улічыўшы, што плоскасць праходзіць праз пункт K і перпендыкулярная прамой:

а) DD_1; б) CD; в) C_1D; г) CD_1; д) BD.

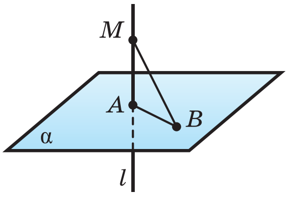
Прасторавае мадэляванне

Пры выкананні задання на вызначэнне вертыкальнасці слупа для плота (рыс. 240) вучань праверыў вертыкальнасць першага са слупоў, а далей, вымераўшы вышыні першага і другога слупоў і адлегласць паміж імі знізу і зверху, зрабіў вывад пра тое, што і другі слуп таксама вертыкальны. Высначце, ці забяспечваюць атрыманыя вучнем звесткі праўдзівасць яго вываду. Адказ абгрунтуйце.

Рыс. 240

§ 8. Адлегласці

А) Няхай ёсць плоскасць α і пункт M па-за ёю (рыс. 241). Праз пункт M правядзём прамую l, перпендыкулярную плоскасці α, і няхай A — пункт перасячэння прамой l з плоскасцю α. Адрэзак MA называецца *перпендыкулярам да плоскасці*, праведзеным з пункта M, а пункт A — *асновай перпендыкуляра*.



Рыс. 241

Злучым пункт M яшчэ з якім-небудзь пунктам B плоскасці α. Адрэзак MB называецца *нахіленай да плоскасці*, праведзенай з пункта M, а пункт B — *асновай нахіленай*. Адрэзак AB называецца *праекцыяй нахіленай* на плоскасць α.

Уласцівасці перпендыкуляра і нахіленых

Калі з аднаго пункта па-за плоскасцю да яе праведзены дзве нахіленыя (рыс. 242), то:

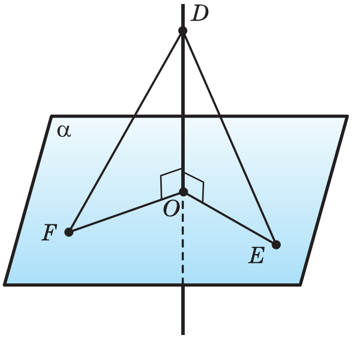
а) нахіленыя, якія маюць роўныя праекцыі, роўныя адна адной;

б) тая нахіленая большая, праекцыя якой большая;

в) роўныя нахіленыя маюць роўныя праекцыі;

г) большая нахіленая мае большую праекцыю.

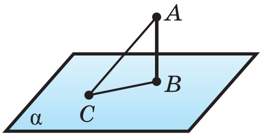
Уласцівасці перпендыкуляраў і нахіленых дакажыце самастойна, выкарыстоўваючы малюнак.



Рыс. 242

Тэарэма 5. Перпендыкуляр да плоскасці, праведзены з пэўнага пункта, меншы за любую нахіленую да гэтай плоскасці, праведзеную з таго самага пункта.

Доказ. Няхай адрэзак AB на рысунку 243 — перпендыкуляр, а адрэзак AC — нахіленая да плоскасці α. Гэтыя перпендыкуляр і нахіленая ў прамавугольным трохвугольніку ABC з'яўляюцца адпаведна катэтам і гіпатэнузай. Таму $AB < AC$.

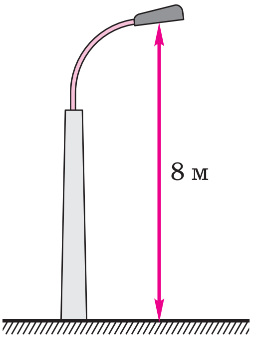


Рыс. 243

У адпаведнасці са сцверджаннем тэарэмы **5**, з усіх адлегласцей ад дадзенага пункта да розных пунктаў прыведзенай плоскасці найменшай з'яўляецца адлегласць, вымераная па перпендыкуляры.

Б) Адлегласцю ад пункта да плоскасці называецца даўжыня перпендыкуляра, праведзенага з гэтага пункта да плоскасці.

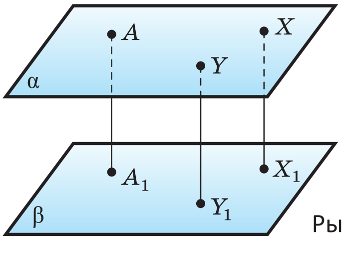
Калі мы гаворым, напрыклад, што вулічны ліхтар знаходзіцца на вышыні 8 м ад зямлі, то мяркуем, што адлегласць ад ліхтара да паверхні зямлі, вымераная па перпендыкуляры, праведзеным ад ліхтара да плоскасці зямлі, складае 8 м (рыс. 244).



