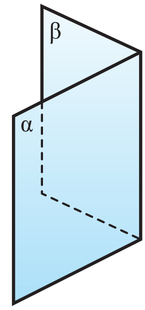
§ 10. Перпендыкулярнасць плоскасцей

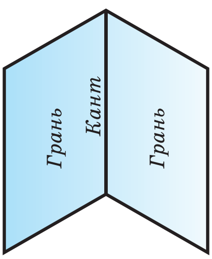
А) Два прамені на плоскасці з агульным пачаткам раздзяляюць гэту плоскасць на дзве часткі, кожная з якіх называецца *вуглом*.

Аналагічна дзве паўплоскасці з агульнай мяжой раздзяляюць прастору на дзве часткі (рыс. 290). Кожную з гэтых частак разам з паўплоскасцямі называюць **двухгранным вуглом**. Паўплоскасці, што абмяжоўваюць двухгранны вугал, называюць **гранямі** вугла, а агульную прамую — **кантам** двухграннага вугла (рыс. 291).

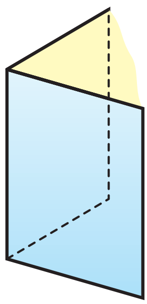


Рыс. 290

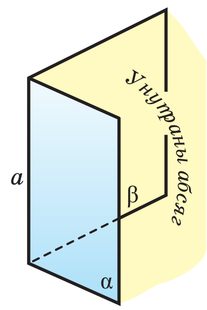
Звычайна разглядаюць меншы з двухгранных вуглоў з дадзенымі гранямі (рыс. 292). Пункты вугла, што не ляжаць на яго гранях, складаюць *унутраны абсяг* двухграннага вугла (рыс. 293).



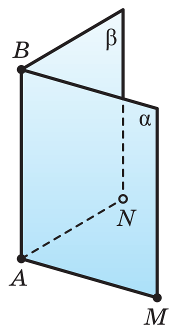
Рыс. 291



Рыс. 292



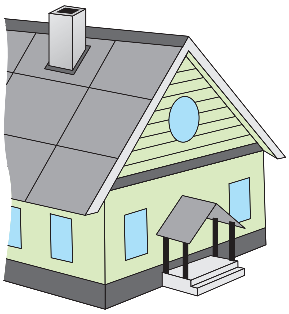
Рыс. 293



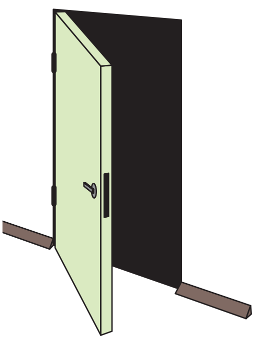
Рыс. 294

Двухгранны вугал звычайна абазначаюць па канце: $\angle\, a$ (гл. рыс. 293) або $\angle\, AB$ (рыс. 294). Пры неабходнасці можна далучыць назвы граняў або назвы пунктаў на гранях: $\angle\, \alpha a \beta$ (гл. рыс. 293), або $\angle\, \alpha AB\beta$ (гл. рыс. 294), або $\angle\, MABN$ (гл. рыс. 294).

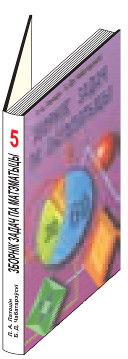
Мадэллю двухграннага вугла можа служыць двухсхільны дах (рыс. 295), сцяна разам з адчыненымі дзвярыма (рыс. 296), напаўразгорнутая кніга (рыс. 297).



Рыс. 295

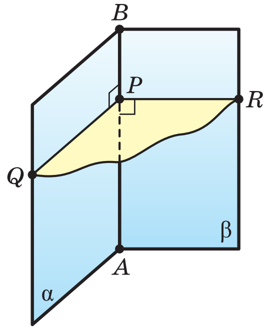


Рыс. 296



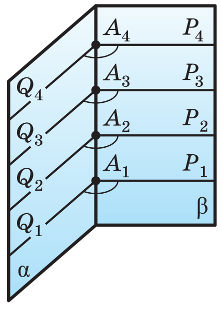
Рыс. 297

Для вымярэння двухгранных вуглоў уводзіцца паняцце лінейнага вугла. Выберам на канце AB двухграннага вугла $\alpha AB\beta$ пункт P, і ў яго гранях α і β з гэтага пункта правядзём прамені PQ і PR, перпендыкулярныя канту AB (рыс. 298). Атрыманы вугал QPR, стораны якога PQ і PR абмяжоўваюць частку плоскасці PQR, што належыць двухграннаму вуглу $\alpha AB\beta$, называюць **лінейным вуглом** двухграннага вугла. Плоскасць лінейнага вугла перпендыкулярная да канта двухграннага вугла, бо па пабудаванні прамені PQ і PR перпендыкулярныя канту AB.



Рыс. 298

Зразумела, што двухгранны вугал мае бясконца многа лінейных вуглоў (рыс. 299).

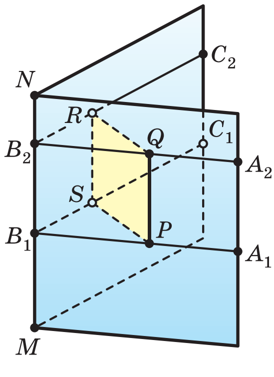


Рыс. 299

Тэарэма 10. Усе лінейныя вуглы двухграннага вугла роўныя адзін аднаму.

Доказ. Няхай $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$ — лінейныя вуглы двухграннага вугла MN (рыс. 300). Дакажам, што $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_2B_2C_2$.

