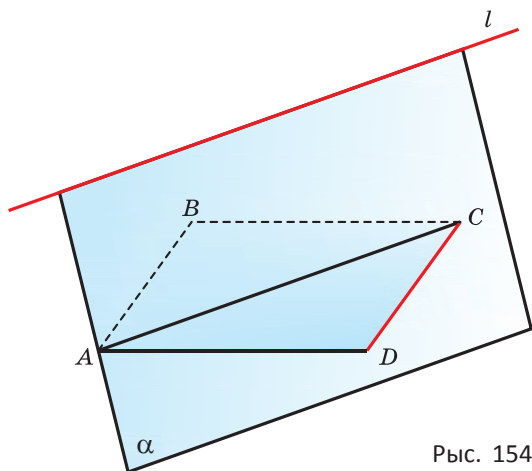


Рис. 154

Розв'язок. Нехай α — площина, у якій лежать паралельні прямі l і AC . Тоді $\alpha \cap (ACD) = AC$ (рис. 154).

Оскільки $C \in \alpha$, а $D \notin \alpha$, то $CD = \alpha \cap (ACD)$.

Прямі l і CD — скрещовані за теоремою 5 ($l \subset \alpha$, $C = \alpha \cap CD$ і $C \notin l$).

$l \parallel AC$, тому кут між l і CD дорівнює куту між AC і CD і дорівнює куту DCA (теорема 6).

$ABCD$ — паралелограм, тому $\angle DCA = \angle BAC = 60^\circ$.

Відповідь: 60° .



99. Точки M і N — середини ребер PC і PD трикутної піраміди $PCDE$, а точки U і V — середини відрізків EM і EN (рис. 155). Визначте, чи є прямі MN і UV паралельними.
100. Доведіть, що середини сторін просторового чотирикутника (рис. 156) є вершинами паралелограма.
101. Паралелограм $MNKL$ і трикутник NAK не лежать у одній площині. Прямі a і b проходять через точку P прямої AK і паралельні прямій MN і KL . Визначте взаємне розташування прямих a і b .
102. Єсть правильна чотирикутна піраміда $PMNKL$. На прямій PL вибрано точку D , через яку проведена пряма l , паралельна прямій MN . Визначте взаємне розташування прямих l і KL .

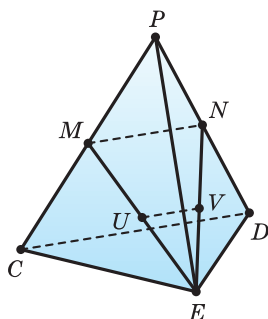


Рис. 155

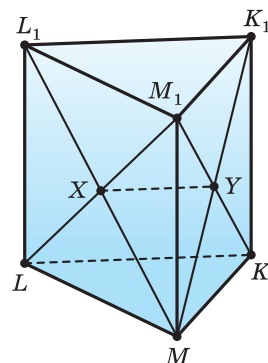


Просторовий чотирикутник — чотирикутник, вершини якого не належать одній площині.

Рис. 156

103. Ёсць паралелаграм $MNOP$ і трапецыя $MNEK$ з асновай EK , прычым гэтыя чатырохвугольнікі не ляжаць у адной плоскасці.
а) Вызначце ўзаемнае размяшчэнне прамых OP і EK .

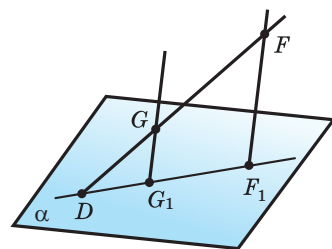
б) Знайдзіце перыметр трапецыі, улічыўшы, што ў яе можна ўмежыць акружнасць, а яе асновы MN і EK роўныя 45 см і 55 см адпаведна.



Рыс. 157

104. $LKML_1K_1M_1$ — правільная трохвугольная прызма, даўжыня кожнага канта якой роўная 2 м. Дыяганалі граняў LL_1M_1M і MM_1K_1K перасякаюцца адпаведна ў пунктах X і Y (рыс. 157). Знайдзіце перыметр чатырохвугольніка $XLKY$.

