152. Старана асновы правільнай чатырохвугольнай піраміды роўная 60 см, а бакавы кант — 78 см. Пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз сярэдзіны дзвюх супрацьлеглых старон асновы і паралельная якому-небудзь бакавому канту, і знайдзіце плошчу сячэння.

153*. Ёсць правільная чатырохвугольная піраміда $FMNKL$, бакавы кант якой у два разы большы за старану асновы, а плошча бакавой паверхні роўная S. Знайдзіце даўжыню размешчанага ўнутры піраміды адрэзка прамой, якая праходзіць праз пункт перасячэння дыяганалей асновы і паралельная медыяне FR грані FLK.

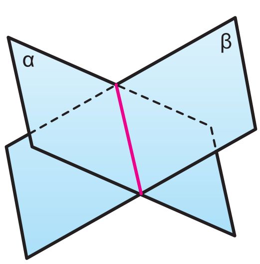
154*. Пункт A — сярэдзіна канта FK чатырохвугольнай піраміды $FGHEK$, у аснове якой ляжыць трапецыя $GHEK$, $KG \parallel HE$. Пабудуйце пункт P, у якім плоскасць AEH перасякае прамую FG. Дакажыце, што адрэзкі PE і HA перасякаюцца і пунктам перасячэння дзеляцца папалам, улічыўшы, што сярэдняя лінія трапецыі $GHEK$ роўная $\frac{3}{2}$ HE.

§ 6. Узаемнае размяшчэнне плоскасцей у прасторы

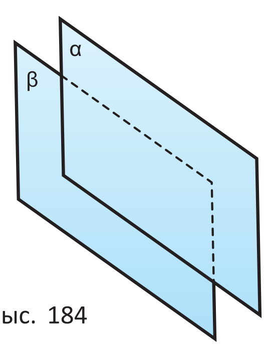
А) Дзве плоскасці або маюць агульны пункт, або не маюць яго. У першым выпадку ў адпаведнасці з аксіёмай **3** плоскасці маюць агульную прамую, г. зн. перасякаюцца па гэтай прамой (рыс. 183). У другім выпадку плоскасці не перасякаюцца (рыс. 184).

Плоскасці, якія не перасякаюцца, называюцца **паралельнымі плоскасцямі.**

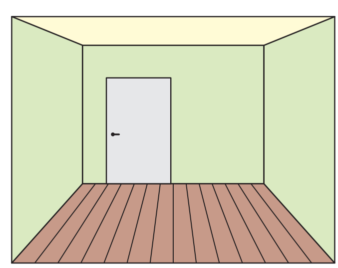
Уяўленне пра паралельныя плоскасці даюць паверхні столі і падлогі або паверхні супрацьлеглых сцен пакоя (рыс. 185). Наступная тэарэма дае *прымету паралельнасці плоскасцей*.



Рыс. 183

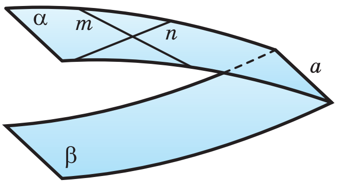


Рыс. 184


Рыс. 185

Т э а р э м а 9. Плоскасць, якая праходзіць праз дзве перасякальныя прамыя, паралельныя другой плоскасці, паралельная гэтай самай плоскасці.

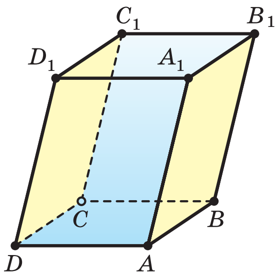
Доказ. Няхай плоскасць α праходзіць праз перасякальныя прамыя m і n, якія абедзве паралельныя плоскасці β (рыс. 186). Дакажам, што плоскасць α паралельная плоскасці β.



Рыс. 186

Дапусцім, што плоскасць α перасякае плоскасць β па пэўнай прамой a. Тады па тэарэме **8** прамая a паралельная і прамой m, і прамой n. Значыць, па тэарэме **3** прамыя m і n паралельныя адна адной. Але гэта супярэчыць умове пра іх перасякальнасць. З гэтага вынікае, што плоскасць α паралельная плоскасці β.

Вынік 1. Калі дзве перасякальныя прамыя адной плоскасці адпаведна паралельныя дзвюм перасякальным прамым другой плоскасці, то такія плоскасці паралельныя.



Рыс. 187

Гэты вынік атрымліваецца з тэарэмы **9** з улікам прыметы паралельнасці прамой і плоскасці.

Вынік 2. Супрацьлеглыя грані паралелепіпеда паралельныя, г. зн. ляжаць у паралельных плоскасцях.

Напрыклад, грань AA_1B_1B паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рыс. 187) змяшчае прамыя AB і AA_1, а грань DD_1C_1C — прамыя DC і DD_1. Паколькі $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ — паралелаграмы, то $AB \parallel DC$ і $AA_1 \parallel DD_1$, і, значыць, плоскасці AA_1B_1B і DD_1C_1C паралельныя.

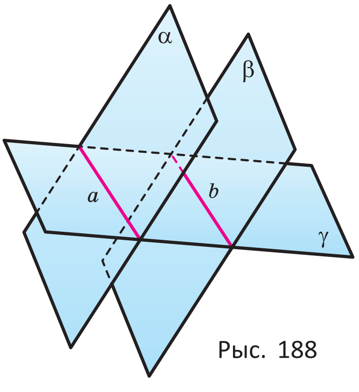
Б) Дакажам *уласцівасці паралельных плоскасцей.*

Тэарэма 10. Лініі перасячэння дзвюх паралельных плоскасцей трэцяй плоскасцю паралельныя адна адной.

Доказ. Няхай плоскасць γ перасякае паралельныя плоскасці α і β па прамых a і b (рыс. 188). Дакажам, што прамыя a і b паралельныя.