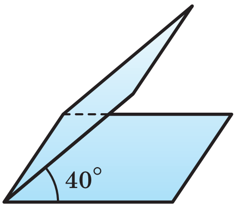
Адкладзём на старанах вуглоў $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$ роўныя адрэзкі B_1P, B_2Q, B_1S, B_2R. Тады атрымаюцца чатырохвугольнікі PQB_2B_1 і SRB_2B_1, у якіх супрацьлеглыя стораны PB_1 і QB_2, а таксама SB_1 і RB_2 роўныя па пабудаванні і паралельныя як перпендыкуляры да адной прамой, праведзеныя ў адпаведнай плоскасці. Таму $PQ = B_2B_1 = SR$ і $PQ \parallel B_2B_1 \parallel SR$. А гэта азначае, што чатырохвугольнік $PQRS$ з'яўляецца паралелаграмам, што дазваляе зрабіць вывад пра роўнасць адрэзкаў PS і QR. Атрымалі, што ў трохвугольнікаў PSB_1 і QRB_2 роўныя адпаведныя стораны, таму трохвугольнікі роўныя, а значыць, роўныя і іх вуглы $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$.



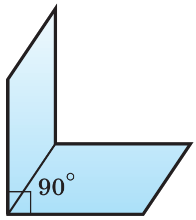
Рыс. 300

Вымярэнне двухгранных вуглоў звязваецца з вымярэннем іх лінейных вуглоў. У залежнасці ад таго, якім — вострым, прамым, тупым, разгорнутым — з'яўляецца лінейны вугал двухграннага вугла, адрозніваюць *вострыя, прамыя, тупыя, разгорнутыя двухгранныя вуглы*. Двухгранны вугал, адлюстраваны на рысунку 301, — востры, на рысунку 302 — прамы, на рысунку 303 — тупы.

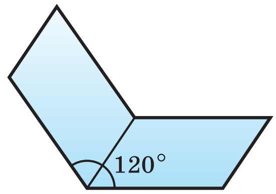
Дзве перасякальныя плоскасці раздзяляюць прастору на чатыры двухгранныя вуглы з агульным кантам (рыс. 304). Калі адзін з іх роўны α,



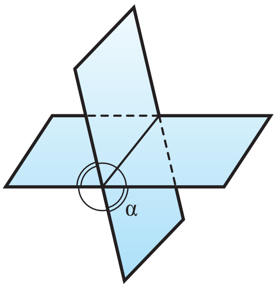
Рыс. 301



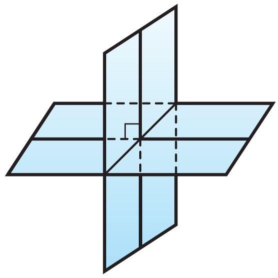
Рыс. 302



Рыс. 303



Рыс. 304



Рыс. 305

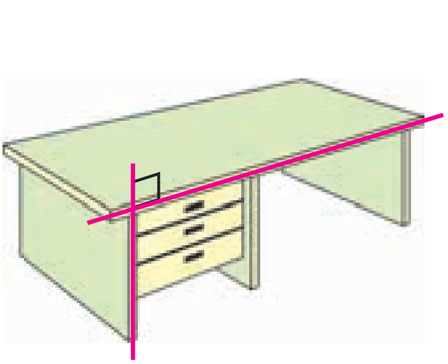
то яшчэ адзін з іх таксама роўны α, а два астатнія — $180° - \alpha$. Сярод гэтых вуглоў ёсць такі, які не перавышае $90°$, яго велічыню і прымаюць за велічыню вугла паміж перасякальнымі плоскасцямі.

Калі адзін з двухгранных вуглоў, што ўзнікаюць пры перасячэнні дзвюх плоскасцей, прамы, то тры астатнія таксама прамыя (рыс. 305).

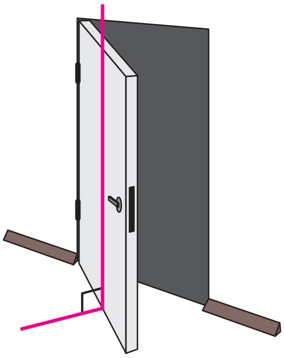
Б) Плоскасці, пры перасячэнні якіх утвараюцца прамыя двухгранныя вуглы, называюцца **перпендыкулярнымі плоскасцямі**.

Для абазначэння перпендыкулярнасці плоскасцей, як і для абазначэння перпендыкулярнасці прамых, выкарыстоўваюць знак $\perp$.

Мадэлямі перпендыкулярных плоскасцей могуць служыць стальніца і бакавіна стала (рыс. 306), падлога пакоя і дзверы ў яго (рыс. 307).



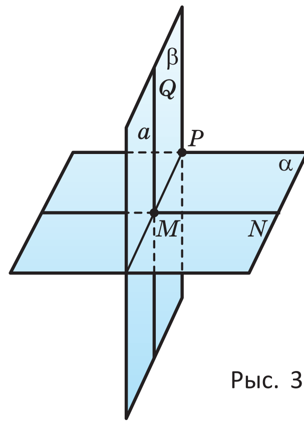
Рыс. 306



Рыс. 307

Т э а р э м а 11. Калі адна з дзвюх плоскасцей праходзіць праз прамую, перпендыкулярную другой плоскасці, то такія плоскасці перпендыкулярныя.

Доказ. Няхай праз прамую a, якая перпендыкулярная плоскасці α і перасякае яе ў пункце M, праходзіць плоскасць β (рыс. 308). Дакажам, што $\alpha \perp \beta$.



Рыс. 308

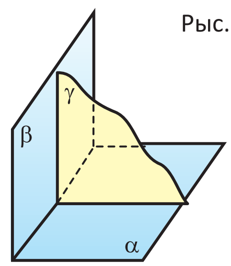
Плоскасці α і β перасякаюцца па пэўнай прамой MP, якая перпендыкулярная прамой a, бо па ўмове прамая a і плоскасць α перпендыкулярныя.