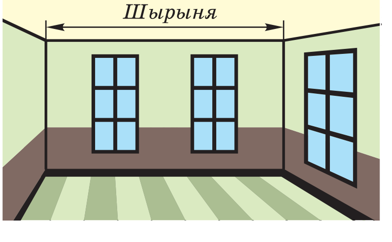
Рыс. 244

Тэарэма 6. Адлегласць ад любога пункта адной з паралельных плоскасцей да другой плоскасці адна і тая і роўная даўжыні іх агульнага перпендыкуляра.

Доказ. Няхай ёсць паралельныя плоскасці α і β (рыс. 245). Няхай A — які-небудзь пункт плоскасці α, адрэзак AA_1 — перпендыкуляр, праведзены з пункта A да плоскасці β. Возьмем адвольны пункт X плоскасці α і правядзём з яго перпендыкуляр XX_1 да плоскасці β. Тады па тэарэме **1** прамыя AA_1 і XX_1 паралельныя, а па тэарэме **12** з параграфа **6** адрэзкі AA_1 і XX_1 роўныя адзін аднаму. Гэта азначае, што адлегласць ад любога пункта X плоскасці α да плоскасці β роўная адрэзку AA_1. Паколькі адрэзак AA_1 перпендыкулярны і плоскасці β, то ён з'яўляецца і адлегласцю ад пункта A_1 да плоскасці α. Зразумела, што адлегласць ад любога пункта Y плоскасці β да плоскасці α роўная адрэзку AA_1.



Рыс. 245



Рыс. 246

Адлегласцю паміж паралельнымі плоскасцямі называецца даўжыня перпендыкуляра, праведзенага з якога-небудзь пункта адной плоскасці да другой плоскасці.

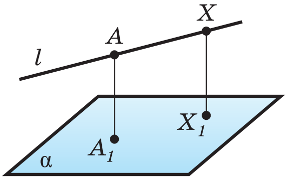
Усе пункты адной сцяны пакоя знаходзяцца на аднолькавай адлегласці ад супрацьлеглай сцяны (рыс. 246). Гэта адлегласць і ёсць шырыня пакоя.

Тэарэма 7. Адлегласць ад любога пункта прамой, паралельнай плоскасці, да гэтай плоскасці адна і тая і роўная перпендыкуляру, праведзенаму з якога-небудзь пункта прамой да плоскасці.

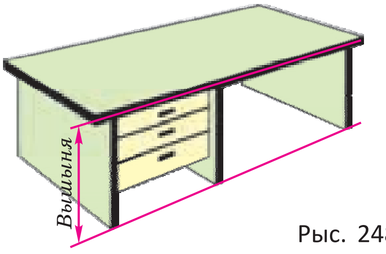
Выкарыстаўшы рысунак 247, правядзіце доказ тэарэмы самастойна.

Адлегласцю паміж прамой і паралельнай ёй плоскасцю называецца даўжыня перпендыкуляра, праведзенага з якога-небудзь пункта прамой да плоскасці.

Усе пункты краю стала знаходзяцца на адной адлегласці ад падлогі (рыс. 248). Гэта адлегласць і ёсць вышыня стала.



Рыс. 247

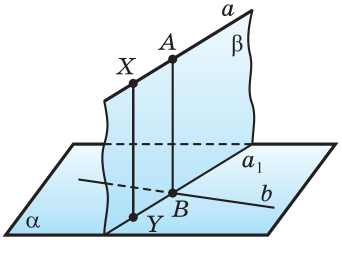


Рыс. 248

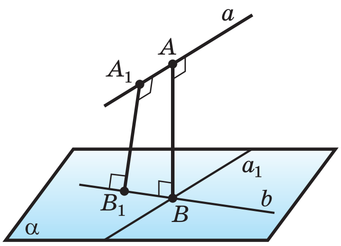
Тэарэма 8. Дзве скрыжаваныя прамыя маюць адзіны агульны перпендыкуляр.

Доказ. Няхай ёсць скрыжаваныя прамыя a і b (рыс. 249). Дакажам, што на гэтых прамых можна выбраць такія пункты A і B, што прамая AB перпендыкулярная і прамой a, і прамой b.

Няхай α — плоскасць, якая праходзіць праз прамую b паралельна прамой a. Возьмем на прамой a пункт X і апусцім перпендыкуляр XY на плоскасць α. Няхай β — плоскасць, што праходзіць праз перасякальныя прамыя a і XY. Абазначым a_1 — прамую, па якой перасякаюцца плоскасці α і β. Паколькі $a_1 \parallel a$, то прамыя a_1 і b перасякаюцца ў пэўным пункце B. У плоскасці β апусцім перпендыкуляр BA на прамую a. Прамыя AB і XY ляжаць у адной плоскасці β і перпендыкулярныя да прамой a. Таму $AB \parallel XY$ і $AB \perp \alpha$ і, значыць, $AB \perp a$ і $AB \perp b$.