Дапусцім, што гэта не так, г. зн. прамыя a і b маюць агульны пункт Q. Тады пункт Q належыць плоскасці α, бо прамая a належыць плоскасці α, пункт Q належыць і плоскасці β, бо прамая b належыць плоскасці β. Атрымліваецца, што плоскасці α і β маюць агульны пункт Q, але гэта немагчыма, бо па ўмове плоскасці α і β паралельныя.

Значыць, прамыя a і b не могуць мець агульнага пункта. А паколькі яны ляжаць у адной плоскасці, менавіта плоскасці γ, то яны паралельныя.

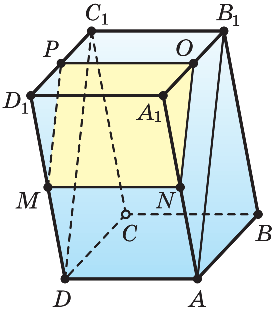


Рыс. 188

Прыклад 1. Паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перасечаны плоскасцю, што праходзіць праз сярэдзіны M, N, O яго кантаў DD_1, AA_1, A_1B_1 адпаведна. Вызначым, якая фігура атрымаецца ў сячэнні.

Плоскасць MNO перасякае грані AA_1D_1D і AA_1B_1B па адрэзках MN і NO (рыс. 189), пры гэтым $MN \parallel A_1D_1$, бо MN — сярэдняя лінія прамавугольніка AA_1D_1D ($AN = A_1N$ і $DM = D_1M$).

Паколькі плоскасць MNO праходзіць праз прамую MN, паралельную плоскасці $A_1B_1C_1D_1$, то лінія перасячэння гэтых плоскасцей — прамая OP — паралельная MN. Чатырохвугольнік $MNOP$ — шуканае сячэнне.



Рыс. 189

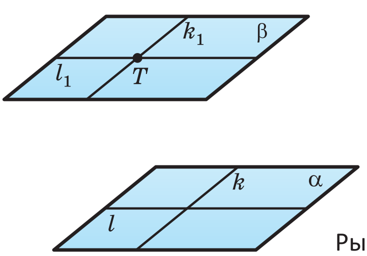
Улічым, што плоскасці граняў DD_1C_1C і AA_1B_1B паралельныя. З тэарэмы **10** вынікае, што прамыя NO і MP, па якіх плоскасці DD_1C_1C і AA_1B_1B перасякае плоскасць MNO, паралельныя. А паколькі $MN \parallel OP$ і $NO \parallel MP$, то чатырохвугольнік $MNOP$ — паралелаграм.

Тэарэма 11. Праз дадзены пункт па-за гэтай плоскасцю праходзіць адзіная плоскасць, паралельная дадзенай.

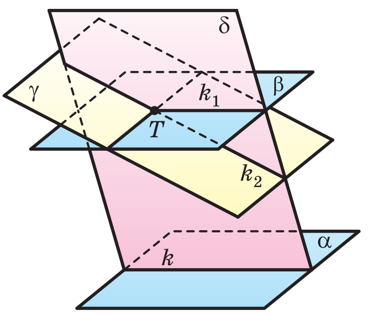
Доказ. Няхай ёсць плоскасць α і пункт T па-за ёю (рыс. 190). У плоскасці α правядзём якія-небудзь перасякальныя прамыя k і l, а праз пункт T — прамыя k_1 і l_1, паралельныя прамым k і l адпаведна. Плоскасць β, вызначаная прамымі k_1 і l_1, з улікам прыметы паралельнасці плоскасцей паралельная плоскасці α і праходзіць праз пункт T.

Дакажам адзінасць плоскасці β. Дапусцім, што ёсць яшчэ адна плоскасць γ, якая праходзіць праз пункт T і паралельная плоскасці α (рыс. 191). Прамыя k_1 і l_1 абедзве не могуць належаць плоскасці γ, бо тады плоскасці β і γ супадалі б. Няхай k_1 не належыць плоскасці γ. Праз пункт T і прамую k правядзём плоскасць δ. Яна перасякае плоскасць β па прамой k_1, а плоскасць γ — па прамой k_2, якія абедзве па тэарэме **10** паралельныя прамой k.

Але такое немагчыма, бо на плоскасці праз дадзены пункт паралельна дадзенай прамой праходзіць адзіная прамая.



Рыс. 190



Рыс. 191

Вынік 3. Калі кожная з дзвюх дадзеных плоскасцей паралельная трэцяй плоскасці, то гэтыя дзве плоскасці паралельныя адна адной.

Калі прамая a перасякае плоскасць β, то яна перасякае і любую плоскасць, паралельную плоскасці β. Дакажыце самастойна.

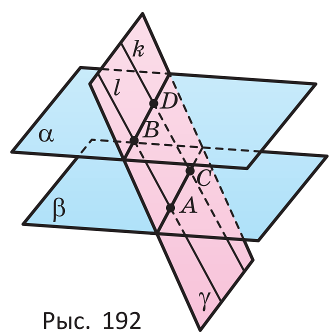
Калі плоскасці α і β паралельныя, і прамая l, якая праходзіць праз пункт A плоскасці β, паралельная плоскасці α, то прамая l ляжыць у плоскасці β. Дакажыце самастойна.

Сячэнне піраміды плоскасцю, паралельнай аснове, ёсць многавугольнік, падобны аснове. Дакажыце самастойна.

Тэарэма 12. Адрэзкі паралельных прамых, заключаныя паміж дзвюма паралельнымі плоскасцямі, роўныя адзін аднаму.

Доказ. Няхай паралельныя плоскасці α і β высякаюць з паралельных прамых k і l адрэзкі AB і CD (рыс. 192). Дакажам, што гэтыя адрэзкі роўныя.

Плоскасць γ, якой належаць паралельныя прамыя k і l, перасякае паралельныя плоскасці па паралельных прамых AC і BD. У выніку атрымліваецца чатырохвугольнік $ABDC$, у якім супрацьлеглыя стораны паралельныя. Значыць, гэты чатырохвугольнік — паралелаграм, таму яго супрацьлеглыя стораны AB і CD роўныя.



