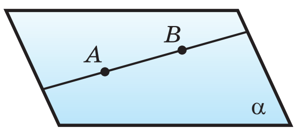
§ 5. Узаемнае размяшчэнне прамой і плоскасці ў прасторы

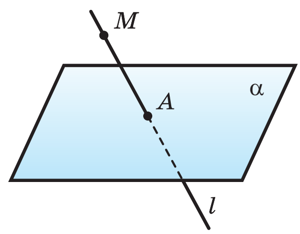
А) У прасторы агульных пунктаў у прамой і плоскасці можа быць ні аднаго, адзін або больш за адзін.

Калі ў прамой і плоскасці агульных пунктаў больш за адзін, то, як сцвярджае аксіёма **2**, сама прамая належыць плоскасці (рыс. 163).

Прамая і плоскасць могуць мець адзіны агульны пункт. Няхай α — пэўная плоскасць (рыс. 164). Выберам пункт A на плоскасці α і пункт M па-за плоскасцю α. Пункты A і M вызначаюць адзіную прамую l, якая не мае з плоскасцю α іншых агульных пунктаў, акрамя пункта A. Сапраўды, калі дапусціць адваротнае, то па аксіёме **2** прамая l будзе ляжаць у плоскасці α, а значыць, у гэтай плоскасці будзе ляжаць і пункт M, што супярэчыць выбару пункта.



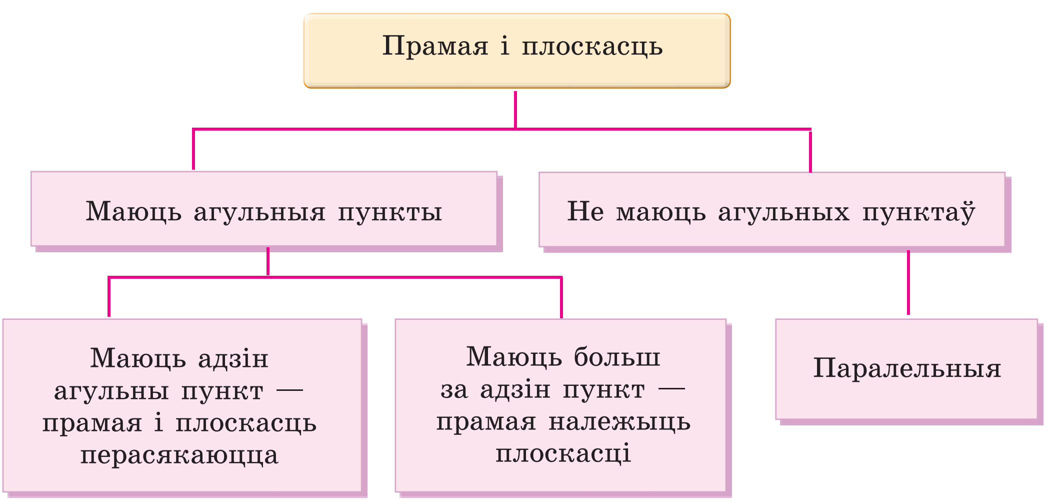
Рыс. 163



Рыс. 164

Прамая і плоскасць, якія маюць адзін агульны пункт, называюцца *перасякальнымі*.

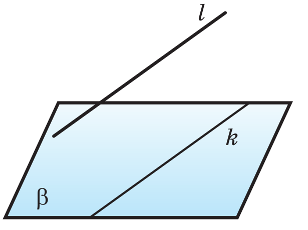
Прамая і плоскасць могуць не мець агульных пунктаў. У гэтым выпадку гавораць, што прамая a **паралельная** плоскасці α, і пішуць $a \parallel \alpha$.



Дакажам *прымету паралельнасці прамой і плоскасці*.

Т э а р э м а 7. Калі прамая, што не ляжыць у плоскасці, паралельная якой-небудзь прамой плоскасці, то яна паралельная гэтай плоскасці.

Доказ. Няхай прамая l паралельная прамой k, што належыць плоскасці β, і l не належыць плоскасці β (рыс. 165). Трэба даказаць, што прамая l не мае агульных пунктаў з плоскасцю β. Дапусцім, што гэта не так, г. зн. што прамая l перасякае плоскасць β у пэўным пункце U. Гэты пункт не можа ляжаць на прамой k, бо $k \parallel l$. Тады па прымеце скрыжаванасці прамых атрымліваем, што прамыя k і l — скрыжаваныя.



