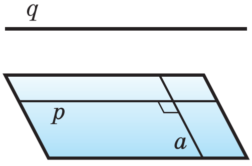
§ 7. Перпендыкулярнасць прамой і плоскасці

А) Нагадаем, што *перпендыкулярнымі* называюць прамыя, вугал паміж якімі роўны 90°. Перпендыкулярныя прамыя могуць быць перасякальнымі і могуць быць скрыжаванымі. На рысунку 210 перпендыкулярныя прамыя a і p перасякаюцца, а перпендыкулярныя прамыя a і q скрыжоўваюцца.

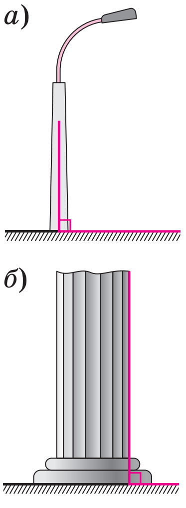


Рыс. 210

Прамая называецца **перпендыкулярнай плоскасці**, калі яна перпендыкулярная любой прамой гэтай плоскасці.

Перпендыкулярнасць прамой a плоскасці α запісваюць так: $a \perp \alpha$. Гавораць таксама, што і плоскасць α перпендыкулярная прамой a, і пішуць $\alpha \perp a$.

Прамая l, перпендыкулярная плоскасці β, абавязкова гэту плоскасць перасякае. Калі дапусціць, што прамая l ляжыць у плоскасці β або паралельная ёй, то ў плоскасці β ёсць прамыя, паралельныя прамой l, і вугал паміж l і такімі прамымі не роўны 90°.



Рыс. 211

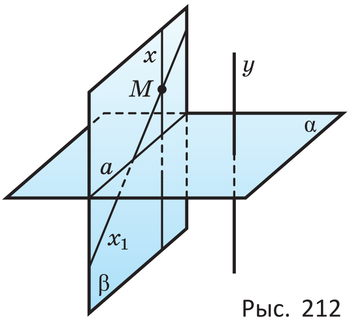
Навакольнае асяроддзе дае многа прыкладаў, што ілюструюць перпендыкулярнасць прамой і плоскасці. Слупы з асвятляльнымі лямпамі і калоны ўстанаўліваюць перпендыкулярна да гарызантальнай паверхні зямлі (рыс. 211).

З тэарэмы **6** параграфа **5** вынікае, што пры вызначэнні вугла паміж прамымі іх можна замяняць паралельнымі прамымі. Таму калі адна з паралельных прамых перпендыкулярная плоскасці, то і другая таксама перпендыкулярная гэтай плоскасці. Праўдзіцца і адваротнае сцверджанне.

Тэарэма 1. Калі дзве прамыя перпендыкулярныя плоскасці, то яны паралельныя адна адной.

Доказ. Няхай прамыя x і y абедзве перпендыкулярныя плоскасці α (рыс. 212). Дакажам, што прамыя x і y паралельныя адна адной.

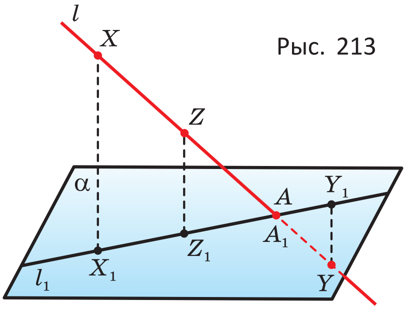
Праз які-небудзь пункт M прамой x правядзём прамую x_1, паралельную прамой y. Тады $x_1 \perp \alpha$. Дакажам, што прамая x_1 супадае з прамой x. Дапусцім, што гэта не так. Тады атрымліваецца, што ў плоскасці β, зададзенай прамымі x і x_1, праз пункт M праведзены дзве прамыя, перпендыкулярныя прамой a, па якой перасякаюцца плоскасці α і β, што немагчыма. Значыць, прамыя x і y паралельныя.



Рыс. 212

Няхай ёсць плоскасць α і прамая l, якая яе перасякае і не перпендыкулярная α (рыс. 213). Асновы перпендыкуляраў, апушчаных з пунктаў прамой l на плоскасць α, утвараюць прамую l_1. Гэта прамая называецца *праекцыяй прамой* l на плоскасць α.

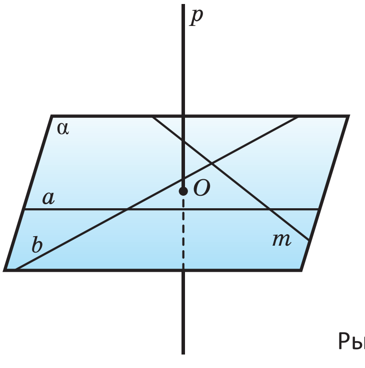
Наступная тэарэма ўстанаўлівае *прымету перпендыкулярнасці прамой і плоскасці*.