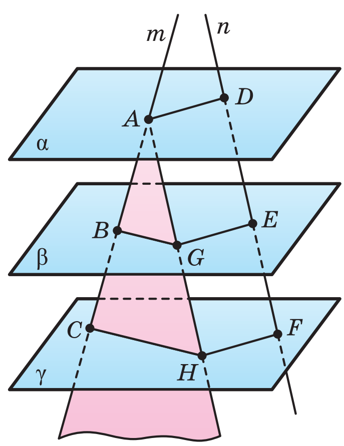
Рыс. 192

Прыклад 2. Дакажам, што адрэзкі адвольных прамых, заключаныя паміж трыма паралельнымі плоскасцямі, прапарцыянальныя.

Няхай паралельныя плоскасці α, β, γ высякаюць з прамой m адрэзкі AB і BC, а з прамой n — адрэзкі DE і EF (рыс. 193). Дакажам, што $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

Праз пункт A правядзём прамую, паралельную прамой n, няхай яна перасякаецца з плоскасцямі β і γ у пунктах G і H адпаведна. У трохвугольніку ACH адрэзак BG паралельны старане CH. Таму $\frac{AB}{BC} = \frac{AG}{GH}$.

Але $AG = DE$ і $GH = EF$ у адпаведнасці з тэарэмай 12. Значыць, $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.



Рыс. 193

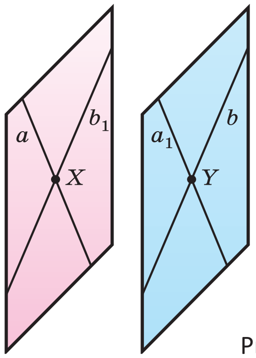
Паралельныя або перасякальныя прамыя вызначаюць адзіную плоскасць. Скрыжаваныя прамыя вызначаюць адзіную пару паралельных плоскасцей.

Прыклад 3. Дакажам, што праз скрыжаваныя прамыя можна правесці паралельныя плоскасці, прычым такая пара плоскасцей адзіная.

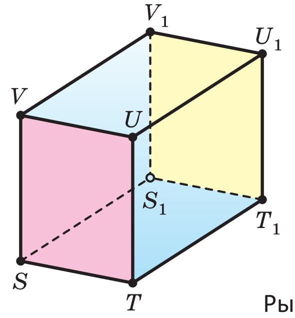
Няхай ёсць скрыжаваныя прамыя a і b (рыс. 194). Выберам адвольна на прамой a пункт X, на прамой b — пункт Y, і праз пункт X правядзём прамую b_1, паралельную прамой b, а праз пункт Y — прамую a_1, паралельную прамой a. Перасякальныя прамыя a і b_1, а таксама b і a_1 вызначаюць плоскасці α і β, якія з улікам прыметы паралельнасці плоскасцей з'яўляюцца паралельнымі.

Адзінасць шуканай пары плоскасцей доказваецца метадам ад адваротнага, падобна да таго, як гэта было зроблена ў доказе тэарэмы **11**. Правядзіце гэта разважанне самастойна.

На рысунку 195 плоскасці граняў $STUV$ і $S_1T_1U_1V_1$ паралелепіпеда $STUVS_1T_1U_1V_1$ праходзяць праз скрыжаваныя прамыя TU і U_1V_1.



Рыс. 194



Рыс. 195

?

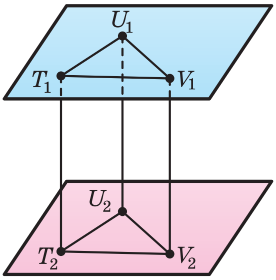
1. Назавіце магчымыя выпадкі ўзаемнага размяшчэння дзвюх плоскасцей.
2. Якія плоскасці называюцца паралельнымі?
3. Сфармулюйце прымету паралельнасці плоскасцей.
4. Сфармулюйце сцверджанне пра лініі перасячэння дзвюх паралельных плоскасцей трэцяй плоскасцю.
5. Сфармулюйце сцверджанне пра адрэзкі, якія дзве паралельныя плоскасці высякаюць з паралельных прамых.
6. Сфармулюйце сцверджанне пра адрэзкі, якія тры паралельныя плоскасці высякаюць з адвольных прамых.
7. Сфармулюйце сцверджанне пра плоскасць, якая праходзіць праз дадзены пункт паралельна дадзенай плоскасці.

8. Сфармулюйце сцверджанне пра плоскасці, якія паралельныя іншай плоскасці.

9. Сфармулюйце сцверджанне пра паралельныя плоскасці, што вызначае пара скрыжаваных прамых.

10. Пакажыце паралельныя плоскасці на прадметах вашага класа.

11. Прамая m перасякае плоскасць α у пункце A. Ці існуе плоскасць, якая праходзіць праз прамую m і паралельная плоскасці α?



Рыс. 196

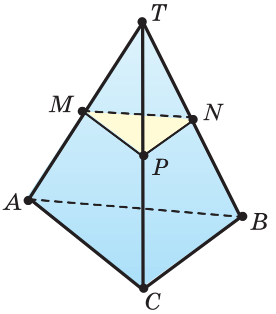
12. Плоскасці α і β паралельныя, прамая m ляжыць у плоскасці α. Устанавіце, ці будзе прамая m паралельная плоскасці β.

13. Улічыўшы, што паралельныя адрэзкі T_1T_2, U_1U_2 і V_1V_2 заключаны паміж паралельнымі плоскасцямі α і β (рыс. 196):
а) вызначце від чатырохвугольнікаў $T_1U_1U_2T_2$, $U_1V_1V_2U_2$ і $T_1V_1V_2T_2$;
б) ці праўда, што $\triangle T_1U_1V_1 = \triangle T_2U_2V_2$.

Задача 1. Улічыўшы, што пункт T не ляжыць у плоскасці трохвугольніка ABC з плошчай, роўнай 48 см^2, а пункты M, N, P — сярэдзіны адрэзкаў TA, TB, TC (рыс. 197):
а) дакажыце, што плоскасці MNP і ABC паралельныя;
б) знайдзіце плошчу трохвугольніка MNP.