У плоскасці α правядзём прамую MN, перпендыкулярную прамой MP. Атрыманы вугал NMQ, дзе Q — пункт прамой a, ёсць лінейны вугал двухграннага вугла $\alpha MP\beta$. Паколькі па ўмове $a \perp \alpha$, то вугал NMQ — прамы, і, значыць, плоскасці α і β перпендыкулярныя.

Тэарэма **11** выражае *прымету перпендыкулярнасці плоскасцей*.

Вынік. Плоскасць, перпендыкулярная лініі перасячэння дзвюх дадзеных плоскасцей, перпендыкулярная да кожнай з іх (рыс. 309).

Рыс. 309

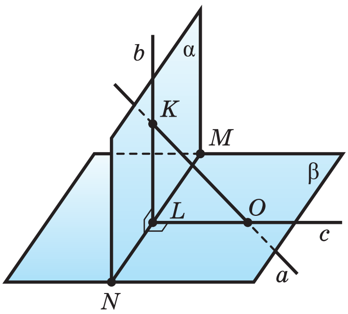


Дакажам цяпер сцверджанне, адваротнае сцверджанню тэарэмы **11**.

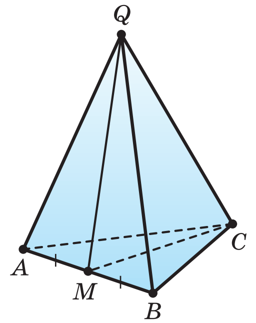
Т э а р э м а 12. Калі праз пункт адной з перпендыкулярных плоскасцей правесці прамую, перпендыкулярную другой плоскасці, то гэта прамая належыць першай плоскасці.

Доказ. Няхай дзве перпендыкулярныя плоскасці α і β перасякаюцца па прамой MN, і праз пункт K плоскасці α праведзена прамая a, перпендыкулярная плоскасці β. Дакажам, што гэта прамая належыць плоскасці α.

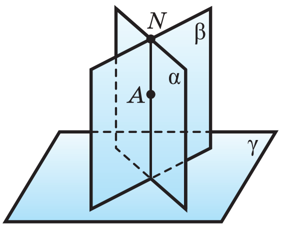
Праз пункт K у плоскасці α правядзём прамую b, перпендыкулярную MN, і праз пункт L іх перасячэння ў плоскасці β — прамую c, таксама перпендыкулярную MN (рыс. 310). Вугал паміж прамымі b і c прамы як лінейны вугал прамога двухграннага вугла. Атрымалі, што прамая b праходзіць праз пункт K і перпендыкулярная плоскасці β, бо яна перпендыкулярная перасякальным прамым MN і c гэтай плоскасці. А паколькі праз гэты пункт да дадзенай плоскасці можна правесці толькі адну перпендыкулярную прамую, то прамыя b і a супадаюць. Значыць, прамая a належыць плоскасці α.



Рыс. 310



Рыс. 311



Рыс. 312

Прыклад 1. Пункт M — сярэдзіна канта AB пры аснове правільнай піраміды $QABC$ (рыс. 311). Дакажам, што плоскасць QCM перпендыкулярная плоскасці асновы ABC.

Р а ш э н н е. Прамая AB з'яўляецца асновай раўнабедраных трохвугольнікаў AQB і ACB. Таму яна перпендыкулярная медыянам QM і CM гэтых трохвугольнікаў і разам з гэтым плоскасці QCM. З тэарэмы **12** вынікае, што плоскасць ABC, якая праходзіць праз перпендыкуляр AB да плоскасці QCM, ёй перпендыкулярная.

Вынік. Калі дзве перасякальныя плоскасці перпендыкулярныя трэцяй плоскасці, то іх лінія перасячэння перпендыкулярная той самай плоскасці (рыс. 312).

Прыклад 2. У правільнай трохвугольнай пірамідзе $QABC$ плоскі вугал AQB пры вяршыні роўны α. Знойдзем велічыню двухграннага вугла пры бакавым канце.

Р а ш э н н е. Няхай N — сярэдзіна канта AC, AK — перпендыкуляр да канта BQ, праведзены з пункта A (рыс. 313).

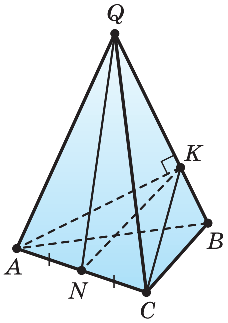
З роўнасці трохвугольнікаў ABQ і CBQ вынікае, што $CK \perp BQ$. Таму вугал AKC — лінейны вугал двухграннага вугла BQ.

З прамавугольных трохвугольнікаў AKQ і ANQ атрымліваем: $AK = AQ \sin\alpha$, $AN = AQ \sin \frac{\alpha}{2}$. З прамавугольнага трохвугольніка AKN знаходзім, што

$$\sin\left(\frac{\angle AKC}{2}\right) = \frac{AN}{AK} = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Таму $\angle AKC = 2 \arcsin \dfrac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

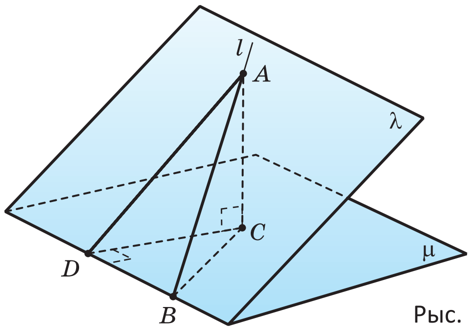
А д к а з: $2 \arcsin \dfrac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.



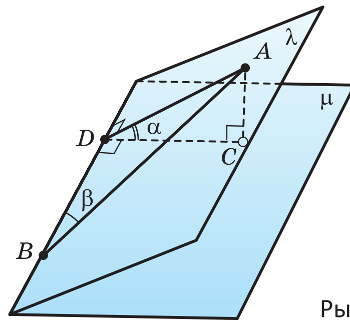
Рыс. 313

В) Пры вылічэннях бывае карысней наступная *тэарэма пра тры сінусы*.