Рыс. 249



Рыс. 250

Гэтым самым існаванне агульнага перпендыкуляра скрыжаваных прамых абгрунтавана. Дакажам цяпер яго адзінасць.

Няхай скрыжаваныя прамыя a і b маюць яшчэ адзін агульны перпендыкуляр A_1B_1, прычым пункт A_1 належыць прамой a, а пункт B_1 — прамой b (рыс. 250).

Пункты A і A_1, B і B_1 супадаць не могуць, бо з аднаго пункта да прамой можна правесці толькі адзін перпендыкуляр. Паколькі $A_1B_1 \perp a$ і $A_1B_1 \perp b$, то прамая A_1B_1, як і прамая AB, перпендыкулярная плоскасці α, што праходзіць праз прамую b паралельна прамой a. Таму $A_1B_1 \parallel AB$ і пункты A_1, B_1, A, B належаць адной плоскасці. Значыць, і прамыя AA_1 і BB_1 належаць адной плоскасці. Атрымалі супярэчнасць з тым, што гэтыя прамыя скрыжоўваюцца.

Адлегласцю паміж скрыжаванымі прамымі называецца даўжыня іх агульнага перпендыкуляра.

З доказу тэарэмы **8** вынікае, што *адлегласць паміж скрыжаванымі прамымі роўная адлегласці ад любога пункта адной з іх да плоскасці, што змяшчае другую прамую і паралельная першай.*

Каб знайсці адлегласць паміж скрыжаванымі прамымі, можна дзейнічаць па-рознаму.

а) Можна пабудаваць адрэзак з канцамі на гэтых прамых, які перпендыкулярны ім абедзвюм, і знайсці яго даўжыню.

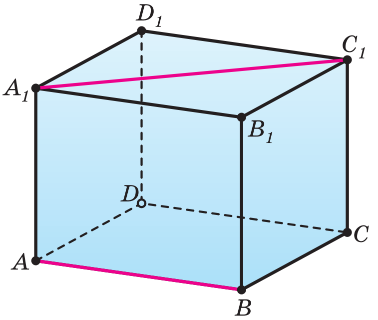
Прыклад 1. Знойдзем адлегласць паміж прамымі, якія змяшчаюць кант куба даўжынёй a і дыяганаль грані, якая з гэтым кантам не мае агульных пунктаў.

Р а ш э н н е. Няхай трэба знайсці адлегласць паміж прамымі AB і A_1C_1 (рыс. 251). Паколькі $AA_1 \perp AB$ і $AA_1 \perp A_1C_1$, то AA_1 — агульны перпендыкуляр скрыжаваных прамых AB і A_1C_1, а таму шуканая адлегласць роўная канту куба, г. зн. a.

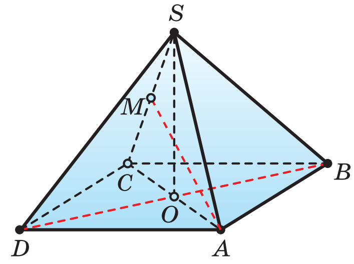
б) Можна пабудаваць плоскасць, якая змяшчае адну з прамых і паралельная другой. Тады шуканая адлегласць будзе роўнай адлегласці ад гэтай плоскасці да другой прамой.

Прыклад 2. У правільнай чатырохвугольнай пірамідзе $SABCD$ канты асновы $ABCD$ роўныя 4, а бакавыя канты — 6. Знойдзем адлегласць паміж прамымі BD і AM, дзе M — сярэдзіна канта SC.

Р а ш э н н е. Няхай O — цэнтр квадрата $ABCD$. Праз прамую BD правядзём плоскасць BDN, паралельную прамой AM (рыс. 252). Паколькі плоскасць SAC перпендыкулярная прамой BD і змяшчае прамую AM, то перпендыкуляр, апушчаны з любога пункта прамой AM на плоскасць BDN, належыць плоскасці SAC.