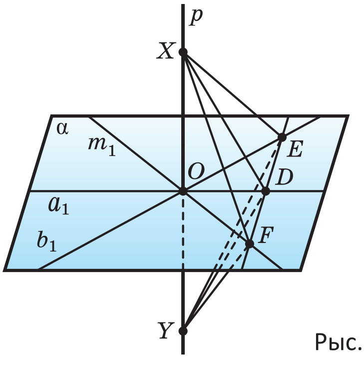
Рыс. 213

Т э а р э м а 2. Калі прамая перпендыкулярная дзвюм перасякальным прамым плоскасці, то яна перпендыкулярная гэтай плоскасці.

Доказ. Няхай прамая p перасякае плоскасць α у пункце O і перпендыкулярная перасякальным прамым a і b, што ляжаць у плоскасці α (рыс. 214). Дакажам, што прамая p перпендыкулярная плоскасці α, г. зн. прамая p перпендыкулярная прамой m, адвольна выбранай у плоскасці α.



Рыс. 214

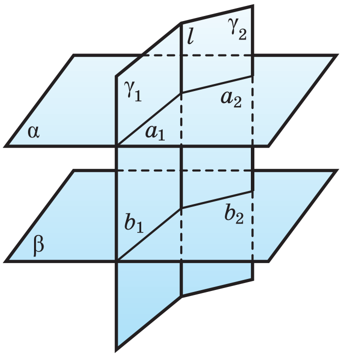


Рыс. 215

Правядзём праз пункт O прамыя a_1, b_1 і m_1, адпаведна паралельныя прамым a, b і m. У плоскасці α правядзём якую-небудзь прамую так, каб яна перасякала прамыя a_1, b_1 і m_1 у пунктах D, E, F (рыс. 215). На прамой p адзначым пункты X і Y на аднолькавых адлегласцях ад пункта O. Прамыя a_1 і b_1 — пасярэднія перпендыкуляры да адрэзка XY, таму $DX = DY$ і $EX = EY$. Значыць, трохвугольнікі XDE і YDE роўныя па трох старанах, а таму вуглы XEF і YEF роўныя. Улічыўшы гэта, атрымаем, што трохвугольнікі XEF і YEF роўныя па дзвюх старанах і вугле паміж імі. Таму $FX = FY$. Гэта азначае, што трохвугольнік XFY з'яўляецца раўнабедраным, а таму яго медыяна FO з'яўляецца і вышынёй, г. зн. прамыя p і m_1, а таксама прамыя p і m перпендыкулярныя.

Вынік 1. Калі прамая перпендыкулярная адной з паралельных плоскасцей, то яна перпендыкулярная і другой плоскасці.

Няхай плоскасці α і β паралельныя і прамая l перпендыкулярная плоскасці α (рыс. 216). Дакажам, што прамая l перпендыкулярная



Рыс. 216

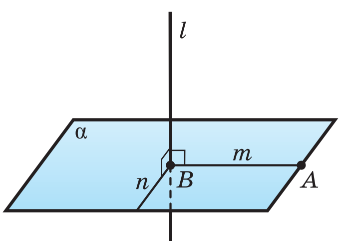
плоскасці β. Для доказу правядзём праз прамую l дзве якія-небудзь плоскасці γ_1 і γ_2. Няхай яны перасякаюць плоскасць α па прамых a_1 і a_2, а паралельную ёй плоскасць β — па прамых b_1 і b_2. Паколькі $a_1 \parallel b_1$ і $a_2 \parallel b_2$, $l \perp a_1$ і $l \perp a_2$, то $l \perp b_1$ і $l \perp b_2$. Па тэарэме **2** атрымліваем, што $l \perp \beta$.

Вынік 2. Калі адной прамой перпендыкулярныя дзве плоскасці, то яны паралельныя.

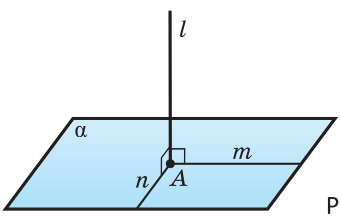
Правядзіце самастойна абгрунтаванне гэтага сцверджання, выкарыстаўшы рысунак 216.

Б) **Тэарэма 3. Праз кожны пункт прасторы праходзіць адзіная плоскасць, перпендыкулярная дадзенай прамой.**

Доказ. Няхай ёсць прамая l і пункт A. У выпадку, калі пункт A не ляжыць на прамой l (рыс. 217), у плоскасці, што вызначаецца пунктам A і прамой l, праз пункт A правядзём прамую m, перпендыкулярную прамой l, і праз пункт B перасячэння прамых m і l — яшчэ адну прамую n, перпендыкулярную прамой l.