Р а ш э н н е. а) Пункты M і N — сярэдзіны адрэзкаў TA і TB, таму $MN \parallel AB$ і $MN = \frac{1}{2}AB$.

Пункты M і P — сярэдзіны адрэзкаў TA і TC, таму $MP \parallel AC$ і $MP = \frac{1}{2}AC$.



Рыс. 197

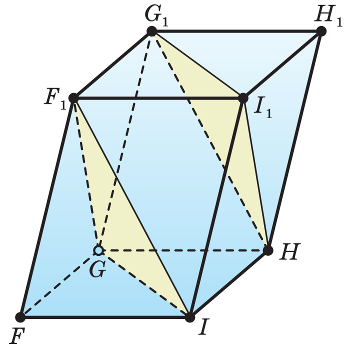
$MN \parallel AB$ і $AB \subset (ABC)$, таму $MN \parallel (ABC)$.
$MP \parallel AC$ і $AC \subset (ABC)$, таму $MP \parallel (ABC)$.
$MN \cap NP = N$, $MN \parallel (ABC)$ і $MP \parallel (ABC)$, таму $(MNP) \parallel (ABC)$.

б) Паколькі MN і MP — сярэднія лініі ў $\triangle ATB$ і $\triangle ATC$ адпаведна, то пункты N і P — сярэдзіны кантаў TB і TC. Таму NP — сярэдняя лінія ў $\triangle BTC$.

$\triangle MNP$ і $\triangle ABC$ падобныя па трэцяй прымеце ($MN : AB = MP : AC = NP : BC = 1 : 2$). Таму $S_{MNP} = \left(\frac{MN}{AB}\right)^2 \cdot S_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot 48 = 12$ (см^2).

А д к а з: 12 см^2.

Задача 2. Дакажыце, што ў паралелепіпедзе $FGHIF_1G_1H_1I_1$ (рыс. 198) плоскасць F_1IG паралельная плоскасці I_1HG_1.



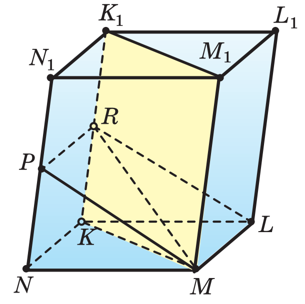
Рыс. 198

Доказ. У чатырохвугольніку GII_1G_1 стораны GG_1 і II_1 паралельныя і роўныя. Таму GII_1G_1 — паралелаграм. Значыць, $GI \parallel G_1I_1$ і $GI \parallel (G_1I_1H)$.

У чатырохвугольніку HIF_1G_1 стораны HI і G_1F_1 паралельныя і роўныя. Таму HIF_1G_1 — паралелаграм. Значыць, $IF_1 \parallel HG_1$ і $IF_1 \parallel (G_1I_1H)$.

Паколькі прамыя GI і IF_1 абедзве паралельныя плоскасці G_1I_1H, ляжаць у плоскасці GIF_1 і перасякаюцца, то $(F_1IG) \parallel (I_1HG_1)$ (тэарэма **9**).

Задача 3. У паралелепіпедзе $MNKLM_1N_1K_1L_1$ пункт R — сярэдзіна канта KK_1 (рыс. 199). Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда плоскасцямі MM_1K_1 і MLR і адрэзак, па якім перасякаюцца гэтыя сячэнні.



Рыс. 199

Рашэнне. $MNKLM_1N_1K_1L_1$ — паралелепіпед, таму $MM_1 \parallel KK_1$ і $MM_1 = KK_1$. А паколькі $MM_1 \subset (KMM_1)$ і $K \in (KMM_1)$, то $KK_1 \subset (KMM_1)$. Значыць, (MM_1K_1) перасякае паралелепіпед $MNKLM_1N_1K_1L_1$ па паралелаграме MM_1K_1K.

Грані LMM_1L_1 і NKK_1N_1 паралельныя. А паколькі $NK \parallel ML$ і $NK \subset (NKK_1)$, то $(NKK_1) \cap (MLR) = RP$ і $RP \parallel NK$.

$NKRP$ і $NKLM$ — паралелаграмы, таму $RP = KN = ML$.

P — сярэдзіна канта NN_1, бо R — сярэдзіна канта KK_1 і $RP \parallel NK$.

(MLR) перасякае паралелепіпед $MNKLM_1N_1K_1L_1$ па паралелаграме $MLRP$.

Пункты M і R належаць як плоскасці KMM_1, так і плоскасці MLR. Таму $(KMM_1) \cap (MLR) = MR$.

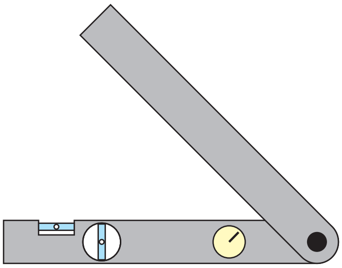
Адказ: $(MM_1K_1) \cap (MLR) = MR$.

155. Дзве стараны трохвугольніка паралельныя плоскасці β. Вызначце, ці паралельная і трэцяя старана гэтага трохвугольніка плоскасці β.

156. Тры адрэзкі P_1P_2, Q_1Q_2 і R_1R_2, якія не ляжаць у адной плоскасці, маюць агульную сярэдзіну. Вызначце, ці паралельныя плоскасці $P_1Q_1R_1$ і $P_2Q_2R_2$.

157. $MNKLM_1N_1K_1L_1$ — чатырохвугольная прызма. Вызначце, ці ляжаць у паралельных плоскасцях асновы $MNKL$ і $M_1N_1K_1L_1$ прызмы.

159. Для праверкі гарызантальнасці ўстаноўкі дыска вугламерных інструментаў карыстаюцца дзвюма грунтвагамі, размешчанымі ў плоскасці дыска на перасякальных прамых (рыс. 200). Чаму грунтвагі нельга размяшчаць на паралельных прамых?