Т э а р э м а 13. Лінейны вугал α двухграннага вугла, вугал β паміж кантам гэтага двухграннага вугла і прамой, што ляжыць у адной з яго граняў, і вугал γ паміж гэтай прамой і плоскасцю іншай грані звязаны роўнасцю $\sin\alpha\ \sin\beta = \sin\gamma$.



Рыс. 314

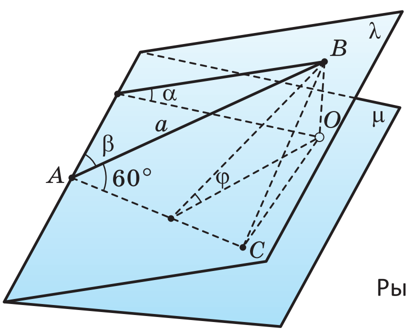


Рыс. 315

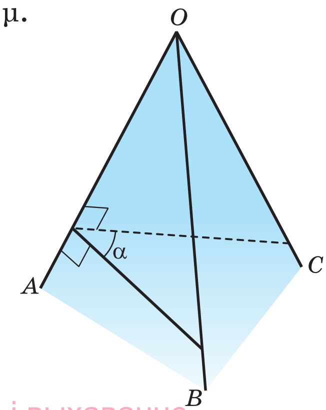
Доказ. Няхай прамая l ляжыць у плоскасці λ, пункт A належыць прамой l, B — пункт перасячэння прамой l з кантам двухграннага вугла $\lambda\mu$, C — аснова перпендыкуляра, апушчанага з пункта A на грань μ, D — аснова перпендыкуляра, апушчанага з пункта A на кант вугла (рыс. 314). Няхай $AB = a$ і $\angle ADC = \alpha$, $\angle ABD = \beta$, $\angle ABC = \gamma$. Паколькі DC — праекцыя AD і $AD \perp BD$, то $DC \perp BD$. Тады з прамавугольных трохвугольнікаў ADB, ACD і ACB будзем мець: $AD = a\sin\beta$, $AC = AD\ \sin\alpha = a\sin\beta\ \sin\alpha$ і $\sin\gamma = AC : AB = \sin\alpha\ \sin\beta$.

Вынік 1. Калі пункт A ляжыць у грані λ двухграннага вугла велічынёй α, то адлегласць ад яго да плоскасці другой грані μ вугла роўная $AB\sin\alpha\ \sin\beta$, дзе B — пункт на канце двухграннага вугла, а β — вугал паміж прамой AB і кантам двухграннага вугла (рыс. 315).

Прыклад 3. Стораны AB і AC правільнага трохвугольніка ABC ляжаць адпаведна ў гранях λ і μ вострага двухграннага вугла велічынёй α. Старана AB утварае вугал β з кантам двухграннага вугла. Знойдзем велічыню вугла паміж плоскасцю ABC і плоскасцю μ.



Рыс. 316



Рыс. 317

Р а ш э н н е. Няхай шуканы вугал роўны φ, старана трохвугольніка мае даўжыню a. Тады адлегласць BO ад пункта A да плоскасці μ можна знайсці двума спосабамі (рыс. 316): $BO = a\sin\alpha\sin\beta$ і $BO = a\sin\varphi\sin 60°$.

Таму
$$\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\alpha\sin\beta \text{ і } \varphi = \arcsin\left(\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{3}}\right).$$

А д к а з: $\arcsin\left(\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{3}}\right)$.

Вынік 2. Няхай прамені OA, OB і OC ёсць грані двухгранных вуглоў велічынёй α, β і γ адпаведна. Тады $\frac{\sin\alpha}{\sin BOC} = \frac{\sin\beta}{\sin AOC} = \frac{\sin\gamma}{\sin AOB}$ (рыс. 317).

?

1. Што называюць вуглом? Што называюць двухгранным вуглом?
2. Што называюць гранню двухграннага вугла; кантам двухграннага вугла? Як абазначаюць двухгранны вугал?
3. Як пабудаваць лінейны вугал двухграннага вугла? Якую ўласцівасць маюць лінейныя вуглы двухграннага вугла?
4. Які двухгранны вугал называюць вострым; прамым; тупым; разгорнутым?
5. Якія плоскасці называюцца перпендыкулярнымі?
6. Сфармулюйце прымету перпендыкулярнасці плоскасцей.
7. Сфармулюйце ўласцівасць плоскасці, перпендыкулярнай да лініі перасячэння дзвюх плоскасцей.
8. Сфармулюйце ўласцівасць прамой, праведзенай праз пункт адной з перпендыкулярных плоскасцей перпендыкулярна другой плоскасці.
9. Сфармулюйце ўласцівасць лініі перасячэння дзвюх плоскасцей, якія перпендыкулярныя трэцяй.
10. Сфармулюйце тэарэму пра тры сінусы.
11. Вынік 2 называюць яшчэ тэарэмай сінусаў для трохграннага вугла. Патлумачце чаму.
12. Колькі двухгранных вуглоў мае:

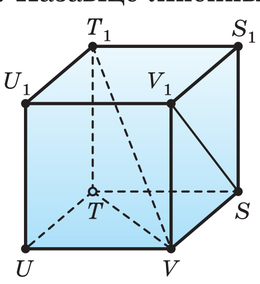
    а) трохвугольная піраміда; б) паралелепіпед?
13. Ёсць прамавугольны паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назавіце лінейны вугал двухграннага вугла:

    а) DD_1; б) A_1B_1.
14. Улічыўшы, што $STUVS_1T_1U_1V_1$ — куб (рыс. 318), вызначце:

    а) ці з’яўляецца вугал TVT_1 лінейным вуглом двухграннага вугла T_1SVT;

    б) ці з’яўляецца вугал T_1ST лінейным вуглом двухграннага вугла T_1SVT;

    в) велічыню двухграннага вугла V_1UTS.