Рыс. 251



Рыс. 252

Няхай K — такі пункт на прамой AM, што $KO \perp AM$. Улічыўшы, што O — сярэдзіна стараны AC трохвугольніка ACM, атрымліваем, што OK роўны палавіне вышыні трохвугольніка ACM, праведзенай да стараны AM. Таму $OK = \frac{1}{2} \cdot \frac{2S_{ACM}}{AM} = \frac{S_{SAC}}{2AM}$. Знойдзем плошчу трохвугольніка SAC і яго медыяну AM:

$$AC = 4\sqrt{2},\ SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{6^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2} = 2\sqrt{7},$$

$$S_{SAC} = 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{7} = 4\sqrt{14},\ AM = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2(AS^2 + AC^2) - SC^2} =$$

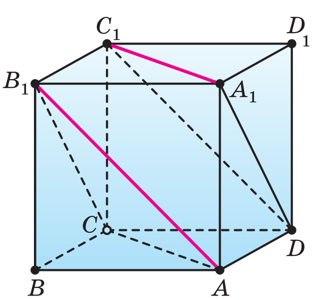
$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2(36+32) - 36} = 5.\ \text{Цяпер}\ OK = \frac{2\sqrt{14}}{5}.$$

Адказ: $\frac{2\sqrt{14}}{5}$.

в) Можна пабудаваць дзве паралельныя плоскасці, кожная з якіх змяшчае адну са скрыжаваных прамых і паралельная другой. Тады шуканая адлегласць будзе роўнай адлегласці паміж гэтымі плоскасцямі.

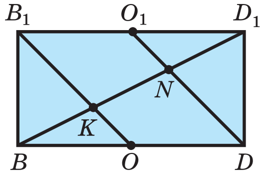
Прыклад 3. Знойдзем адлегласць паміж прамымі, якія змяшчаюць неперасякальныя дыяганалі дзвюх сумежных граняў куба з кантам a.

Рашэнне. Няхай трэба знайсці адлегласць паміж прамымі AB_1 і A_1C_1 (рыс. 253). Плоскасць, што змяшчае A_1C_1 і паралельная AB_1, перасякае грань CC_1D_1 па прамой, паралельнай AB_1, г. зн. па прамой C_1D, а грань DAA_1 — па прамой DA_1. Разважаючы гэтаксама, атрымліваем, што плоскасць, якая змяшчае AB_1 і паралельная A_1C_1, перасякае грань $ABCD$ па прамой AC, а грань BCC_1 — па прамой B_1C.



Рыс. 253

Дыяганаль BD_1 куба як прамая плоскасці BB_1D_1D утварае прамы вугал з прамымі AC і A_1C_1, якія перпендыкулярныя гэтай плоскасці, а як прамая плоскасці BAD_1C_1 утварае прамы вугал з прамымі B_1C і A_1D, якія перпендыкулярныя гэтай плоскасці. Таму прамая BD_1 перпендыкулярная як плоскасці AB_1C, так і паралельнай ёй плоскасці A_1C_1D.



Рыс. 254

Плоскасць BDD_1 перасякаецца з плоскасцямі AB_1C і A_1C_1D па прамых B_1O і DO_1, дзе O і O_1 — цэнтры граняў $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ (рыс. 254), прамая BD_1 перасякае плоскасці AB_1C і A_1C_1D у пунктах K і N на прамых B_1O і DO_1. Паколькі $B_1O \parallel DO_1$, то па тэарэме Фалеса $BK = KN$ і $KN = ND_1$. Таму агульны перпендыкуляр KN плоскасцей AB_1C і A_1C_1D мае даўжыню $\frac{BD_1}{3}$, г. зн. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Адказ: $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

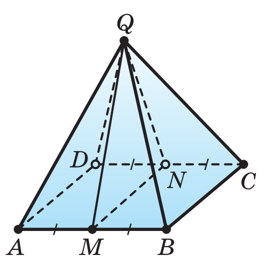
Дыяганаль куба дзеліцца плоскасцю трохвугольніка, старанамі якога служаць дыяганалі граняў куба, што маюць з разгляданай дыяганаллю куба агульны пункт, у адносіне 1 : 2.

г) Можна пабудаваць плоскасць, перпендыкулярную адной са скрыжаваных прамых, і пабудаваць праекцыю на яе другой прамой. Тады шуканая адлегласць будзе роўнай даўжыні перпендыкуляра, апушчанага з пункта, што з'яўляецца праекцыяй першай прамой на пабудаваную плоскасць, на праекцыю другой прамой.

Прыклад 4. У чатырохвугольнай пірамідзе $QABCD$ усе канты роўныя a. Знойдзем адлегласць паміж скрыжаванымі кантамі AB і QC (рыс. 255).

Рашэнне. З тэарэмы **8** вынікае, што на прамых AB і QC ёсць такія пункты X і Y, што прамая XY перпендыкулярная як прамой AB, так і прамой QC, і, разам з гэтым, плоскасці, якая праходзіць праз адну з гэтых прамых паралельна другой.