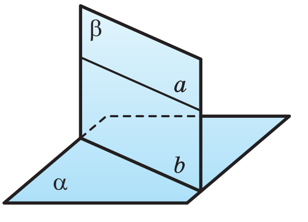
Рыс. 165

А гэта супярэчыць таму, што прамыя k і l паралельныя. Атрымалі, што прамая l і плоскасць β не могуць мець агульных пунктаў, г. зн. $l \parallel \beta$.

Б) Дакажам *уласцівасць прамой, паралельнай плоскасці*.

Т э а р э м а 8. Лінія перасячэння плоскасцей, з якіх адна праходзіць праз прамую, паралельную другой плоскасці, паралельная гэтай прамой.

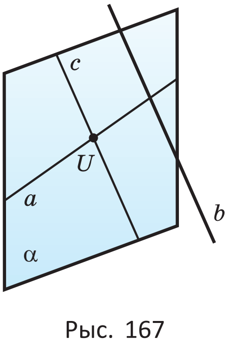
Доказ. Няхай прамая a, паралельная плоскасці α, належыць плоскасці β, і прамая b — лінія перасячэння плоскасцей α і β (рыс. 166). Тады прамыя a і b абедзве ляжаць у плоскасці β і не перасякаюцца, бо ў адваротным выпадку прамая a перасякала б плоскасць β. Значыць, прамыя a і b паралельныя.



Рыс. 166

Прыклад 1*. Дакажам, што *праз кожную з дзвюх скрыжаваных прамых праходзіць адзіная плоскасць, паралельная другой прамой.*

Няхай прамыя a і b — скрыжаваныя (рыс. 167). На прамой a выберам адвольна пункт U і праз яго правядзём прамую c, паралельную прамой b. Прамыя a і c перасякаюцца, таму праз іх праходзіць адзіная плоскасць α. Плоскасць α паралельная прамой b, бо прамая b не ляжыць у плоскасці α і паралельная прамой c, што ляжыць у плоскасці α.

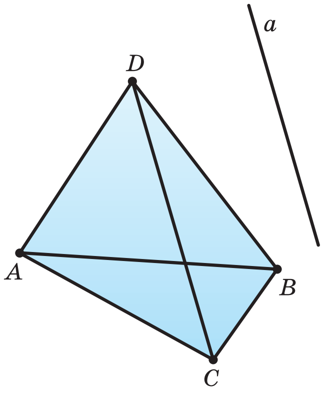


Рыс. 167

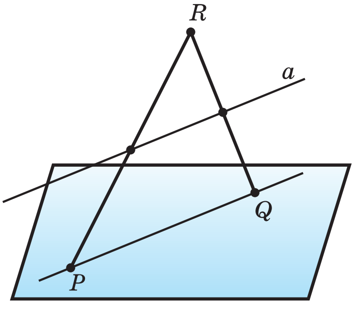
1. Сфармулюйце прымету паралельнасці прамой і плоскасці.
2. Сфармулюйце ўласцівасць прамой, паралельнай плоскасці.
3. Вызначце ўзаемнае размяшчэнне нацягнутых тралейбусных або трамвайных правадоў і плоскасці зямлі (рыс. 168). Прывядзіце прыклады ўзаемнага размяшчэння прамой і плоскасці з навакольнага асяроддзя.

Рыс. 168

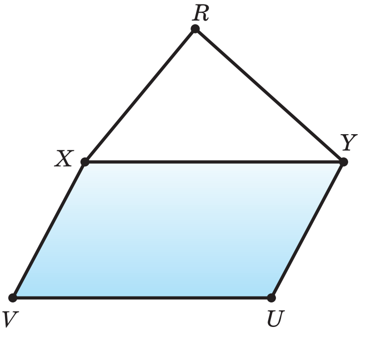
4. Трохвугольнікі ABC і ABD ляжаць у розных плоскасцях (рыс. 169). Ці праўда, што любая прамая, паралельная прамой CD, перасякае гэтыя плоскасці?
5. Пункты P і Q ляжаць у плоскасці α, а пункт R не ляжыць у ёй. Вызначце становішча прамой, якая праходзіць праз сярэдзіны адрэзкаў PR і QR (рыс. 170), і плоскасці α.
6. Па-за плоскасцю прамавугольніка $UVXY$ выбраны пункт Z (рыс. 171). Вызначце ўзаемнае размяшчэнне прамой UV і плоскасці XYR.