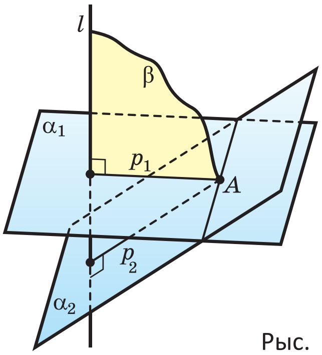


Рыс. 217

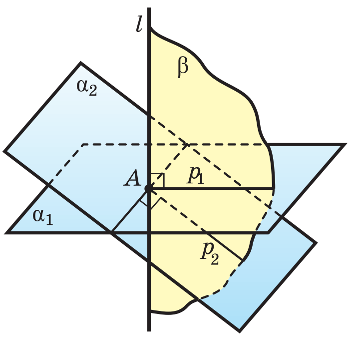


Рыс. 218

У выпадку, калі пункт A ляжыць на прамой l (рыс. 218), праз пункт A правядзём прамыя m і n, перпендыкулярныя прамой l. Праз прамыя m і n правядзём плоскасць α. Гэтыя плоскасці і прамая l перпендыкулярныя па прымеце перпендыкулярнасці прамой і плоскасці.



Рыс. 219



Рыс. 220

Дакажам цяпер, што пабудаваная плоскасць α адзіная. Дапусцім, што гэта не так. Няхай праз пункт A праведзены дзве плоскасці α_1 і α_2, перпендыкулярныя прамой l (рыс. 219 і 220). Праз прамую l і пункт A правядзём якую-небудзь плоскасць β. Яна перасякае плоскасці α_1 і α_2 па пэўных прамых p_1 і p_2, бо плоскасць β мае з плоскасцямі α_1 і α_2 агульны пункт A. Паколькі $l \perp \alpha_1$ і $l \perp \alpha_2$, то $l \perp p_1$ і $l \perp p_2$. Атрымліваецца, што ў плоскасці β праз пункт A праведзены дзве прамыя p_1 і p_2, перпендыкулярныя прамой l, што немагчыма.

Т э а р э м а 4. Праз кожны пункт прасторы праходзіць адзіная прамая, перпендыкулярная дадзенай плоскасці.

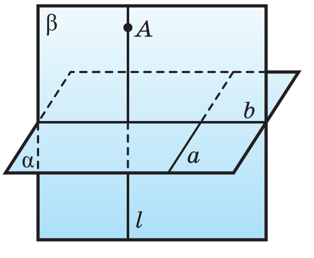
Доказ. Няхай ёсць пункт A і плоскасць α. Няхай a — прамая ў плоскасці α, а β — плоскасць, якая праходзіць праз пункт A і перпендыкулярная прамой a. Няхай плоскасці α і β перасякаюцца па прамой b (рыс. 221). У плоскасці β праз пункт A правядзём прамую l, перпендыкулярную прамой b. Прамая l — шуканая, бо яна перпендыкулярная перасякальным прамым a і b: $l \perp b$ па пабудаванні; $l \perp a$, бо $a \perp \beta$ і l належыць β.

Прамая l — адзіная. Дапусцім, што гэта не так. Няхай праз пункт A праходзіць яшчэ адна прамая l_1, перпендыкулярная плоскасці α (рыс. 222 і 223). Тады па тэарэме **1** прамыя l і l_1 паралельныя адна адной. Але такое немагчыма, бо прамыя l і l_1 перасякаюцца ў пункце A.

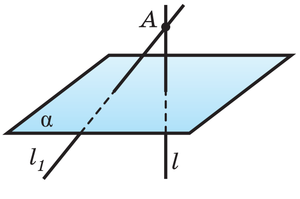
Вынік 3. Квадрат дыяганалі прамавугольнага паралелепіпеда роўны суме квадратаў трох яго вымярэнняў.

Няхай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прамавугольны паралелепіпед (рыс. 224). Паколькі кант CC_1 перпендыкулярны плоскасці $ABCD$, то трохвугольнік ACC_1 прамавугольны з прамым вуглом C. Таму $AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2$. А паколькі трохвугольнік ABC таксама прамавугольны з прамым вуглом B, то $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Улічыўшы, што $CC_1 = AA_1$ і $BC = AD$, атрымліваем, што

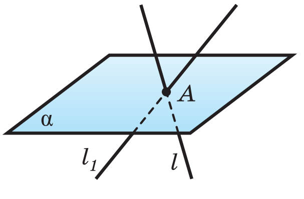
$$AC_1^2 = AB^2 + BC^2 + CC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$