Рыс. 200

160. Паралельныя плоскасці α і β перасякаюць старану CB вугла BCD у пунктах B_1 і B_2, а старану CD — у пунктах D_1 і D_2 адпаведна. Знайдзіце:

а) CB_2 і CD_2, улічыўшы, што $B_2D_2 = 3B_1D_1$, $B_1B_2 = 12$ см, $CD_1 = 5$ см;

б) B_2D_2 і CB_2, улічыўшы, што $B_1D_1 = 18$ см, $CB_1 = 24$ см, $CB_2 = \frac{3}{2}B_1B_2$.

161. Тры прамыя, якія праходзяць праз адзін пункт і не ляжаць у адной плоскасці, перасякаюць адну з паралельных плоскасцей у пунктах I_1, J_1 і K_1, а другую — у пунктах I_2, J_2 і K_2. Дакажыце, што трохвугольнікі $I_1J_1K_1$ і $I_2J_2K_2$ падобныя.

162. Улічыўшы, што праз пункт перасячэння медыян грані JKL трохвугольнай пірамiды $IJKL$ праведзена плоскасць, паралельная грані IJK:
а) дакажыце, што сячэнне пірамiды гэтай плоскасцю ёсць трохвугольнік, падобны трохвугольніку IJK;
б) знайдзіце, як адносіцца плошча сячэння да плошчы трохвугольніка IJK.

163. Нарысуйце трохвугольную піраміду $KLMN$ і:
а) пабудуйце яе сячэнне плоскасцю, якая праходзіць праз кант KL і сярэдзіну A канта MN;
б) дакажыце, што плоскасць, якая праходзіць праз сярэдзіны E, O і F адрэзкаў LM, MA і MK, паралельная плоскасці LKA;
в) знайдзіце плошчу трохвугольніка EOF, улічыўшы, што плошча трохвугольніка LKA роўная 24 см^2.

164. Нарысуйце паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і пабудуйце яго сячэнне:
а) плоскасцю ABC_1; б) плоскасцю ACC_1.
Дакажыце, што пабудаваныя сячэнні з'яўляюцца паралелаграмамі.

165. Нарысуйце паралелепіпед $IJKLI_1J_1K_1L_1$ і адзначце ўнутраны пункт M грані II_1J_1J. Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда плоскасцю, што праходзіць праз пункт M паралельна:
а) плоскасці асновы $IJKL$; б) грані JJ_1K_1K.

166. Нарысуйце паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і пабудуйце яго сячэнне плоскасцю, якое праходзіць праз:
а) кант CC_1 і пункт перасячэння дыяганалей грані AA_1D_1D;
б) пункт перасячэння дыяганалей грані $ABCD$ паралельна плоскасці AB_1C_1.

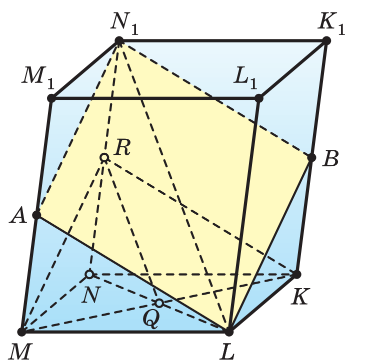
167. Нарысуйце паралелепіпед $EFGHE_1F_1G_1H_1$ і пабудуйце яго сячэнне плоскасцю, якое праходзіць праз пункты F_1, H_1 і сярэдзіну канта GH. Дакажыце, што пабудаванае сячэнне — трапецыя.

168. Нарысуйце паралелепіпед $EFGHE_1F_1G_1H_1$ і пабудуйце яго сячэнне плоскасцю FKL, дзе K — сярэдзіна канта EE_1, а L — сярэдзіна канта GG_1. Дакажыце, што пабудаванае сячэнне — паралелаграм.

169. Улічыўшы, што дыяганалі NL і MK грані $KLMN$ паралелепіпеда $MNKLM_1N_1K_1L_1$ перасякаюцца ў пункце Q, сярэдзінай канта NN_1 з'яўляецца пункт R, а чатырохвугольнік N_1ALB ёсць сячэнне паралелепіпеда плоскасцю, якая праходзіць праз пункт N_1 і паралельная плоскасці MRK (рыс. 201):

а) вызначце, ці з'яўляецца паралелаграмам чатырохвугольнік N_1ALB;

б) дакажыце, што прамыя RQ і N_1L паралельныя.



Рыс. 201

170. Нарысуйце паралелепіпед $OPQRO_1P_1Q_1R_1$ і пабудуйце яго сячэнне плоскасцю MNK, дзе пункты M, N і K ляжаць адпаведна на кантах:

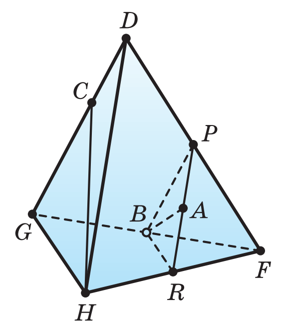
а) PP_1, OO_1, OR; б) QQ_1, OR, PP_1.

171. Нарысуйце трохвугольную піраміду $ABCD$ і адзначце пункт M на канце AB. Пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз пункт M паралельна грані BDC.

172. Улічыўшы, што пункты I, J, K і L не ляжаць у адной плоскасці, а медыяны трохвугольнікаў IJK і KJL перасякаюцца адпаведна ў пунктах M_1 і M_2:

а) дакажыце, што адрэзкі IL і M_1M_2 паралельныя;

б) знайдзіце M_1M_2, улічыўшы, што $IL = 12$ см.



Рыс. 202

173. На кантах QA, QB і QC трохвугольнай піраміды $QABC$ адзначаны такія пункты M, N, P, што $QM : MA = QN : NB = QP : PC$. Дакажыце, што плоскасці MNP і ABC паралельныя. Знайдзіце плошчу трохвугольніка MNP, улічыўшы, што плошча трохвугольніка ABC роўная 18 см^2 і $QM : MA = 2 : 1$.