Рыс. 318

Задача 1. Плоскасці правільных трохвугольніка KMD і чатырохвугольніка $KMNP$ перпендыкулярныя (рыс. 319). Знайдзіце DN, улічыўшы, што $KM = a$.

Р а ш э н н е. $(KDM) \perp (KMN)$ і $MN \perp MK$, таму па тэарэме 12 $MN \perp (KDM)$.

$MN \perp MD$, таму $\triangle DMN$ — прамавугольны.

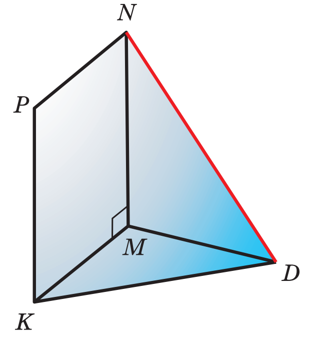
$MD = a$, бо $\triangle KDM$ — правільны і $KM = a$.

$MN = a$, бо чатырохвугольнік $KMNP$ — правільны і $KM = a$.

Тады па тэарэме Піфагора

$$DN = \sqrt{MD^2 + MN^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$$

А д к а з: $a\sqrt{2}$.



Рыс. 319

Задача 2. З пунктаў M і N канта двухграннага вугла ў розных яго гранях узведзены перпендыкуляры MK і NL (рыс. 320). Вызначце велічыню двухграннага вугла, улічыўшы, што $MN = 48$ см, $MK = 16$ см, $NL = 10$ см і адлегласць паміж пунктамі K і L роўная 50 см.

Р а ш э н н е. Няхай $NL \parallel MA$ і $NM \parallel LA$. Тады $MNLA$ — паралелаграм і $MA = NL = 10$ см, $AL = MN = 48$ см.

$MA \parallel NL$ і $NL \perp MN$, таму $MA \perp MN$.

$\angle KMA$ — лінейны вугал двухграннага вугла $KMNL$ ($MK \perp MN$ і $MA \perp MN$).

$MN \perp MK$ і $MN \perp MA$, таму $MN \perp (KMA)$.

$AL \parallel MN$ і $MN \perp (KMA)$, таму $AL \perp (KMA)$.

$AL \perp (KMA)$ і $AK \subset (KMA)$, таму $AL \perp AK$.

$AL \perp AK$, таму $\triangle KAL$ — прамавугольны.

Тады па тэарэме Піфагора

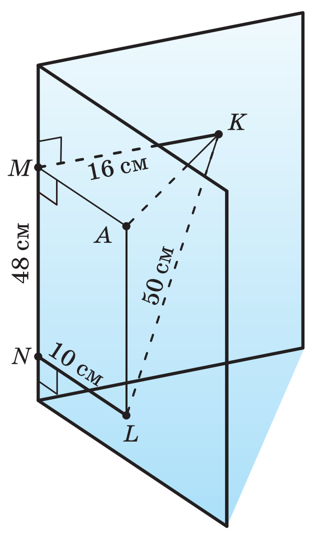
$$AK = \sqrt{KL^2 - AL^2} = \sqrt{50^2 - 48^2} = 14 \text{ (см)}.$$

З трохвугольніка MKA:

$$\cos \angle KMA = \frac{MK^2 + MA^2 - AK^2}{2MK \cdot MA} = \frac{16^2 + 10^2 - 14^2}{2 \cdot 16 \cdot 10} = \frac{1}{2}.$$

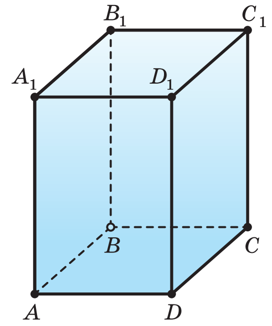
Таму $\angle KMA = 60°$.

А д к а з: 60°.



Рыс. 320

309. Ёсць прамы паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рыс. 321). Назавіце яго:
а) прамыя двухгранныя вуглы;
б) перпендыкулярныя грані.

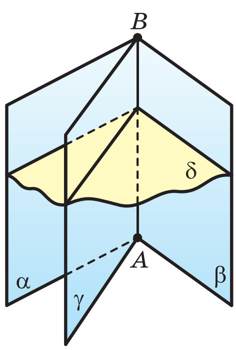


Рыс. 321

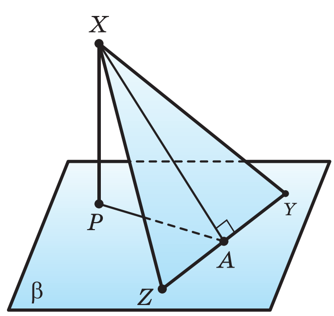
310. Улічыўшы, што пункт T ёсць сярэдзіна канта QR трохвугольнай піраміды $OPQR$, у якой асновай з'яўляецца правільны трохвугольнік PQR, а бакавыя канты роўныя адзін аднаму, вызначце, ці з'яўляецца вугал:
а) PRO лінейным вуглом двухграннага вугла $PRQO$;
б) PTO лінейным вуглом двухграннага вугла $PRQO$.

311. Ці праўдзіцца сцверджанне, што калі двухгранны вугал $\alpha AB\beta$ разбіць на два двухгранныя вуглы $\alpha AB\gamma$ і $\gamma AB\beta$ (рыс. 322), то лінейны вугал двухграннага вугла $\alpha AB\beta$ роўны суме лінейных вуглоў двухгранных вуглоў $\alpha AB\gamma$ і $\gamma AB\beta$?

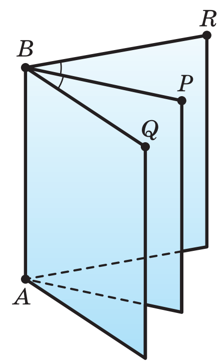
312. З вяршыні X трохвугольніка XYZ, старана YZ якога ляжыць у плоскасці β, праведзена вышыня XA і перпендыкуляр XP да плоскасці β (рыс. 323). Дакажыце, што вугал XAP — лінейны вугал двухграннага вугла $XYZP$.