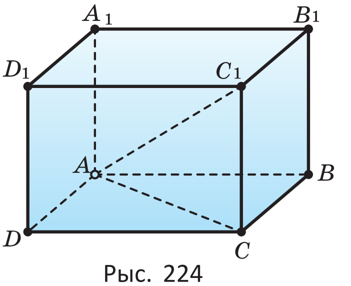
Рыс. 221



Рыс. 222



Рыс. 223



Рыс. 224

1. Якія прамыя прасторы называюцца перпендыкулярнымі? Ці могуць скрыжаваныя прамыя быць перпендыкулярнымі?
2. Якую прамую называюць перпендыкулярнай плоскасці?
3. Сфармулюйце ўласцівасць прамых, перпендыкулярных адной плоскасці.
4. Сфармулюйце прымету перпендыкулярнасці прамой і плоскасці.
5. Сфармулюйце ўласцівасць прамой, перпендыкулярнай да адной з паралельных плоскасцей.
6. Сфармулюйце ўласцівасць плоскасцей, перпендыкулярных да адной прамой.
7. Сфармулюйце сцверджанне пра плоскасць, якая перпендыкулярная дадзенай прамой і праходзіць праз дадзены пункт.
8. Сфармулюйце сцверджанне аб прамой, якая перпендыкулярная дадзенай плоскасці і праходзіць праз дадзены пункт.
9. Назавіце ў сваім класе мадэлі прамых, перпендыкулярных плоскасці.
10. У правільнай трохвугольнай прызме выбіраюць грань. Колькі ёсць кантаў гэтай прызмы, перпендыкулярных выбранай грані?
11. Прамая FA перпендыкулярная плоскасці BCF, і пункт F — сярэдзіна адрэзка AD. Ці праўда, што:
    а) $AB = DB$;
    б) калі $BF = FC$, то $AB = AC$;
    в) калі $AB = DC$, то $BF = FC$?
12. Ёсць паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Ці праўда, што:
    а) калі $\angle BAD = 90°$, то $CD \perp B_1C_1$ і $AB \perp A_1D_1$;
    б) калі $AB \perp DD_1$, то $AB \perp CC_1$ і $DD_1 \perp A_1B_1$?

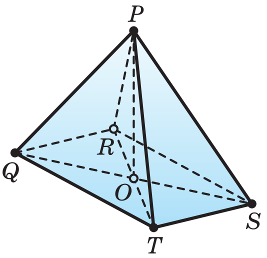
Задача 1. Дакажыце, што калі канты PQ і PS, а таксама PR і PT чатырохвугольнай піраміды $PQRST$, асновай якой з'яўляецца паралелаграм, роўныя адзін аднаму (рыс. 225), то адрэзак, які злучае вяршыню P з пунктам O перасячэння дыяганалей гэтага паралелаграма, перпендыкулярны аснове $QRST$.

Р а ш э н н е. $QRST$ — паралелаграм і $QS \cap RT = O$, таму $OQ = OS$ і $OR = OT$.

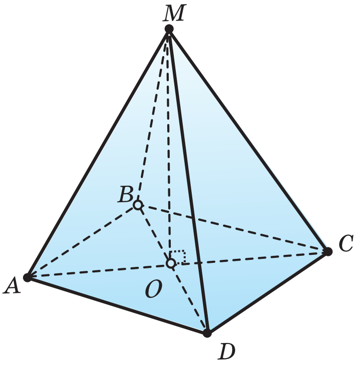
Паколькі $\triangle PQS$ раўнабедраны і $OQ = OS$, то $PO \perp QS$.

Паколькі $\triangle PRT$ раўнабедраны і $OR = OT$, то $PO \perp RT$.

$PO \perp QS$ і $QS \subset (QRS)$, $PO \perp RT$ і $RT \subset (QRS)$, таму $PO \perp (QRS)$ (тэарэма 2).



Рыс. 225



Рыс. 226

Выкарыстаўшы рысунак 226, дакажыце самастойна адваротнае сцверджанне: «Калі адрэзкі MA і MC, а таксама MB і MD злучаюць пункт M перпендыкуляра, узведзенага з цэнтра O паралелаграма $ABCD$, з супрацьлеглымі яго вяршынямі, то гэтыя адрэзкі папарна роўныя».

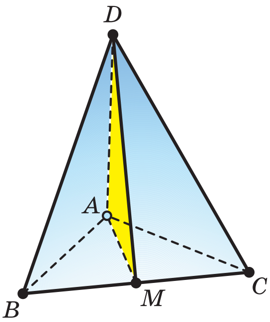
Задача 2. У правільнай трохвугольнай пірамідзе $DABC$ пункт M — сярэдзіна BC (рыс. 227). Дакажыце, што прамая BC перпендыкулярная плоскасці ADM.

Р а ш э н н е. $DABC$ — правільная трохвугольная піраміда, таму $\triangle ABC$ — роўнастаронні і $\triangle DBC$ — раўнабедраны.

$\triangle ABC$ — роўнастаронні і M — сярэдзіна BC, таму $BC \perp AM$.

$\triangle DBC$ — раўнабедраны і M — сярэдзіна BC, таму $BC \perp DM$.

$BC \perp AM$ і $BC \perp DM$, таму $BC \perp (ADM)$.



Рыс. 227

Задача 3*. Дакажыце, што дыяганаль BD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендыкулярная плоскасці трохвугольніка AB_1C (рыс. 228).

Р а ш э н н е. $ABCD$ — квадрат, таму $AC \perp BD$.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, таму $AC \perp BB_1$.

$AC \perp BD$ і $AC \perp BB_1$, таму $AC \perp (BB_1D)$.