Рыс. 169

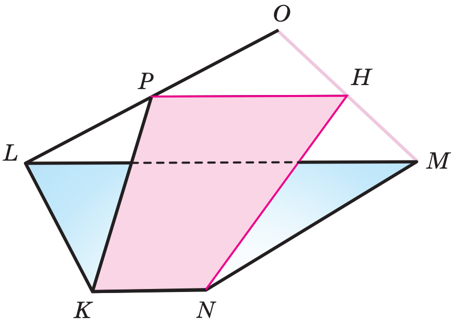


Рыс. 170



Рыс. 171

Задача 1. Аснова LM трапецыі $KLMN$ роўная 48 см. Па-за плоскасцю трапецыі выбраны пункт O і адзначана сярэдзіна P адрэзка LO (рыс. 172). Пабудуйце пункт H перасячэння плоскасці KNP і адрэзка OM. Знайдзіце даўжыню адрэзка PH.



Рыс. 172

Р а ш э н н е. $M \notin LO$, таму вызначана (LOM) (тэарэма 4).

$KN \parallel LM$ і $LM \subset (LOM)$, таму $KN \parallel (LOM)$ (тэарэма **7**).

$P \in LO$ і $LO \subset (LOM)$, таму $P \in (LOM)$.

$P \in (LOM)$ і $P \in (KPN)$, таму $(LOM) \cap (KPN) = a$ і $P \in a$ (аксіёма 3).

$KN \subset (KPN)$, $KN \parallel (LOM)$, $(LOM) \cap (KPN) = a$, таму $a \parallel KN$ (тэарэма **8**).

$a \parallel KN$ і $KN \parallel LM$, таму $a \parallel LM$.

$(LOM) \cap (KPN) = a$, таму $a \subset (LOM)$.

$a \parallel LM$ і $a \cap OM = H$, таму $H \in OM$ і $H \in a$.

$P \in a$ і $H \in a$, таму $a = PH$.

P — сярэдзіна LO і $PH \parallel LM$, таму PH — сярэдняя лінія $\triangle LOM$.

$LM = 48$ см і PH — сярэдняя лінія $\triangle LOM$, таму $PH = \dfrac{1}{2}LM$.

$PH = \dfrac{1}{2}LM$ і $LM = 48$ см, таму $PH = \dfrac{1}{2} \cdot 48 = 24$ (см).

А д к а з: 24 см.

Задача 2. Пабудуйце сячэнне правільнай чатырохвугольнай піраміды $FABCD$ плоскасцю α, якая праходзіць праз кант AB і пункт X на канце FC.

Р а ш э н н е. Вызначым, па якой лініі перасякае паверхню піраміды плоскасць α, якой належаць прамая AB і пункт X.

$AB \subset \alpha$ і $AB \subset (FAB)$, таму $\alpha \cap (FAB) = AB$ (рыс. 173).

$B \in \alpha$ і $B \in (FBC)$, $X \in \alpha$ і $X \in (FBC)$, таму $\alpha \cap (FBC) = BX$.

$X \in \alpha$ і $X \in (FCD)$, таму $\alpha \cap (FCD) = a$ і $X \in a$.

$FABCD$ — правільная чатырохвугольная піраміда, таму $ABCD$ — квадрат і $AB \parallel CD$.

$AB \parallel CD$ і $CD \subset (FCD)$, таму $AB \parallel (FCD)$ (тэарэма **7**).

$AB \subset \alpha$, $AB \parallel (FCD)$ і $\alpha \cap (FCD) = a$, таму $a \parallel AB$ і $a \subset \alpha$ (тэарэма 8).

$\alpha \cap (FCD) = a$ і $a \cap FD = Y$, таму $Y \in a$ і $Y \in FD$.

$X \in a$ і $Y \in a$, таму $a = XY$, $XY \parallel AB$, $|XY| < |AB|$.