Няхай α — плоскасць, якая праходзіць праз пункт Q перпендыкулярна прамой AB. Яна праходзіць праз сярэдзіны M і N кантаў AB і CD. Тады $XY \parallel \alpha$, і праекцыяй адрэзка XY на плоскасць α будзе адрэзак, роўны XY.



Рыс. 255

Вызначым, у якія пункты спраектуюцца пункты X і Y. Паколькі $AB \perp \alpha$, то ўся прамая AB праектуецца ў адзін пункт M. Значыць, пункт X праектуецца ў пункт M.

Паколькі пункты Q і C праектуюцца ў пункты Q і N адпаведна, то прамая QC праектуецца ў прамую QN. Улічым таксама, што прамая QN належыць плоскасці, паралельнай прамой AB. Таму шуканая праекцыя адрэзка XY ёсць перпендыкуляр да прамой QN, праведзены з пункта M.

Даўжыню d гэтага перпендыкуляра знойдзем, выкарыстаўшы плошчу раўнабедранага трохвугольніка QMN з асновай, роўнай a, і бакавымі старанамі, роўнымі $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Атрымаем $\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot d$, адкуль $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Адказ: $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

?

1. Які адрэзак называецца перпендыкулярам да плоскасці? Які пункт называецца асновай перпендыкуляра?

2. Які адрэзак называецца нахіленай да плоскасці? Які пункт называецца асновай нахіленай?

3. Сфармулюйце сцверджанне пра параўнанне даўжынь перпендыкуляра і нахіленай да плоскасці, праведзеных з аднаго пункта.

4. Што называецца адлегласцю ад пункта да плоскасці?

5. Сфармулюйце сцверджанне пра адлегласць ад любога пункта адной з паралельных плоскасцей да другой плоскасці.

6. Што называецца адлегласцю паміж паралельнымі плоскасцямі?

7. Сфармулюйце сцверджанне пра адлегласць да плоскасці ад любога пункта прамой, паралельнай гэтай плоскасці.

8. Што называецца адлегласцю паміж прамой і паралельнай ёй плоскасцю?

9. Сфармулюйце сцверджанне пра агульны перпендыкуляр дзвюх скрыжаваных прамых.

10. Што называецца адлегласцю паміж скрыжаванымі прамымі?

11. Патлумачце, у чым адрозненне:

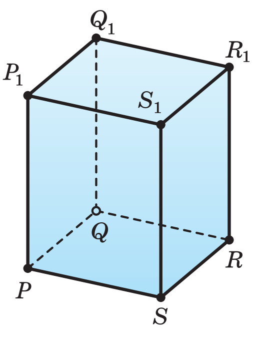
а) перпендыкуляра да плоскасці і прамой, перпендыкулярнай плоскасці;
б) нахіленай да плоскасці і прамой, што перасякае плоскасць.

12. Ёсць прамавугольны паралелепіпед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (гл. рыс. 256). Назавіце праекцыю прамой:

а) PQ на плоскасць SS_1R;
б) PQ на плоскасць QQ_1R_1;
в) PQ_1 на плоскасць PQR.

13. Ёсць прамавугольны паралелепіпед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (гл. рыс. 256). Назавіце адрэзак, даўжыня якога выражае адлегласць паміж пунктам P і прамой:

а) RS; в) RR_1;
б) P_1S_1; г) Q_1R_1.



Рыс. 256

Задача 1. Пункт M адлеглы на 40 см ад кожнай вяршыні правільнага трохвугольніка ABC са стараной 60 см. Знайдзіце адлегласць ад пункта M да плоскасці ABC.

Р а ш э н н е. $MD \perp (ABC)$ і ABC — правільны трохвугольнік, таму D — цэнтр акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ABC, і AD — яе радыус (рыс. 257).

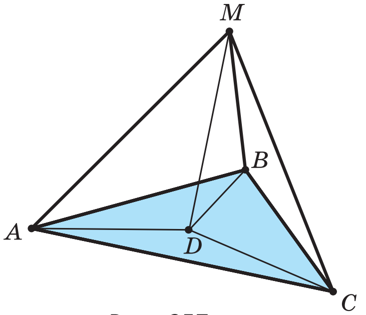
$$AD = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{60}{\sqrt{3}} = 20\sqrt{3}\ (\text{см}).$$

$MD \perp (ABC)$, таму $\triangle ADM$ — прамавугольны.

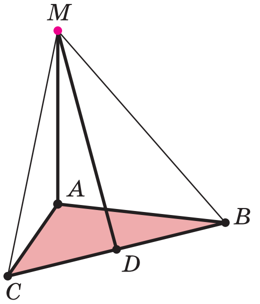
Тады

$$MD = \sqrt{AM^2 - AD^2} = \sqrt{40^2 - \left(20\sqrt{3}\right)^2} = 20\ (\text{см}).$$

А д к а з: 20 см.