$AC \perp (BB_1D)$ і $BD_1 \subset (BB_1D)$, таму $AC \perp BD_1$.

BB_1C_1C — квадрат, таму $B_1C \perp BC_1$.

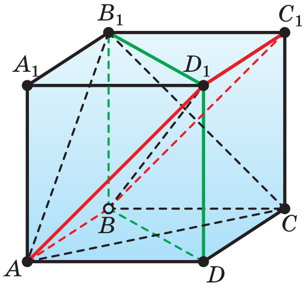
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, таму $AB \perp B_1C$.

$B_1C \perp BC_1$ і $AB \perp B_1C$, таму $B_1C \perp (ABC_1)$.

$B_1C \perp (ABC_1)$ і $BD_1 \subset (ABC_1)$, таму $B_1C \perp BD_1$.

$AC \perp BD_1$ і $B_1C \perp BD_1$, таму $BD_1 \perp (AB_1C)$.

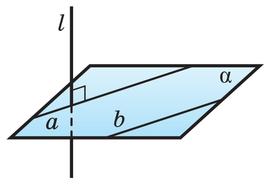
Выкарыстаўшы рысунак 228, устанавіце, у якім пункце прамая BD_1 перасякае плоскасць AB_1C.



Рыс. 228

212. Вызначце, ці перпендыкулярная прамая l плоскасці α, улічыўшы, што на рысунку:

а) 229 паралельныя прамыя a і b ляжаць у плоскасці α і прамая l перпендыкулярная ім абедзвюм;

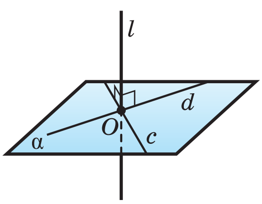


Рыс. 229

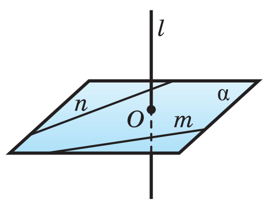
б) 230 перасякальныя прамыя c і d ляжаць у плоскасці α і прамая l перпендыкулярная ім абедзвюм;

в) 231 перасякальныя прамыя m і n ляжаць у плоскасці α і прамая l перпендыкулярная ім абедзвюм;

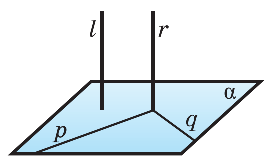
г) 232 прамая r перпендыкулярная перасякальным прамым p і q плоскасці α і прамая l паралельная прамой r.



Рыс. 230



Рыс. 231



Рыс. 232

213. На кантах F_1G_1 і FF_1 прамавугольнага паралелепіпеда $EFGHE_1F_1G_1H_1$ выбраны пункты A і B (рыс. 233). Вызначце, ці перпендыкулярныя:

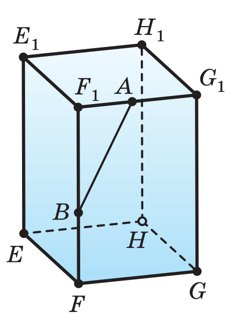
а) прамая FG і плоскасць EE_1F_1;

б) прамыя AB і GH;

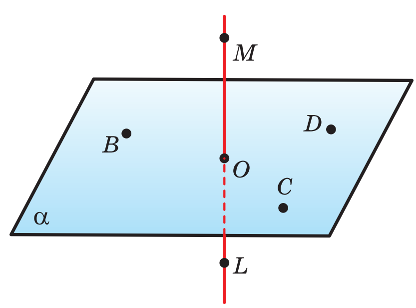
в) прамыя F_1G і EF.

214. Пункты L, M і O ляжаць на прамой, перпендыкулярнай плоскасці α, а пункты O, B, C і D ляжаць у гэтай плоскасці (рыс. 234). Вызначце, ці з'яўляецца прамым вугал:

а) LOB; б) MOC; в) DLM; г) DOL; д) BMO.

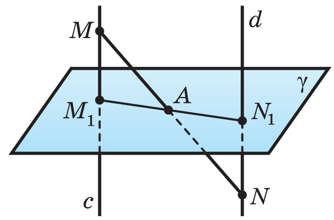


Рыс. 233



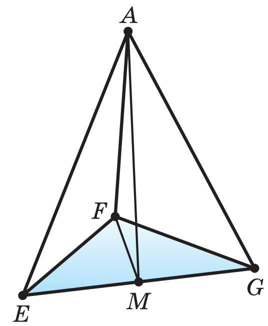
Рыс. 234

215. Праз канцы P і Q адрэзка PQ, паралельнага плоскасці γ, праведзены прамыя, перпендыкулярныя гэтай плоскасці, якія перасякаюць яе ў пунктах P_1 і Q_1. Дакажыце, што $PQ = P_1Q_1$.