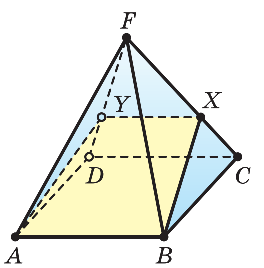
$Y \in FD$ і $FD \subset (FCD)$, таму $Y \in (FCD)$.

$Y \in a$ і $a \subset \alpha$, таму $Y \in \alpha$.

$X \in \alpha$ і $X \in (FCD)$, $Y \in \alpha$ і $Y \in (FCD)$, таму $\alpha \cap (FCD) = XY$.

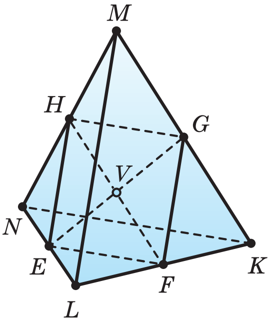
$A \in \alpha$ і $A \in (FAD)$, $Y \in \alpha$ і $Y \in (FAD)$, таму $\alpha \cap (FAD) = AY$.

Атрымалі, што плоскасць α перасякае піраміду $FABCD$ па трапецыі $ABXY$.



Рыс. 173

Задача 3*. Пункты E, F, G — сярэдзіны кантаў LN, LK, MK трохвугольнай піраміды $MNKL$ (рыс. 174).



Рыс. 174

а) Пабудуйце пункт H, у якім плоскасць EFG перасякае кант MN.

б) Дакажыце, што адрэзкі EG і FH перасякаюцца і пунктам перасячэння дзеляцца папалам.

Р а ш э н н е. а) Пункты G і F — агульныя пункты плоскасцей EFG і MKL. Таму $(EFG) \cap (MKL) = GF$.

Плоскасць EFG мае з гранню NKL агульныя пункты E і F. Таму $(EFG) \cap (NKL) = EF$.

E і F — сярэдзіны кантаў LN і LK, значыць, EF — сярэдняя лінія ў $\triangle LNK$ і таму $EF \parallel NK$ і $EF = \frac{1}{2} \cdot NK$.

$EF \parallel NK$ і $NK \subset (MKN)$, таму $EF \parallel (MKN)$ (тэарэма **7**).

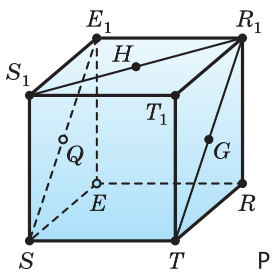
$EF \subset (EFG)$ і $EF \parallel NK$ і $(EFG) \cap (MKN) = GH$, таму $GH \parallel NK$.

Паколькі G — сярэдзіна канта MK і $GH \parallel NK$, то GH — сярэдняя лінія ў $\triangle MNK$, і таму $GH = \frac{1}{2} \cdot NK$. Значыць, H — сярэдзіна канта MN. Шуканае сячэнне — чатырохвугольнік $HEFG$.

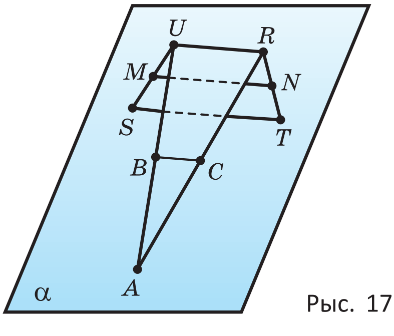
б) Паколькі $EF \parallel NK$ і $GH \parallel NK$, $EF = \frac{1}{2} \cdot NK$ і $GH = \frac{1}{2} \cdot NK$, то $HEFG$ — паралелаграм. Адрэзкі EG і FH — яго дыяганалі. Таму $EG \cap FH = V$ і V — сярэдзіна EG і FH.

127. Улічыўшы, што пункты Q, H, G — сярэдзіны дыяганалей SE_1, S_1R_1, R_1T адпаведных граняў куба $SERTS_1E_1R_1T_1$ (рыс. 175):
а) вызначце, ці паралельная прамая QH плоскасці SS_1T_1;
б) дакажыце, што прамая HG паралельная плоскасці E_1ER.