174. Улічыўшы, што пункты B, P, R — сярэдзіны кантаў FG, FD, FH піраміды $DFGH$, адрэзак AB — медыяна трохвугольніка BPR, а пункт C належыць канту DG (рыс. 202):

а) дакажыце, што прамая AB паралельная плоскасці DGH;

б) вызначце, ці перасякаецца прамая HC з плоскасцю BPR.

175. Нарысуйце паралелепіпед $MNKLM_1N_1K_1L_1$ і пазначце сярэдзіны A і B кантаў NN_1 і LL_1. Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда плоскасцю, якая праходзіць праз пункт B і паралельная плоскасці MAK. Пабудуйце адрэзак, па якім гэта сячэнне перасякае дыяганальнае сячэнне NLL_1N_1.

176. На кантах N_1K_1, LK, MM_1 паралелепіпеда $MNKLM_1N_1K_1L_1$ выбраны пункты Q, T, R адпаведна. Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда плоскасцю QTR.

177. Пункты Q, B і R ёсць адпаведна сярэдзіны кантаў SY, XX_1 і S_1T_1 паралелепіпеда $STXYS_1T_1X_1Y_1$. Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда плоскасцю QBR.

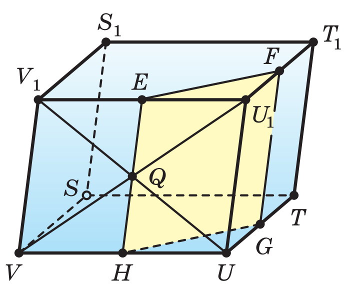
178. Улічыўшы, што чатырохвугольнік $EFGH$ — сячэнне паралелепіпеда $STUVS_1T_1U_1V_1$ плоскасцю, якая праходзіць праз пункт Q перасячэння дыяганалей грані UVV_1U_1 і паралельная плоскасці TVV_1 (рыс. 203):

а) растлумачце, чаму прамыя FE і GH паралельныя;

б) вызначце, ці паралельныя прамыя GF і HE;

в) растлумачце, чаму прамая SS_1 паралельная плоскасці сячэння.

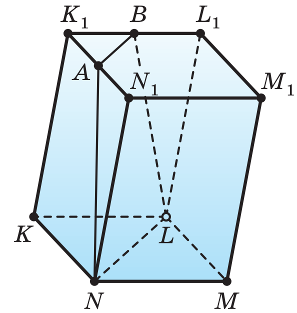
179. Улічыўшы, што чатырохвугольнік $LNAB$ — сячэнне паралелепіпеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$ плоскасцю, якая праходзіць праз прамую LN і сярэдзіну A канта N_1K_1 (рыс. 204), устанавіце, ці з'яўляецца трапецыяй чатырохвугольнік $LNAB$.



Рыс. 203

180. Нарысуйце паралелепіпед $KLMNK_1L_1M_1N_1$. Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда плоскасцю, якая праходзіць праз пункт перасячэння дыяганалей грані $KLMN$ і паралельная плоскасці MLK_1. Дакажыце, што прамая LN_1 паралельная плоскасці сячэння.

181. Сячэнне трохвугольнай піраміды $TXYZ$, паралельнае плоскасці XYZ, дзеліць бакавы кант у адносіне $1 : 3$, калі лічыць ад вяршыні. Знайдзіце плошчу сячэння, улічыўшы, што плошча трохвугольніка XYZ роўная q.



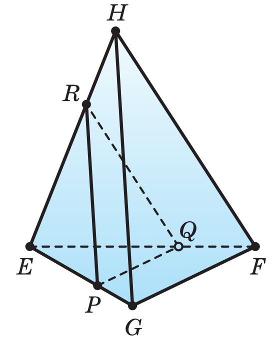
Рыс. 204

182. Сячэнне піраміды, паралельнае аснове, дзеліць бакавы кант у адносіне $2 : 3$, калі лічыць ад вяршыні. Знайдзіце плошчу сячэння, улічыўшы, што яго плошча на 336 см^2 меншая за плошчу асновы.

183. Улічыўшы, што трохвугольнік PRQ — сячэнне правільнай трохвугольнай піраміды $HEFG$ плоскасцю, якая паралельная плоскасці HFG і праходзіць праз такі пункт Q канта FE, што $FQ : QE = 1 : 2$ (рыс. 205):

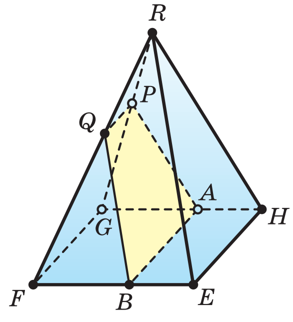
а) дакажыце, што трохвугольнікі PRQ і GHF падобныя;

б) знайдзіце перыметр трохвугольніка PRQ, улічыўшы, што старана асновы піраміды роўная 30 см, а бакавы кант — 90 см.



Рыс. 205

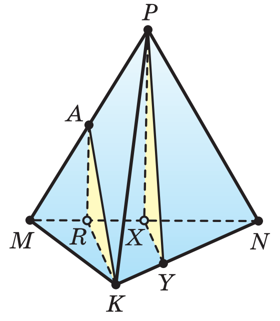
184. Ёсць прамавугольны паралелепіпед $CDEFC_1D_1E_1F_1$ з квадратнай асновай $CDEF$, вымярэнні якога роўныя 10 см, 10 см і 24 см. Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда плоскасцю, якая праходзіць праз сярэдзіну канта CC_1 і паралельная плоскасці CFE_1, і знайдзіце яго перыметр.



Рыс. 206

185. Ёсць прамая чатырохвугольная прызма $AJCDA_1J_1C_1D_1$, асновай якой з'яўляецца ромб са стараной 18 см і вострым вуглом 60°. Пабудуйце сячэнне прызмы плоскасцю, што праходзіць праз меншую дыяганаль J_1D_1 ромба і сярэдзіну канта AD. Знайдзіце перыметр сячэння, улічыўшы, што даўжыня бакавога канта прызмы роўная 40 см.