Рыс. 322



Рыс. 323



Рыс. 324

313. На рысунку 324 двухгранныя вуглы $RABP$ і $PABQ$ роўныя. Дакажыце, што кожны пункт плоскасці ABP роўнаадлеглы ад плоскасцей ABR і ABQ.

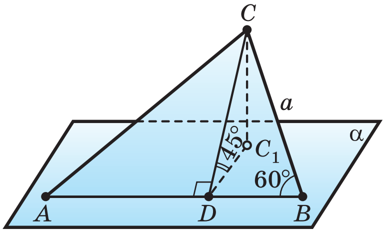
314. Ёсць два двухгранныя вуглы, у якіх адна грань агульная, а дзве іншыя грані разам складаюць плоскасць. Дакажыце, што сума гэтых двухгранных вуглоў роўная 180°.

315. Усе канты трохвугольнай піраміды $ABCD$ роўныя адзін аднаму, а пункт M ёсць сярэдзіна канта AC. Дакажыце, што вугал DMB з'яўляецца лінейным вуглом двухграннага вугла $BACD$.

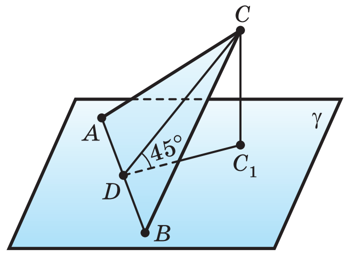
316. Два пункты адной грані двухграннага вугла адлеглыя ад яго канта на 51 см і 34 см, а першы з іх адлеглы ад другой грані на 15 см. Знайдзіце адлегласць да гэтай грані ад другога пункта.

317. На адной грані двухграннага вугла выбраны пункт X, адлеглы на 36 см ад канта вугла і на 24 см ад другой яго грані. На другой грані гэтага вугла выбраны пункт Y, адлеглы ад першай грані на 18 см. Знайдзіце адлегласць пункта Y ад канта вугла.

318. Плоскасць прамавугольнага трохвугольніка ABC нахілена да плоскасці α пад вуглом у 45° (рыс. 325). Знайдзіце адлегласць вяршыні прамога вугла C ад плоскасці α, улічыўшы, што $\angle ABC = 60°$, $BC = a$.



Рыс. 325



Рыс. 326

319. Праз гіпатэнузу AB раўнабедранага прамавугольнага трохвугольніка ABC пад вуглом у 45° да яго плоскасці праведзена плоскасць γ, адлеглая ад вяршыні прамога вугла C на l (рыс. 326). Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC.

320. Большы катэт прамавугольнага трохвугольніка з вострым вуглом і гіпатэнузай, адпаведна роўнымі 30° і c, ляжыць у плоскасці γ, якая з плоскасцю трохвугольніка складае вугал у 60°. Знайдзіце:
а) адлегласць ад вяршыні большага вострага вугла трохвугольніка да плоскасці γ;
б) вугал паміж гіпатэнузай і плоскасцю γ.

321. Знайдзіце адлегласць ад вяршыні прамога вугла прамавугольнага трохвугольніка з катэтамі, роўнымі 7 см і 24 см, да плоскасці, якая праходзіць праз гіпатэнузу і складае з плоскасцю трохвугольніка вугал у 30°.

322. Асновай прамой прызмы з'яўляецца трохвугольнік MNK, у якім $MN = NK = 25$ см, $MK = 14$ см. Праз старану MK праведзена плоскасць пад вуглом 30° да плоскасці асновы, якая перасякае супрацьлеглы бакавы кант у пункце L. Знайдзіце:
а) адрэзак NL бакавога канта;
б) плошчу атрыманага сячэння.

323. Праз старану CE трохвугольніка CDE, у якога $CD = 9$ м, $DE = 6$ м і $CE = 5$ м, праходзіць плоскасць ρ, якая складае з плоскасцю трохвугольніка вугал у 45°. Знайдзіце адлегласць да плоскасці ρ ад вяршыні D.

324. Кант CD трохвугольнай піраміды $ABCD$ перпендыкулярны плоскасці ABC, $AB = BC = AC = 6$ і $BD = 3\sqrt{7}$. Знайдзіце двухгранныя вуглы $DACB$, $DABC$, $BDCA$.

325. Знайдзіце двухгранны вугал $ABCD$ трохвугольнай піраміды $ABCD$, улічыўшы, што вуглы DAB, DAC і ACB прамыя, $AC = CB = 5$ і $DB = 5\sqrt{5}$.

326*. Праекцыяй прамавугольніка $ABCD$ на плоскасць ω з'яўляецца квадрат ABC_1D_1. Знайдзіце вугал паміж плоскасцю ω і плоскасцю прамавугольніка $ABCD$, улічыўшы, што $AB : BC = 1 : 2$.

327*. Паралельныя прамыя AB і CD ляжаць у розных гранях двухграннага вугла, роўнага 60°, а іх пункты A і D адлеглыя ад канта гэтага вугла адпаведна на 16 см і 13 см. Знайдзіце адлегласць паміж прамымі AB і CD.

328. З пунктаў A і B канта двухграннага вугла, роўнага 120°, у розных яго гранях узведзены перпендыкуляры AC і BD да канта. Знайдзіце адрэзак CD, улічыўшы, што $AB = AC = BD = a$.

329. Бакавыя канты трохвугольнай піраміды ўзаемна перпендыкулярныя, а іх даўжыня роўная l. Знайдзіце косінус вугла, утворанага плоскасцю бакавой грані з плоскасцю асновы.