128. Улічыўшы, што плоскасць α праходзіць праз аснову ST трапецыі $SURT$ і не праходзіць праз вяршыню R, а пункт A ляжыць у плоскасці α (рыс. 176):



Рыс. 175



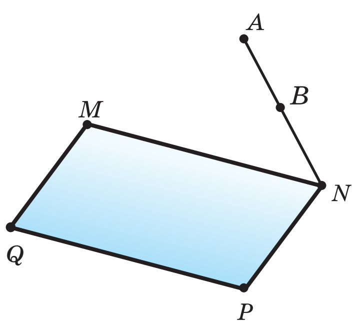
Рыс. 176

а) дакажыце, што сярэдняя лінія MN трапецыі паралельная плоскасці α;
б) вызначце, ці паралельная плоскасці α сярэдняя лінія BC трохвугольніка UAR.

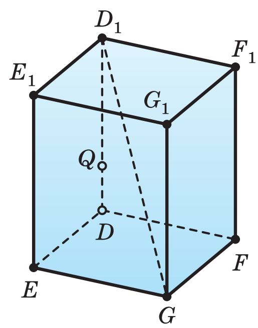
129. Пункт D не ляжыць у плоскасці паралелаграма $ABMN$. Вызначце ўзаемнае размяшчэнне прамой AB і плоскасці MDN.

130. Пункт A не ляжыць у плоскасці паралелаграма $MNPQ$, а пункт B — сярэдзіна адрэзка NA (рыс. 177). Дакажыце, што плоскасць MBQ перасякае прамую AP.

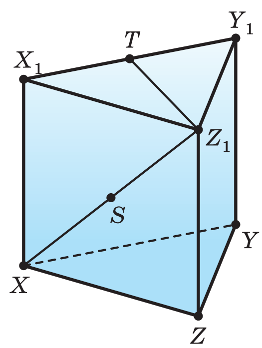
131. На канце DD_1 куба $DFGED_1F_1G_1E_1$ выбраны пункт Q (рыс. 178). Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце пункт перасячэння з паверхняй куба прамой c, якая праходзіць праз пункт Q і паралельная прамой D_1G.



Рыс. 177



Рыс. 178



Рыс. 179

132. Усе канты правільнай трохвугольнай прызмы $XYZX_1Y_1Z_1$ роўныя адзін аднаму, а пункт S — сярэдзіна дыяганалі XZ_1 грані XX_1Z_1Z (рыс. 179). Зрабіце такі рысунак у сшытку і:
а) пабудуйце пункт перасячэння з гранню XX_1Y_1Y прамой p, якая праходзіць праз пункт S і паралельная медыяне Z_1T грані $X_1Y_1Z_1$;
б) знайдзіце плошчу бакавой паверхні прызмы, улічыўшы, што даўжыня адрэзка прамой p, размешчанага ўнутры прызмы, роўная 10 см.

133. Усе канты трохвугольнай прызмы $XYZX_1Y_1Z_1$ роўныя паміж сабой, Q — пункт перасячэння медыян грані XYZ. Знайдзіце даўжыню размешчанага ўнутры прызмы адрэзка прамой, што праходзіць праз сярэдзіну адрэзка X_1Q і паралельная прамой ZQ, улічыўшы, што плошча бакавой паверхні прызмы роўная S.

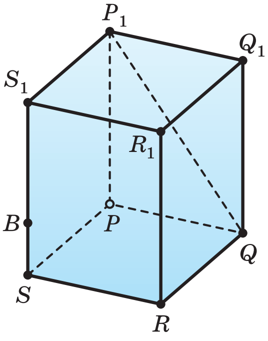
134. Улічыўшы, што пункты N і M — сярэдзіны дыяганалей BC_1 і BD адпаведных граняў прамавугольнага паралелепіпеда $BCDEB_1C_1D_1E_1$:
а) дакажыце, што адрэзак MN паралельны плоскасці, у якой ляжыць грань CDD_1C_1;
б) знайдзіце даўжыню адрэзка MN, улічыўшы, што $BE = 6$ см, $EE_1 = 8$ см.

135. Пункт A — сярэдзіна канта PY трохвугольнай піраміды $PXYZ$, усе канты якой роўныя $4\sqrt{3}$. Пабудуйце пункт перасячэння з паверхняй піраміды прамой b, якая праходзіць праз пункт A і паралельная медыяне YR грані XYZ. Знайдзіце даўжыню адрэзка гэтай прамой, размешчанага ўнутры піраміды.