Рыс. 235

216. На канце HE чатырохвугольнай піраміды $REFGH$, у якой бакавы кант FR перпендыкулярны плоскасці асновы, выбраны пункт A і на адрэзках AF і AR адзначаны іх сярэдзіны B і C. Дакажыце, што прамая BC перпендыкулярная плоскасці асновы $EFGH$, і знайдзіце вугал паміж прамымі BC і GH.



Рыс. 236

217. Праз канцы M і N адрэзка, які перасякае плоскасць γ у пункце A, праведзены прамыя c і d. Гэтыя прамыя перпендыкулярныя плоскасці γ і перасякаюць яе ў пунктах M_1 і N_1 адпаведна (рыс. 235). Дакажыце, што пункты M_1, N_1 і A ляжаць на адной прамой, і знайдзіце адрэзак MN, улічыўшы, што $MM_1 = 24$ см, $NN_1 = 8$ см, $AN_1 = 6$ см.

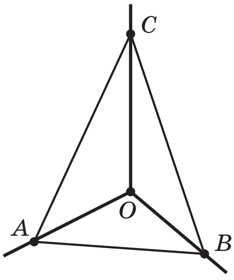
218. Праз пункты A і B праведзены прамыя, перпендыкулярныя плоскасці α, якія перасякаюць яе ў пунктах C і D адпаведна. Знайдзіце адлегласць паміж пунктамі A і B, улічыўшы, што $AC = 9$ м, $BD = 6$ м, $CD = 7{,}2$ м і адрэзак AB не перасякае плоскасць α.

219. Праз пункты A і B праведзены прамыя, перпендыкулярныя плоскасці α, якія перасякаюць яе ў пунктах A_1 і B_1 адпаведна. Знайдзіце A_1B_1, улічыўшы, што $AB = 30$ см, $AA_1 = 43$ см, $BB_1 = 67$ см.

220*. Праз вяршыню C правільнага трохвугольніка ABC са стараной $16\sqrt{3}$ см праведзена прамая k, перпендыкулярная плоскасці ABC, а праз артацэнтр O гэтага трохвугольніка — прамая l, паралельная прамой k. На прамых k і l выбраны пункты D і E, адлеглыя ад пунктаў C і O на 16 см і 12 см адпаведна. Знайдзіце адлегласць DE і адлегласці ад пунктаў D і E да вяршынь трохвугольніка.

221*. Праз цэнтр O сіметрыі квадрата са стараной a праведзена прамая l, перпендыкулярная плоскасці квадрата. Знайдзіце адлегласць ад вяршынь квадрата да пункта K прамой l, улічыўшы, што $OK = d$.

222. Ёсць прамавугольны трохвугольнік EFG з прамым вуглом F і катэтамі FE і FG, роўнымі 6 см і 8 см адпаведна. Ад вяршыні F на прамені, перпендыкулярным плоскасці трохвугольніка, адкладзены адрэзак FA, роўны 12 см, а на гіпатэнузе EG пазначана яе сярэдзіна M (рыс. 236). Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка AFM.



Рыс. 237

223. На рысунку 237 прамыя OA, OB і OC папарна перпендыкулярныя. Знайдзіце адрэзак BC, улічыўшы, што:

а) $OA = 6$ см, $AB = 14$ см, $OC = 3$ см;
б) $AC = 18$ см, $AB = 32$ см, $OC = 10$ см;
в*) $OA = p$, $AB = q$, $OC = r$;
г*) $AC = k$, $AB = l$, $OC = m$.

224. З вяршыні B трохвугольніка ABC праведзены адрэзак BD, перпендыкулярны плоскасці трохвугольніка. Знайдзіце даўжыню гэтага адрэзка, улічыўшы, што $DA = 13$ см, $DC = 15$ см, а старана BC даўжэйшая за старану BA на 4 см.

225. На прамой, якая перпендыкулярная плоскасці α і перасякае яе ў пункце O, выбраны два пункты A і B, а на плоскасці α — такі пункт X, што $XA = 3$, $XB = 4$. Знайдзіце XO, улічыўшы, што:

а) $AB = 5$; б) $AB = 6$; в) $AB = 7$.

226*. Бакавы кант OY трохвугольнай піраміды $OXYZ$ перпендыкулярны плоскасці яе асновы XYZ. Знайдзіце гэты кант, улічыўшы, што канты YX і YZ роўныя 27 см і 48 см адпаведна і канты OZ і OX адносяцца як $4 : 3$.

227. Асновай прамавугольнага паралелепіпеда з'яўляецца прамавугольнік з вымярэннямі 9 см і 12 см, а дыяганаль паралелепіпеда роўная $15\sqrt{2}$ см. Знайдзіце трэцяе вымярэнне паралелепіпеда.

228. Вуглы A і B трохвугольніка ABC разам складаюць $90°$, а прамая BD перпендыкулярная плоскасці ABC. Дакажыце, што прамыя CD і AC перпендыкулярныя.

229. Прамая AM перпендыкулярная плоскасці квадрата $ABCD$, дыяганалі якога перасякаюцца ў пункце O. Дакажыце, што прамая BD перпендыкулярная:

а) плоскасці AMO; б) прамой MO.