186. Усе канты прамой прызмы $BDFB_1D_1F_1$ роўныя адзін аднаму. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні прызмы, улічыўшы, што плошча сячэння прызмы плоскасцю, якая праходзіць праз вяршыні B, D і сярэдзіну канта FF_1, роўная S.



Рыс. 207

187. Плоскасць, якая паралельная плоскасці RHE і праходзіць праз такі пункт Q канта RF правільнай чатырохвугольнай піраміды $REFGH$, што $FQ : QR = 3 : 2$, перасякае піраміду па чатырохвугольніку $QPAB$ (рыс. 206). Знайдзіце перыметр сячэння, улічыўшы, што $EH = 30$ см, $ER = 25$ см.

188*. Пункты X і A ёсць адпаведна сярэдзіны кантаў MN і MP правільнай трохвугольнай піраміды $PMNK$, а трохвугольнікі ARK і PXY — паралельныя сячэнні, якія праходзяць праз прамыя KA і PX адпаведна (рыс. 207). Знайдзіце плошчу трохвугольніка PXY, улічыўшы, што плошча трохвугольніка ARK роўная S.

189*. Бакавы кант чатырохвугольнай піраміды падзелены на тры долі, і праз пункты дзялення праведзены плоскасці, паралельныя плоскасці асновы. Знайдзіце плошчы атрыманых сячэнняў, улічыўшы, што плошча асновы роўная S.

190*. Плошча сячэння піраміды плоскасцю α, якая праходзіць праз пункт на бакавым канце і паралельная аснове, роўная 5 см^2. Вызначце, у якой адносіне плоскасць α дзеліць бакавы кант піраміды, улічыўшы, што плошча асновы роўная 80 см^2.

191*. Пункт M дзеліць бакавы кант CX трохвугольнай піраміды $CXYZ$ у адносіне 2 : 3, калі лічаць ад вяршыні. Трохвугольнік MBP ёсць сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз пункт M і паралельная плоскасці XYZ. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні піраміды $CMBP$, улічыўшы, што плошча бакавой паверхні піраміды $CXYZ$ роўная q.

192*. Старана асновы і бакавы кант правільнай трохвугольнай піраміды адпаведна роўныя m і n. Праз пункт, які дзеліць бакавы кант у адносіне 1 : 3, калі лічаць ад вяршыні піраміды, праведзена сячэнне, паралельнае бакавой грані. Знайдзіце яго плошчу.

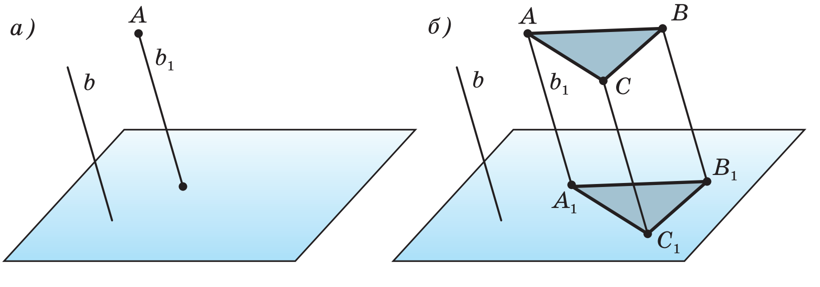
193*. На канце M_1L_1 прамавугольнага паралелепіпеда $MNKLM_1N_1K_1L_1$ выбраны такі пункт Q, што $M_1Q : QL_1 = 3 : 2$. Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда плоскасцю, якая праходзіць праз пункт Q і паралельная плоскасці MN_1K, і знайдзіце яго плошчу, улічыўшы, што плошча трохвугольніка MN_1K роўная 200 см^2.

Прасторавае мадэляванне

Пры адлюстраванні на плоскасці (на паперы) фігур, размешчаных у прасторы, выкарыстоўваюць паралельнае праектаванне.

Няхай ёсць плоскасць β і прамая b, якая перасякае гэту плоскасць.

Возьмем адвольны пункт A, правядзём праз яго прамую b_1 так, што $b_1 \parallel b$ (рыс. 208*а*). Прамая b_1 перасякае плоскасць β у пэўным пункце A_1. Пункт A_1 называецца праекцыяй на плоскасць β пункта A пры праектаванні паралельна прамой b. Плоскасць β — плоскасць праекцый, прамая b задае кірунак праектавання.



Рыс. 208

Рыс. 209

Паралельнай праекцыяй фігуры F называюць мноства F_1 праекцый усіх яе пунктаў на зададзеную плоскасць β (рыс. 208*б*). Фігура F_1 называецца паралельнай праекцыяй фігуры F.

Паралельнай праекцыяй рэальнай фігуры з'яўляецца яе цень, які падае на плоскую паверхню пры сонечным асвятленні, таму што сонечныя прамені можна лічыць паралельнымі (рыс. 209).

Калі вы паглядзіце на свой цень на зямлі або на сцяне, то ўбачыце ўласную паралельную праекцыю.

Дадатковыя заданні да раздзела 2

194. Паралелаграмы $MNLK$ і $MNXY$ не ляжаць у адной плоскасці. Дакажыце, што чатырохвугольнік $KLXY$ з'яўляецца паралелаграмам.

195. Адрэзак PE — агульная медыяна трохвугольнікаў QPS і TPA, а пункты K, L, M, N — сярэдзіны адрэзкаў PS, PA, ET, EQ. Дакажыце, што прамыя KL і MN паралельныя.

196. Вызначце, ці можа кожная з дзвюх скрыжаваных прамых быць паралельнай трэцяй прамой.

197. Дакажыце, што прамая c, якая перасякае ў розных пунктах прамыя a і b адной плоскасці, таксама ляжыць у гэтай плоскасці.

198. Дакажыце, што калі стораны AB і BC паралелаграма $ABCD$ перасякаюць плоскасць, то прамыя AD і DC таксама перасякаюць гэту плоскасць.

199. Сярэдняя лінія трапецыі ляжыць у плоскасці β. Вызначце, якія стораны трапецыі перасякаюць плоскасць β.