Рыс. 257



Рыс. 258

Задача 2. З вяршыні A раўнабедранага трохвугольніка ABC з асновай BC узведзены перпендыкуляр AM, і пункт M злучаны з сярэдзінай D гэтай асновы (рыс. 258). Дакажыце, што прамыя MD і BC перпендыкулярныя.

Р а ш э н н е. AM — перпендыкуляр да плоскасці ABC, таму AB і AC — праекцыі нахіленых MB і MC на (ABC).

ABC — раўнабедраны трохвугольнік з асновай BC, таму $AB = AC$.

AB і AC — праекцыі нахіленых MB і MC на (ABC) і $AB = AC$, таму $MB = MC$.

$MB = MC$ і D — сярэдзіна BC, таму $MD \perp BC$.

248. З пункта A да плоскасці α праведзены чатыры роўныя нахіленыя AX, AY, AZ, AT. Ці будуць пункты X, Y, Z, T належаць адной акружнасці, цэнтрам якой з'яўляецца праекцыя O пункта A на плоскасць α?

249. З аднаго пункта праведзены да плоскасці перпендыкуляр і нахіленая, вугал паміж якімі роўны β. Знайдзіце:
а) нахіленую і яе праекцыю на гэту плоскасць, калі перпендыкуляр роўны d;
б) перпендыкуляр і праекцыю нахіленай, улічыўшы, што нахіленая роўная m.

250. Пункт K належыць прамой p, якая праходзіць праз вяршыню A прамавугольніка $ABCD$ і перпендыкулярная да яго плоскасці. Улічыўшы, што $KD = 6$ см, $KB = 7$ см, $KC = 9$ см, знайдзіце адлегласць:
а) ад пункта K да плоскасці прамавугольніка $ABCD$;
б*) паміж прамымі AK і CD.

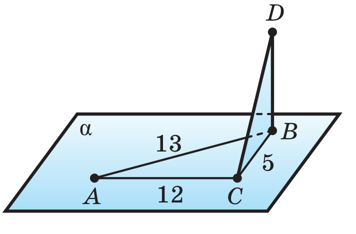
251. З пункта да плоскасці праведзены дзве нахіленыя даўжынямі 2 м кожная. Знайдзіце адлегласць ад пункта да плоскасці, улічыўшы, што нахіленыя ўтвараюць вугал у 60°, а іх праекцыі перпендыкулярныя.

252. Даўжыня перпендыкуляра PQ з пункта P да плоскасці роўная 1, а даўжыні нахіленых PA і PB да гэтай самай плоскасці роўныя 2. Пункт C — сярэдзіна адрэзка AB. Знайдзіце QC, улічыўшы, што:
а) $\angle APB = 90°$; б) $\angle APB = \beta$.

253. З пункта да плоскасці праведзены дзве нахіленыя даўжынямі 10 см і 17 см, праекцыі якіх адрозніваюцца на 9 см. Знайдзіце гэтыя праекцыі.

254. З пункта да плоскасці праведзены дзве нахіленыя. Знайдзіце даўжыні нахіленых, улічыўшы, што:
а) адна з іх на 14 см большая за другую, а праекцыі нахіленых роўныя 16 см і 40 см;
б) нахіленыя адносяцца як 1 : 2, а праекцыі нахіленых роўныя 10 см і 70 см.

255. З вяршыні B тупога вугла паралелаграма $ABCD$ да яго плоскасці ўзведзены перпендыкуляр BH. Знайдзіце стораны паралелаграма, улічыўшы, што $AH = 5$ см, $HD = HC = 8{,}5$ см, $AC = 1{,}5\sqrt{33}$ см.



Рыс. 259

256. З вяршыні B квадрата $ABCD$ да яго плоскасці ўзведзены перпендыкуляр QB. Знайдзіце плошчу трохвугольніка QAD, улічыўшы, што $QB = 24$ см, $AB = 18$ см.

257*. Стораны AB, AC, BC трохвугольніка ABC адпаведна роўныя 13, 12 і 5, а адрэзак BD перпендыкулярны плоскасці гэтага трохвугольніка (рыс. 259). Дакажыце, што прамыя CD і AC перпендыкулярныя.

258. Ёсць прамавугольны паралелепіпед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (рыс. 260). Назавіце адрэзкі, даўжыні якіх выражаюць адлегласць паміж паралельнымі плоскасцямі:

а) $PQRS$ і $P_1Q_1R_1S_1$;
б) PP_1Q_1Q і SS_1R_1R;
в) PP_1S_1S і QQ_1R_1R.