230. Канты AB і AC, а таксама DB і DC трохвугольнай піраміды $ABCD$ роўныя, а пункт M — сярэдзіна канта BC. Дакажыце, што плоскасць трохвугольніка ADM перпендыкулярная прамой BC.

231. Ёсць прамавугольны паралелепіпед $CDEFC_1D_1E_1F_1$, грань $CDEF$ якога з'яўляецца квадратам. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні чатырохвугольнай піраміды C_1CDEF, улічыўшы, што $CD = 20$ мм, $CE_1 = 20\sqrt{6}$ мм.

232. Канты прамавугольнага паралелепіпеда роўныя 12 см, 16 см і 28 см адпаведна. Вызначце плошчу сячэння, праведзенага праз канцы трох кантаў, што выходзяць з адной вяршыні.

233*. Вымярэнні AB, AD і дыяганаль AC_1 прамавугольнага паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ роўныя 6, 12 і 18 адпаведна. Пункты K і K_1 выбраны на кантах AD і A_1D_1 так, што $AK : KD = A_1K_1 : K_1D_1 = 1 : 3$. Дакажыце, што плоскасць BKK_1 перпендыкулярная прамой AC, і знайдзіце плошчу сячэння паралелепіпеда плоскасцю BKK_1.

234. Праз цэнтр O апісанай каля трохвугольніка ABC акружнасці праведзена прамая, перпендыкулярная плоскасці трохвугольніка (рыс. 238). Дакажыце, што кожны пункт X гэтай прамой роўнаадлеглы ад вяршынь трохвугольніка.

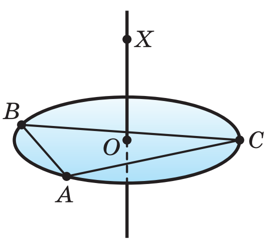
235. Дакажыце, што ўсе прамыя, якія праходзяць праз дадзены пункт M прамой a і перпендыкулярныя да яе, ляжаць у плоскасці, якая перпендыкулярная да прамой a і праходзіць праз пункт M.

236. Дакажыце, што калі пункт X роўнаадлеглы ад канцоў дадзенага адрэзка AB, то ён ляжыць у плоскасці, якая праходзіць праз сярэдзіну адрэзка AB і перпендыкулярная прамой AB.

237. Праз вяршыні A і B трохвугольніка ABC праведзены прамыя k і l, перпендыкулярныя яго плоскасці, а праз медыяну CD — плоскасць, якая перасякае прамыя k і l у пунктах E і F адпаведна (рыс. 239). Вызначце:

а) чым з'яўляецца адрэзак CD у трохвугольніку CEF;

б) што калі $CA = CB$, то трохвугольнік CEF з'яўляецца раўнабедраным.



Рыс. 238

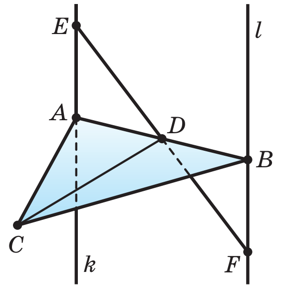
238. На прамой, якая перпендыкулярная плоскасці трохвугольніка PQR і праходзіць праз вяршыню P, выбраны пункт A. На адрэзку, што злучае сярэдзіну стараны QR з пунктам A, адзначаны такі пункт T, што $AT : TP = 2 : 1$. Улічыўшы, што G — цэнтр цяжару трохвугольніка PQR, вызначце вугал паміж прамымі:

а) GT і QR; б) GT і PQ.

239. Пункт Q з'яўляецца цэнтрам квадратнай асновы $ABCD$, а пункт K — сярэдзінай канта PA чатырохвугольнай піраміды $PABCD$, усе канты якой роўныя 100. Нарысуйце сячэнне піраміды і знайдзіце яго плошчу, улічыўшы, што плоскасць сячэння праходзіць праз пункт K і перпендыкулярная прамой:

а) AC; в) PQ;

б) PA; г) BD.



Рыс. 239

240. Усе грані трохвугольнай піраміды $IJKL$ — правільныя трохвугольнікі са стараной 6 см. Пабудуйце сячэнне гэтай піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз сярэдзіну канта KL і перпендыкулярная яму, і знайдзіце плошчу гэтага сячэння.

241. Пункт Q — сярэдзіна канта KK_1 прамавугольнага паралелепіпеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$, пункт H канта MM_1 такі, што $MH : HM_1 = 4 : 1$. Знайдзіце даўжыню адрэзка HQ, улічыўшы, што дыяганаль паралелепіпеда роўная 41 см, а дыяганаль яго асновы — 9 см.