200. Дакажыце, што калі тры плоскасці, якія не праходзяць праз адну прамую, папарна перасякаюцца, то лініі іх перасячэння або паралельныя, або маюць агульны пункт.

201. Нарысуйце паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, пабудуйце яго сячэнні плоскасцямі ABC_1 і DCB_1, а таксама агульны адрэзак гэтых сячэнняў.

202. Прамая a паралельная плоскасці α. Вызначце, ці існуюць плоскасці, якія праходзяць праз прамую a і паралельныя плоскасці α, і калі існуюць, то колькі ёсць такіх плоскасцей?

203. Прамая a паралельная адной з дзвюх паралельных плоскасцей. Дакажыце, што прамая a або паралельная другой з гэтых плоскасцей, або ляжыць у ёй.

204. Па-за плоскасцю трапецыі $ABCD$ з асновай AD выбраны пункт T. Дакажыце, што прамая AD паралельная плоскасці BTC.

205. Пункт D не ляжыць у плоскасці паралелаграма $IJKL$. Дакажыце, што прамая KL паралельная плоскасці IDJ.

206. Плоскасць α праходзіць праз сярэдзіну стараны AB трохвугольніка ABC паралельна старане BC. Дакажыце, што плоскасці α належыць сярэдзіна стараны AC.

207. Ёсць прамая a, паралельная плоскасці α, і пункт T, прыналежны гэтай плоскасці. Дакажыце, што прамая, якая праходзіць праз пункт T і паралельная прамой a, ляжыць у плоскасці α.

208. Дакажыце, што калі прамая a перасякае плоскасць β, то яна перасякае і любую плоскасць, паралельную β.

209. Вызначце, якія многавугольнікі могуць атрымацца пры перасячэнні плоскасці і:

а) трохвугольнай прызмы;

б) паралелепіпеда.

210. Пункт A — сярэдзіна канта PY трохвугольнай піраміды $PXYZ$, усе канты якой роўныя a. Пабудуйце пункт перасячэння з паверхняй піраміды прамой b, якая праходзіць праз пункт A і паралельная медыяне YR грані XYZ. Знайдзіце даўжыню адрэзка гэтай прамой, размешчанага ўнутры піраміды.

211. Ёсць правільная чатырохвугольная піраміда $FGHIJ$ з вуглом грані HFI пры вяршыні F, роўным $60°$. Праз пэўны пункт Q канта GJ, праведзена сячэнне плоскасцю, паралельнай грані FJI. Знайдзіце перыметр гэтага сячэння, улічыўшы, што даўжыня яго дыяганалі роўная 14 см, а $GQ = 6$ см.

Праверце свае веды

1. Вызначце, якія многавугольнікі могуць атрымацца пры перасячэнні плоскасці і:

а) трохвугольнай піраміды; б) чатырохвугольнай піраміды.

2. Па-за плоскасцю трапецыі $ABCD$ з асновай AD выбраны пункт T. Дакажыце, што прамая AD паралельная плоскасці BTC.

3. Пункт P ляжыць на працягу канта NM паралелепіпеда $LKMNL_1K_1M_1N_1$. Знайдзіце адлегласць ад пункта N да пункта перасячэння прамой M_1P з плоскасцю LL_1N, улічыўшы, што $MM_1 = 24$ м, $NM = 12$ м, $PM = 18$ м.

4. Пункты N і M — сярэдзіны дыяганалей BC_1 і BD адпаведных граняў прамавугольнага паралелепіпеда $BCDEB_1C_1D_1E_1$. Знайдзіце даўжыню адрэзка MN, улічыўшы, што $BE = 6$ см, $EE_1 = 8$ см.

5. Пункт A — сярэдзіна канта PY трохвугольнай піраміды $PXYZ$, усе канты якой роўныя $12\sqrt{3}$. Пабудуйце пункт перасячэння з паверхняй піраміды прамой b, якая праходзіць праз пункт A і паралельная медыяне YR грані XYZ. Знайдзіце даўжыню адрэзка гэтай прамой, размешчанага ўнутры піраміды.

6. Вяршыні M і N трапецыі $MNLK$ з асновамі NL і KM належаць плоскасці γ, а дзве іншыя вяршыні не належаць ёй. Знайдзіце адлегласць ад пункта M да пункта перасячэння прамой LK з плоскасцю γ, улічыўшы, што $MK = 8$ см, $MN = 5$ см, $NL = 6$ см.

7. Пункт E ёсць пункт адрэзка TR, які не перасякае плоскасць γ. Паралельныя прамыя, праведзеныя праз пункты T, R, E, перасякаюць плоскасць γ у пунктах T_1, R_1, E_1 адпаведна. Дакажыце, што пункты T_1, R_1, E_1 ляжаць на адной прамой, і знайдзіце адрэзак EE_1, улічыўшы, што $TT_1 = 16$ см, $RR_1 = 10$ см, $TE : RE = 1 : 2$.

8. На адрэзку AB выбраны такі пункт C, што $AB : BC = 4 : 3$. Праз канец B адрэзка AB праведзена плоскасць α. Паралельна гэтай плоскасці пабудаваны адрэзак CD, роўны 24 см. Дакажыце, што прамая AD перасякае плоскасць α у пэўным пункце E, і знайдзіце адрэзак BE.

9. Ёсць прамая чатырохвугольная прызма $AJCDA_1J_1C_1D_1$, асновай якой з'яўляецца ромб са стараной 16 см і вострым вуглом 60°. Пабудуйце сячэнне прызмы плоскасцю, што праходзіць праз меншую дыяганаль J_1D_1 ромба і сярэдзіну канта AD. Знайдзіце перыметр сячэння, улічыўшы, што даўжыня бакавога канта прызмы роўная 20 см.

10. Пункты X, Y, Z ёсць адпаведна сярэдзіны кантаў OK, MK, MN правільнай трохвугольнай піраміды $OMNK$. Плошча сячэння плоскасцю, якая праходзіць праз прамую MX і паралельная прамой NK, роўная Q. Знайдзіце плошчу сячэння піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз пункты Y і Z і паралельная прамой MX.