259. Ёсць прамавугольны паралелепіпед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (гл. рыс. 260). Назавіце адрэзкі, даўжыні якіх выражаюць адлегласць паміж паралельнымі прамой і плоскасцю:

а) PQ і $P_1Q_1R_1S_1$;
б) PQ_1 і SS_1R_1R;
в) PR і $P_1Q_1R_1S_1$.

260*. Ёсць прамавугольны паралелепіпед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (гл. рыс. 260). Назавіце адрэзкі, даўжыні якіх выражаюць адлегласць паміж скрыжаванымі прамымі:

а) PQ і SS_1; б) PQ_1 і SS_1; в) PR і P_1S_1.

261*. У правільнай шасцівугольнай прызме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ усе канты роўныя a. Знайдзіце адлегласці паміж прамой AB (рыс. 261) і прамой:

а) B_1C_1; б) B_1D_1; в) A_1D_1; г) C_1D_1; д) F_1E_1; е) D_1F_1.

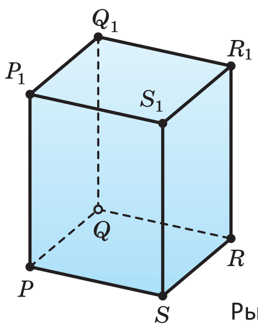
262. Канцы адрэзка даўжынёй 100 см належаць паралельным плоскасцям, адлеглым на 80 см. Знайдзіце праекцыі адрэзка на кожную плоскасць.

263. Ёсць дзве паралельныя плоскасці. З двух пунктаў адной з іх праведзены нахіленыя да другой плоскасці даўжынямі 37 см і 125 см, прычым праекцыя першай нахіленай на адну з плоскасцей роўная 12 см. Знайдзіце праекцыю другой нахіленай.

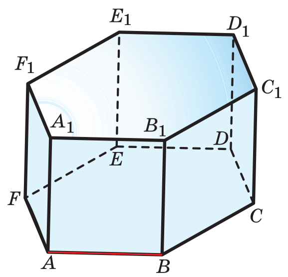
264. Адрэзак AD даўжынёй 12 см перпендыкулярны плоскасці раўнабедранага трохвугольніка ABC з асновай BC і бакавой стараной, роўнымі 6 см і 5 см адпаведна. Вызначце, на якіх адлегласцях ад прамой BC знаходзяцца канцы адрэзка AD.

265*. У правільнай шасцівугольнай прызме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ усе канты роўныя a. Знайдзіце адлегласці паміж прамой BC_1 (рыс. 262) і прамой:

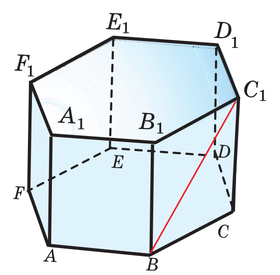
а) A_1D_1; б) F_1E_1; в) A_1F_1; г) A_1D; д) F_1E; е) A_1F.



Рыс. 260



Рыс. 261



Рыс. 262

266*. Кант куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ роўны a. Знайдзіце адлегласць паміж прамымі:

а) AB_1 і CD_1; б) AC і BB_1; в) A_1D і C_1A.

267. Праз вяршыню A трохвугольніка ABC паралельна прамой BC праведзена плоскасць γ, і з пунктаў B і C на плоскасць γ апушчаны перпендыкуляры BB_1 і CC_1. Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC, улічыўшы, што $\angle B_1AC_1 = 90°$, $AB_1 = 12$ см, $AC = 5\sqrt{2}$ см, а адлегласць паміж прамой BC і плоскасцю γ роўная 5 см.

268. На плоскасці δ праведзены дзве паралельныя прамыя MN і KL, адлеглыя на a, а па-за плоскасцю δ выбраны пункт C, адлеглы ад MN на b і ад KL на c. Знайдзіце адлегласць ад пункта C да плоскасці δ, улічыўшы, што:

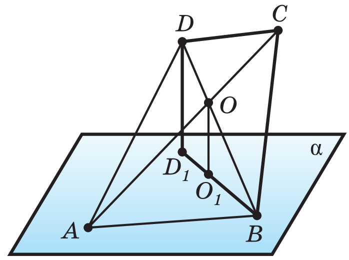
$a = 66$, $b = c = 65$.

269. Праз адну са старон ромба праведзена плоскасць, адлеглая ад супрацьлеглай стараны ромба на 8 см. Знайдзіце праекцыі старон ромба на гэту плоскасць, улічыўшы, што праекцыі дыяганалей на яе роўныя 16 см і 4 см.