242*. Асновай трохвугольнай піраміды $SXYZ$ з'яўляецца правільны трохвугольнік, а канты SZ, SX, SY узаемна перпендыкулярныя. Праз пункт Q, выбраны на канце XZ, праведзена плоскасць, перпендыкулярная прамой SZ. Знайдзіце кант SX піраміды, улічыўшы, што плошча сячэння роўная 32 см^2, а $SQ = 17$ см.

243*. Ёсць трохвугольная піраміда $QABC$, аснова якой — правільны трохвугольнік ABC, а бакавыя канты QA, QB, QC роўныя адзін аднаму. З вяршыні C і з такога пункта X канта AC, што $AX = 45$ см і $XC = 30$ см, праведзены перпендыкуляры да грані QAB. Знайдзіце даўжыні гэтых перпендыкуляраў, улічыўшы, што адлегласць паміж іх асновамі роўная 18 см.

244*. Ёсць правільная трохвугольная прызма $MNKM_1N_1K_1$. Пункты A і B — сярэдзіны кантаў MK і KK_1 адпаведна. Праз гэтыя пункты праведзены прамыя, якія перпендыкулярныя грані MM_1N_1N і перасякаюць яе ў пунктах P і Q адпаведна. Знайдзіце старану асновы і бакавы кант прызмы, улічыўшы, што $AB = 2\sqrt{61}$ см, а $PQ = 13$ см.

245*. У трохвугольнай пірамідзе $QFGH$ аснова FGH — правільны трохвугольнік, а бакавыя канты QF, QG, QH роўныя адзін аднаму. Адно сячэнне піраміды перпендыкулярнае канту QH і праходзіць праз вяршыню F, другое — паралельнае канту QH і змяшчае вяршыню G і такі пункт B канта FH, што $FB = 8$ см і $BH = 7$ см. Знайдзіце адрэзак, па якім перасякаюцца гэтыя сячэнні, улічыўшы, што $QF = 12$ см.

246*. Ёсць трохвугольная піраміда $PABC$, усе канты якой роўныя адзін аднаму. У ёй пазначаны цэнтр Q яе асновы ABC і ўнутраны пункт K канта PB. Зрабіце адпаведны рысунак у сшытку і нарысуйце сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз пункт K і перпендыкулярная прамой:

а) BC; б) BP; в) BQ.

247*. Пункт K — сярэдзіна канта A_1B_1 адзінкавага куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Нарысуйце сячэнне куба і знайдзіце яго перыметр і плошчу, улічыўшы, што плоскасць праходзіць праз пункт K і перпендыкулярная прамой:

а) DD_1; б) CD; в) C_1D; г) CD_1; д) BD.

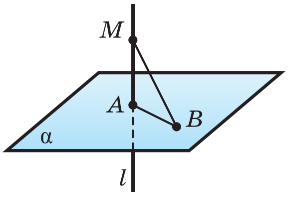
Прасторавае мадэляванне

Пры выкананні задання на вызначэнне вертыкальнасці слупа для плота (рыс. 240) вучань праверыў вертыкальнасць першага са слупоў, а далей, вымераўшы вышыні першага і другога слупоў і адлегласць паміж імі знізу і зверху, зрабіў вывад пра тое, што і другі слуп таксама вертыкальны. Вызначце, ці забяспечваюць атрыманыя вучнем звесткі праўдзівасць яго вываду. Адказ абгрунтуйце.

Рыс. 240

§ 8. Адлегласці

А) Няхай ёсць плоскасць α і пункт M па-за ёю (рыс. 241). Праз пункт M правядзём прамую l, перпендыкулярную плоскасці α, і няхай A — пункт перасячэння прамой l з плоскасцю α. Адрэзак MA называецца *перпендыкулярам да плоскасці*, праведзеным з пункта M, а пункт A — *асновай перпендыкуляра*.



Рыс. 241

Злучым пункт M яшчэ з якім-небудзь пунктам B плоскасці α. Адрэзак MB называецца *нахіленай да плоскасці*, праведзенай з пункта M, а пункт B — *асновай нахіленай*. Адрэзак AB называецца *праекцыяй нахіленай* на плоскасць α.

Уласцівасці перпендыкуляра і нахіленых

Калі з аднаго пункта па-за плоскасцю да яе праведзены дзве нахіленыя (рыс. 242), то:

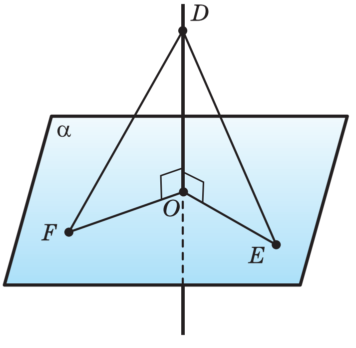
а) нахіленыя, якія маюць роўныя праекцыі, роўныя адна адной;

б) тая нахіленая большая, праекцыя якой большая;

в) роўныя нахіленыя маюць роўныя праекцыі;

г) большая нахіленая мае большую праекцыю.

Уласцівасці перпендыкуляраў і нахіленых дакажыце самастойна, выкарыстоўваючы малюнак.



Рыс. 242