330. З пунктаў C і D канта двухграннага вугла, роўнага 120°, у розных яго гранях узведзены перпендыкуляры CK і DL. Знайдзіце даўжыню адрэзка KL, улічыўшы, што $CK = 3$ см, $DL = 5$ см, $CD = 24$ см.

331. У розных гранях двухграннага вугла з пунктаў M і N яго канта да гэтага канта ўзведзены перпендыкуляры MA і NB. Вызначце адлегласць AB, улічыўшы, што:
а) двухгранны вугал прамы, $MN = 36$ см, $MA = 18$ см і $NB = 12$ см;
б) двухгранны вугал роўны 120°, $MN = 12$, $MA = 8$, $NB = 4$;
в) двухгранны вугал роўны 120°, $MN = MA = NB = x$.

332. Старана IJ трохвугольніка IJK, у якога $IJ = JK = 9$ см, $IK = 12$ см, ляжыць у плоскасці ρ, а праекцыі дзвюх іншых старон трохвугольніка на гэту плоскасць адносяцца як $1 : 2$. Вызначце велічыню двухграннага вугла, што ўтвораны плоскасцямі ρ і IJK.

333. Знайдзіце двухгранны вугал, утвораны дзвюма бакавымі гранямі чатырохвугольнай піраміды, асновай якой з'яўляецца квадрат са стараной $20\sqrt{3}$ см, а бакавыя канты роўныя 30 см кожны.

334*. Правільныя трохвугольнікі ABC і DBC размешчаны так, што вяршыня D праектуецца ў цэнтр трохвугольніка ABC. Знайдзіце вугал паміж плоскасцямі гэтых трохвугольнікаў.

335*. Адрэзак EL, які злучае вяршыню E трохвугольніка CDE з вяршыняй L трохвугольніка CDL, перпендыкулярны плоскасці гэтага трохвугольніка. Дакажыце, што плошча трохвугольніка CDE роўная $S \cdot \cos \varphi$, дзе S — плошча трохвугольніка CDL, φ — вугал паміж плоскасцямі CDL і CDE.

336*. У трохвугольнай пірамідзе ўсе канты роўныя. Знайдзіце двухгранныя вуглы гэтай піраміды.

337*. У трохвугольнай пірамідзе ўсе канты асновы роўныя a, а ўсе бакавыя канты — b. Знайдзіце двухгранныя вуглы гэтай піраміды.

338*. У чатырохвугольнай пірамідзе ўсе канты роўныя. Знайдзіце двухгранныя вуглы гэтай піраміды.

339*. У чатырохвугольнай пірамідзе ўсе канты асновы роўныя a, а ўсе бакавыя канты — b. Знайдзіце двухгранныя вуглы гэтай піраміды.

340. Ці праўдзіцца сцверджанне пра тое, што праз дадзены пункт можна правесці плоскасць, перпендыкулярную дадзенай плоскасці? Колькі існуе такіх плоскасцей?

341. Ці праўдзіцца сцверджанне пра тое, што плоскасць лінейнага вугла двухграннага вугла перпендыкулярная кожнай яго грані?

342. Прамая a не перпендыкулярная да плоскасці α. Дакажыце, што існуе плоскасць, якая змяшчае прамую a і перпендыкулярная плоскасці α.

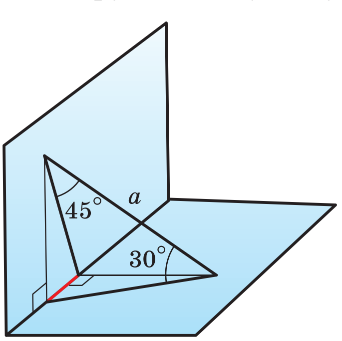
343. Агульная старана AB трохвугольнікаў ABC і ABD роўная 10 см. Плоскасці гэтых трохвугольнікаў узаемна перпендыкулярны. Знайдзіце CD, улічыўшы, што трохвугольнікі:

а) роўнастароннія;

б) прамавугольныя раўнабедраныя з гіпатэнузай AB.

344. Адрэзак даўжынёй a з канцамі на дзвюх перпендыкулярных плоскасцях утварае з адной з іх вугал у 45°, а з другой — вугал у 30° (рыс. 327). Знайдзіце частку лініі перасячэння плоскасцей, заключаную паміж перпендыкулярамі, апушчанымі на яе з канцоў адрэзка.

345. Ёсць піраміда, у аснове якой ляжыць правільны шасцівугольнік са стараной 12 дм, а ўсе бакавыя канты роўныя 24 дм. Праз сярэдзіны дзвюх сумежных старон асновы праведзена плоскасць, перпендыкулярная да асновы. Знайдзіце плошчу сячэння.



Рыс. 327

Прасторавае мадэляванне

Асобным відам паралельнага праектавання, што прымяняецца ў геаметрыі для адлюстравання прасторавых фігур, з'яўляецца артаганальнае праектаванне.

Артаганальнай праекцыяй пункта на плоскасць α называецца пункт перасячэння з гэтай плоскасцю прамой, што праходзіць праз дадзены пункт перпендыкулярна плоскасці α.

Артаганальнай праекцыяй фігуры на плоскасць называецца мноства артаганальных праекцый усіх пунктаў гэтай фігуры на плоскасць.

а) Знайдзіце плошчу артаганальнай праекцыі трохвугольніка з плошчай S на плоскасць α, улічыўшы, што адна з яго старон ляжыць у плоскасці α, а вугал нахілу плоскасці трохвугольніка да плоскасці α роўны β ($0° < \beta < 90°$) (рыс. 328).

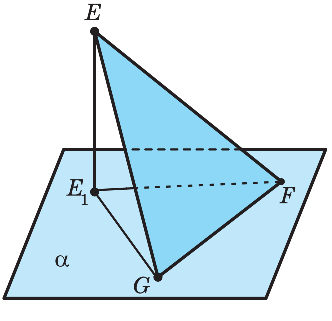
б) Рашыце папярэднюю задачу, улічыўшы, што трохвугольнік не мае з плоскасцю α агульных пунктаў і адна са старон трохвугольніка паралельная плоскасці α (рыс. 329).