270. Праз аснову AB трапецыі $ABCD$ праведзена плоскасць α, адлеглая ад другой асновы на m (рыс. 263). Знайдзіце адлегласць ад пункта O перасячэння дыяганалей трапецыі да плоскасці α, улічыўшы, што асновы трапецыі адносяцца як $p : q$.

271. Ёсць трохвугольная піраміда $PABC$, у якой $PA = PB = PC = 2$, $AC = 3$ і $AB = 2$. Нарысуйце і знайдзіце адлегласць ад вяршыні да асновы піраміды, улічыўшы, што кант BC роўны:

а) 2; б) 3; в) $\sqrt{5}$.



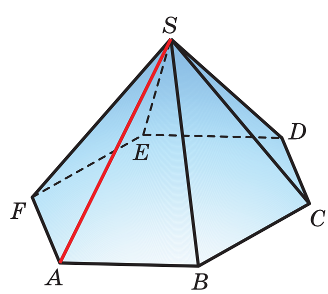
Рыс. 263

272*. Вымярэнні прамавугольнага паралелепіпеда роўныя a, b і c. Знайдзіце адлегласці паміж дыяганаллю паралелепіпеда і дыяганалямі яго граняў, якія гэта дыяганаль не перасякае.

273*. Пункт M — сярэдзіна канта AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдзіце адлегласць паміж прамымі A_1M і B_1C, улічыўшы, што кант куба роўны a.

274*. У шасцівугольнай пірамідзе $SABCDEF$ усе канты асновы роўныя a, а ўсе бакавыя канты — $2a$ (рыс. 264). Знайдзіце адлегласці паміж бакавым кантам SA і кантамі асновы:

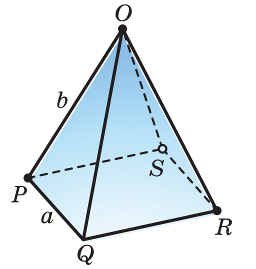
а) BF; б) CE; в) BE; г) BD.



Рыс. 264

275*. У трохвугольнай пірамідзе ўсе канты роўныя a. Знайдзіце адлегласць паміж кантамі, якія не належаць адной грані.

276*. У чатырохвугольнай пірамідзе ўсе канты асновы роўныя a, а ўсе бакавыя канты — b (рыс. 265). Знайдзіце адлегласць паміж бакавым кантам і кантам асновы, які не ляжыць з ім у адной плоскасці.



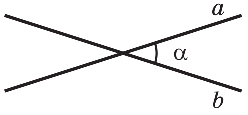
Рыс. 265

277*. Стораны AB, AC, BC трохвугольніка ABC адпаведна роўныя 17, 8 і 15, а адрэзак BD перпендыкулярны плоскасці гэтага трохвугольніка. Знайдзіце адлегласць ад канцоў BD да меншай стараны трохвугольніка, улічыўшы, што $BD = 36$.

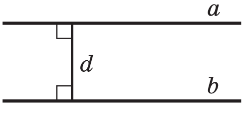
278*. Пункт M ляжыць на прамой, якая праходзіць праз вяршыню B ромба $ABCD$ і перпендыкулярная яго плоскасці. Знайдзіце адлегласці ад пункта M да прамых, якія змяшчаюць стораны ромба, улічыўшы, што $AB = 25$ см, $\angle BAD = 60°$, $BM = 12{,}5$ см.

§ 9. Вугал паміж прамой і плоскасцю

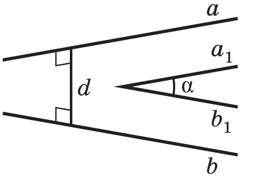
А) З дапамогай лікаў, што выражаюць адлегласць паміж дзвюма прамымі і велічыню вугла паміж імі, можна апісаць узаемнае размяшчэнне гэтых прамых у прасторы. Калі прамыя a і b перасякаюцца, то іх узаемнае размяшчэнне характарызуе вугал α паміж імі, адлегласць паміж такімі прамымі лічыцца роўнай нулю (рыс. 266). Калі прамыя a і b паралельныя, то іх узаемнае размяшчэнне характарызуе адлегласць d паміж імі, вугал паміж такімі прамымі роўны нулю (рыс. 267). Калі прамыя a і b скрыжаваныя, то іх узаемнае размяшчэнне характарызуе вугал α і адлегласць d паміж імі (рыс. 268).



Рыс. 266



Рыс. 267



Рыс. 268

Тэарэма 9. Калі прамая плоскасці перпендыкулярная праекцыі нахіленай на гэту плоскасць, то яна перпендыкулярная і самой нахіленай, а калі прамая плоскасці перпендыкулярная нахіленай да плоскасці, то яна перпендыкулярная і праекцыі гэтай нахіленай.