136. Праз пункт перасячэння медыян грані MPQ трохвугольнай піраміды $MNPQ$ праведзена прамая, паралельная медыяне PA грані MNP. Знайдзіце даўжыню размешчанага ўнутры піраміды адрэзка гэтай прамой, улічыўшы, што $PA = m$.

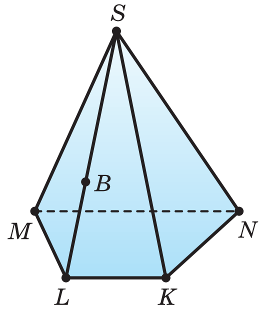
137. Усе канты правільнай чатырохвугольнай піраміды $TPQUV$ роўныя паміж сабой, пункты B, C, D — сярэдзіны кантаў TP, TV, TU. Праз пункт B праведзена прамая p, паралельная прамой CD. Пабудуйце пункт A перасячэння прамой p з плоскасцю TQU і знайдзіце плошчу асновы піраміды, улічыўшы, што плошча чатырохвугольніка $ABCD$ роўная S.

138. Ёсць паралелепіпед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$, на канце SS_1 якога выбраны пункт B (рыс. 180). Пабудуйце сячэнне гэтага паралелепіпеда плоскасцю, што праходзіць праз пункты B, Q, P_1.



Рыс. 180

139. На рысунку 181 паказана чатырохвугольная піраміда, асновай якой з'яўляецца трапецыя $MNKL$ з асновамі KL і MN. Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз пункт B канта SL і прамую MN. Якой фігурай з'яўляецца сячэнне?



Рыс. 181

140. Ёсць прамая a, паралельная плоскасці α, і пункт T, прыналежны гэтай плоскасці. Дакажыце, што прамая, якая праходзіць праз пункт T і паралельная прамой a, ляжыць у плоскасці α.

141. Адна аснова трапецыі паралельная плоскасці β, а вяршыня другой ляжыць у гэтай плоскасці. Дакажыце, што:

а) другая аснова трапецыі ляжыць у плоскасці β;

б) сярэдняя лінія трапецыі паралельная плоскасці β.

142. Дакажыце, што калі дадзеная прамая не ляжыць у перасякальных плоскасцях і паралельная лініі іх перасячэння, то яна паралельная і гэтым плоскасцям.

143*. Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда $CDEFC_1D_1E_1F_1$ плоскасцю, што праходзіць праз кант EE_1 і пункт A, выбраны на канце CC_1.

144. Пункты A, B, C — адпаведна сярэдзіны кантаў FE, GH, GK чатырохвугольнай піраміды $FGHEK$, у аснове якой ляжыць паралелаграм $GHEK$. Пабудуйце адрэзак, па якім плоскасць ABC перасякае дыяганальнае сячэнне FHK піраміды.

145. Старана RT трохвугольніка RST паралельная плоскасці γ, а стораны RS і ST перасякаюцца з гэтай плоскасцю ў пунктах M і N. Дакажыце, што трохвугольнікі RST і MSN падобныя.

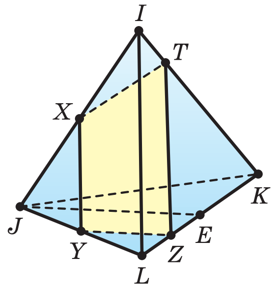
146. На адрэзку AB выбраны такі пункт C, што $AB : BC = 4 : 3$. Праз канец B адрэзка AB праведзена плоскасць α. Паралельна гэтай плоскасці пабудаваны адрэзак CD, роўны 24 см. Дакажыце, што прамая AD перасякае плоскасць α у пэўным пункце E, і знайдзіце адрэзак BE.

147. Пункты D і E на старанах AB і AC трохвугольніка ABC выбраны так, што $DE = 5$ см і $\frac{BD}{DA} = \frac{2}{3}$. Плоскасць, праведзеная праз пункты B і C, паралельная адрэзку DE. Знайдзіце даўжыню адрэзка BC.

148. Ёсць правільная трохвугольная піраміда $MNPQ$, даўжыня бакавога канта якой роўная 6 см, а асновай з'яўляецца трохвугольнік са стараной 4 см. Знайдзіце перыметр сячэння піраміды плоскасцю, якая паралельная NP і праходзіць праз сярэдзіну канта PQ, і сярэднюю лінію трохвугольніка MNP.