105. Пункт P ляжыць на працягу канта NM паралелепіпеда $LKMN L_1K_1M_1N_1$. Знайдзіце адлегласць ад пункта N да пункта перасячэння прамой M_1P з плоскасцю LL_1N , улічыўшы, што $MM_1 = 24$ м, $NM = 12$ м, $PM = 18$ м.



Рыс. 158

106. Канец D адрэзка DF належыць плоскасці α , праз другі яго канец F і яго пункт G праведзены паралельныя прамыя, якія перасякаюць плоскасць α у пунктах F_1 і G_1 (рыс. 158). Знайдзіце даўжыню адрэзка GG_1 , улічыўшы, што $FF_1 = 32$ см і $DG : GF = 3 : 5$.

107. Вяршыні M і N трапецыі $MNLK$ з асновамі NL і KM належаць плоскасці γ , а дзве іншыя вяршыні не належаць ёй. Знайдзіце адлегласць ад пункта M да пункта перасячэння прамой LK з плоскасцю γ , улічыўшы, што $MK = 16$ см, $MN = 9$ см, $NL = 12$ см.

108. Пункт E ёсць пункт адрэзка TR , які не перасякае плоскасць γ . Паралельныя прамыя, праведзеныя праз пункты T, R, E , перасякаюць плоскасць γ у пунктах T_1, R_1, E_1 адпаведна. Дакажыце, што пункты T_1, R_1, E_1 ляжаць на адной прамой, і знайдзіце адрэзак EE_1 , улічыўшы, што $TT_1 = 27$ см, $RR_1 = 15$ см, $TE : RE = 1 : 3$.

109. На адрэзку AB , канец A якога належыць плоскасці α , выбраны пункт C , і праз пункты B і C праведзены паралельныя прамыя, што перасякаюць плоскасць α у пунктах B_1 і C_1 адпаведна. Знайдзіце адрэзак CC_1 , улічыўшы, што:

- а) пункт C — сярэдзіна адрэзка AB і $BB_1 = 14$ см;
б) $AC : CB = 3 : 2$ і $BB_1 = 50$ см.

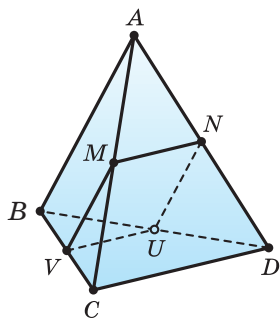


Рис. 159

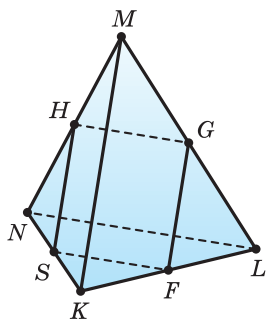


Рис. 160

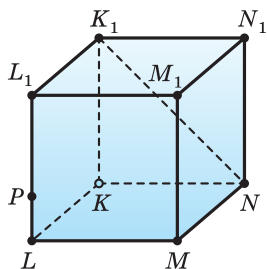
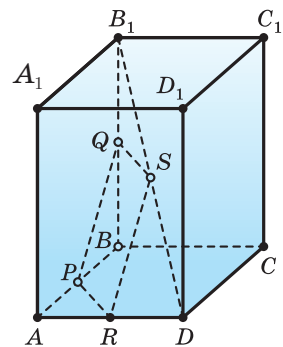


Рис. 161

- 110.** Точки M, N, U, V — відповідно середини ребер AC, AD, BD, BC трикутної піраміди $ABCD$ (рис. 159). Знайдіть периметр чотирикутника $MNUV$, врахувавши, що $AB = 20$ см, $CD = 30$ см.
- 111.** Точки H, G, F, S — середини ребер MN, ML, LK, KN трикутної піраміди $MKLN$ (рис. 160). Знайдіть периметр чотирикутника $HGFS$, врахувавши, що $LN = 18$ мм, $MK = 22$ мм.
- 112.** Точка P вибрана на ребрі LL_1 куба $KLMNK_1L_1M_1N_1$ (рис. 161). Зробіть такий рисунок у шпальці і побудуйте точку перетину з площиною M_1N_1M прямої q , яка проходить через точку P і паралельна прямої NK_1 .
- 113.** Через вершини D і Q трикутника PDQ стараною PQ , рівної 20 см, проведена площина α , якої не належить вершина P . Врахувавши, що пряма x паралельна прямої PQ і перетинає старану PD у точці C , що $PC : CD = 2 : 3$:
- докажіть, що пряма x перетинає площину α ;
 - знайдіть відстань від точки C до точки перетину прямої x з площиною α .
- 114.** На ребрі GH трикутної піраміди $FGHK$ з рівними до одного ребрами вибрані такі точки T , що $HT : TG = 1 : 3$, і через нього проведена пряма h , яка паралельна медіані HM бакової грані KHF і яка перетинає верхню піраміду у точці R . Знайдіть ребро піраміди, врахувавши, що $TR = 6$ см.
- 115.** Через точку перетину медіан грані MNK трикутної піраміди $JMNK$ з рівними до одного ребрами проведена пряма b , паралельна прямої MJ , а на ребрі MJ позначена його середина Z . Знайдіть площу трикутника NZJ , врахувавши, що відрізок прямої b , розміщений всередині піраміди, рівний m .
- 116.** Пряма t перетинає старану AB трикутника ABC . Визначте взаємне розміщення прямих t і BC , врахувавши, що:
- пряма t лежить у площині ABC і не перетинає відрізок AC ;
 - пряма t не лежить у площині ABC .

- 117.** Пункты M і N выбраны на скрыжаваных прамых a і b адпаведна. Праз прамую a і пункт N праведзена плоскасць α , а праз прамую b і пункт M — плоскасць β . Вызначце:
- ці ляжыць прамая b у плоскасці α ;
 - ці перасякаюцца плоскасці α і β , і калі яны перасякаюцца, то па якой прамой.
- 118.** Дакажыце, што калі AB і CD — скрыжаваныя прамыя, то AD і BC — таксама скрыжаваныя прамыя.
- 119.** Праз пункт M па-за прамой a праведзены дзве прамыя, якія з прамой a не маюць агульных пунктаў. Дакажыце, што прынамсі адна з гэтых прамых і прамая a з'яўляюцца скрыжаванымі.
- 120.** Прамая m перасякае прамую k і не перасякае прамую l , паралельную прамой k . Дакажыце, што l і m — скрыжаваныя прамыя.
- 121.** Прамыя XU і VT — паралельныя, а прамыя XY і VT — скрыжаваныя. Знайдзіце вугал паміж прамымі XY і VT , улічыўшы, што:
- $\angle YXU = 40^\circ$;
 - $\angle YXU = 135^\circ$;
 - $\angle YXU = 90^\circ$.
- 122.** Прамая l паралельная старане BC паралелаграма $ABCD$ і не ляжыць у яго плоскасці. Дакажыце, што l і CD — скрыжаваныя прамыя, і знайдзіце вугал паміж імі, улічыўшы, што адзін з вуглоў паралелаграма роўны:
- 58° ;
 - 133° .
- 123.** Прамая m паралельная дыяганалі FH ромба $EFGH$ і не ляжыць у плоскасці ромба. Дакажыце скрыжаванасць прамых:
- m і EG і знайдзіце вугал паміж імі;
 - m і EH і знайдзіце вугал паміж імі, улічыўшы, што $\angle EFG = 128^\circ$.
- 124.** Праз вяршыню P ромба $PQRS$ праведзена прамая a , паралельная дыяганалі QS , а праз вяршыню R — прамая b , якая не ляжыць у плоскасці ромба. Дакажыце, што:
- прамая a і RS перасякаюцца;
 - a і b скрыжоўваюцца.
- 125.** Стораны AB і CD прасторавага чатырохвугольніка $ABCD$ роўныя. Дакажыце, што прамыя AB і CD утвараюць роўныя вуглы з прамой, што праходзіць праз сярэдзіну адрэзкаў BC і AD .
- 126*.** Пункты P , Q , R , S — сярэдзіны кантаў AB , BB_1 , AD і дыяганалі B_1D прамавугольнага паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у аснове якога ляжыць квадрат са стараной 1 м, а бакавы кант роўны 7 м (рыс. 162). Вызначце, у колькі разоў старана PQ чатырохвугольніка $PQSR$ большая за яго старану QS .



Рыс. 162