149. Пункты A, B, C — адпаведна сярэдзіны кантаў LN, LK, MK трохвугольнай піраміды $LMNK$, усе канты якой роўныя адзін аднаму, а плошча грані роўная $16\sqrt{3}$ см^2. Знайдзіце перыметр сячэння гэтай піраміды плоскасцю ABC.

150. На рысунку 182 паказана правільная трохвугольная піраміда $IJKL$. Чатырохвугольнік $XYZT$ — сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз сярэдзіны X і Y кантаў JI і JL і паралельная медыяне JE грані JKL. Знайдзіце даўжыню адрэзкаў XY і ZT, улічыўшы, што $IK = 48$ см.



Рыс. 182

151. Пункт Q — сярэдзіна канта FA чатырохвугольнай піраміды $FABCD$, асновай якой з'яўляецца трапецыя $ABCD$ з паралельнымі старанамі BC і AD. Знайдзіце адрэзак, па якім плоскасць QBC перасякае грань FAD, улічыўшы, што кант BC і сярэдняя лінія трапецыі адпаведна роўныя 30 см і 40 см.

152. Старана асновы правільнай чатырохвугольнай піраміды роўная 60 см, а бакавы кант — 78 см. Пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз сярэдзіны дзвюх супрацьлеглых старон асновы і паралельная якому-небудзь бакавому канту, і знайдзіце плошчу сячэння.

153*. Ёсць правільная чатырохвугольная піраміда $FMNKL$, бакавы кант якой у два разы большы за старану асновы, а плошча бакавой паверхні роўная S. Знайдзіце даўжыню размешчанага ўнутры піраміды адрэзка прамой, якая праходзіць праз пункт перасячэння дыяганалей асновы і паралельная медыяне FR грані FLK.

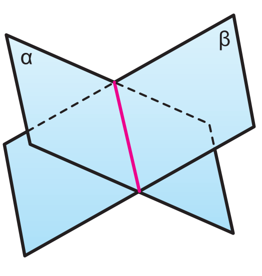
154*. Пункт A — сярэдзіна канта FK чатырохвугольнай піраміды $FGHEK$, у аснове якой ляжыць трапецыя $GHEK$, $KG \parallel HE$. Пабудуйце пункт P, у якім плоскасць AEH перасякае прамую FG. Дакажыце, што адрэзкі PE і HA перасякаюцца і пунктам перасячэння дзеляцца папалам, улічыўшы, што сярэдняя лінія трапецыі $GHEK$ роўная $\frac{3}{2}$ HE.

§ 6. Узаемнае размяшчэнне плоскасцей у прасторы

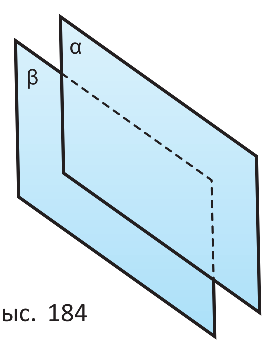
А) Дзве плоскасці або маюць агульны пункт, або не маюць яго. У першым выпадку ў адпаведнасці з аксіёмай **3** плоскасці маюць агульную прамую, г. зн. перасякаюцца па гэтай прамой (рыс. 183). У другім выпадку плоскасці не перасякаюцца (рыс. 184).

Плоскасці, якія не перасякаюцца, называюцца **паралельнымі плоскасцямі**.

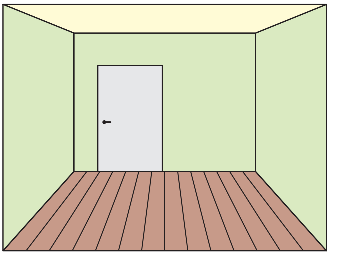
Уяўленне пра паралельныя плоскасці даюць паверхні столі і падлогі або паверхні супрацьлеглых сцен пакоя (рыс. 185). Наступная тэарэма дае *прымету паралельнасці плоскасцей*.



Рыс. 183



Рыс. 184



Рыс. 185

Тэарэма 9. Плоскасць, якая праходзіць праз дзве перасякальныя прамыя, паралельныя другой плоскасці, паралельная гэтай самай плоскасці.