в*) Знайдзіце плошчу артаганальнай праекцыі многавугольніка з плошчай S на плоскасць α, улічыўшы, што вугал нахілу плоскасці многавугольніка да плоскасці α роўны β ($0° < \beta < 90°$).

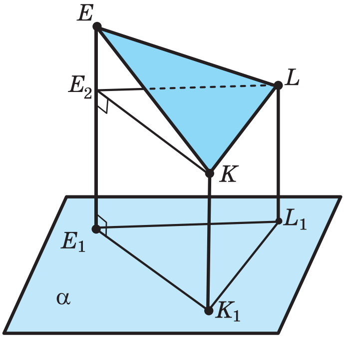
г*) Выкарыстаўшы вынікі рашэння задач *а–в*, дакажыце *прасторавую тэарэму Піфагора*: «Калі ўсе плоскія вуглы пры адной вяршыні тэтраэдра прамыя, то квадрат плошчы грані, супрацьлеглай гэтай вяршыні, роўны суме квадратаў плошчаў астатніх граняў» (рыс. 330).

Калі $AJIK$ — трохвугольная піраміда, $AJ \perp IJ$, $AJ \perp JK$ і $JI \perp KJ$,

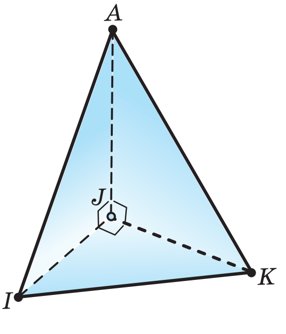
$$\text{то } S_{AIK}^2 = S_{AIJ}^2 + S_{AKJ}^2 + S_{IJK}^2.$$



Рыс. 328



Рыс. 329



Рыс. 330

Дадатковыя заданні да раздзела 3

346. Ёсць трохвугольная піраміда $SABC$, усе канты якой роўныя адзін аднаму. На кантах SC, SB, CB пазначаны іх сярэдзіны U, V, Y адпаведна, а на канце SA — адвольны пункт X. Вызначце:

а) ці перпендыкулярныя прамыя UV і YX;

б) вугал паміж прамымі UV і AY.

347. Адрэзкі AE і CF — вышыні трохвугольніка ABC, а адрэзак DK — перпендыкуляр да плоскасці ABC. Дакажыце, што прамыя KD і AC перпендыкулярныя.

348. Канты BC і AD трохвугольнай піраміды $ABCD$ перпендыкулярныя. Дакажыце, што кант AD перпендыкулярны адной з сярэдніх ліній грані ABC.

349. Два роўныя кругі маюць адзіны агульны пункт A, праз які праходзяць дыяметры AB і AC гэтых кругоў, прычым гэтыя дыяметры не ляжаць на адной прамой. Вызначце, ці перпендыкулярная плоскасці ABC лінія перасячэння плоскасцей, у якіх ляжаць гэтыя кругі. Ці зменіцца вынік, калі кругі не будуць роўнымі?

350. У якім выпадку праз адну з дзвюх скрыжаваных прамых можна правесці плоскасць, перпендыкулярную другой прамой?

351. Пункты A, B, C, D з'яўляюцца сярэдзінамі кантаў TZ, XY, YZ, Y_1Z_1 прамавугольнага паралелепіпеда $TXYZT_1X_1Y_1Z_1$, у аснове якога ляжыць квадрат. Вызначце:

а) ці перпендыкулярная прамая YA плоскасці сячэння XX_1DC;

б) ці перпендыкулярная прамая TB плоскасці XX_1D;

в) вугал паміж прамымі AY і XD.

352. Ёсць прамавугольны трохвугольнік ABC, адзін катэт якога і прылеглы да яго востры вугал роўныя m і β. З вяршыні прамога вугла C узведзены перпендыкуляр CD, роўны n. Знайдзіце адлегласць ад пункта D да прамой AB.

353. Канцы A і B адрэзкаў AA_1 і BB_1 належаць плоскасці α, а самі адрэзкі ёй перпендыкулярныя і размешчаны па адзін бок ад плоскасці. Знайдзіце вуглы чатырохвугольніка AA_1B_1B, улічыўшы, што:

а) $AA_1 = BB_1$;

б) $A_1B_1 = 2\ AB$;

в) $A_1B_1 : AB = 3 : 2$.

354. Вымярэнні AB, BC і CC_1 прамавугольнага паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ роўныя a, b і c адпаведна. Знайдзіце вугал паміж прамымі:

а) AC і BB_1; б) A_1D і C_1A.

355. У правільнай шасцівугольнай прызме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ усе канты роўныя a. Знайдзіце вугал паміж прамой AB і прамой:

а) B_1C_1; в) A_1D_1; д) F_1E_1;
б) B_1D_1; г) C_1D_1; е) D_1F_1.

356. З вяршыні A трохвугольніка ABC узведзены перпендыкуляр AM, і пункт M злучаны з сярэдзінай D стараны BC. Дакажыце, што:

а) прамыя MD і BC перпендыкулярныя, улічыўшы, што стораны AB і AC роўныя;

б) стораны AB і AC роўныя, улічыўшы, што прамыя MD і BC перпендыкулярныя.

357. Катэт AB прамавугольнага трохвугольніка ABC ляжыць у плоскасці γ. Дакажыце, што плоскасць, якая праходзіць праз другі катэт і яго праекцыю на плоскасць γ, перпендыкулярная прамой AB.

358. Дакажыце, што вугал паміж прамой і плоскасцю ёсць найменшы з вуглоў, якія ўтварае гэта прамая з усімі прамымі плоскасці, што праходзяць праз пункт перасячэння прамой з плоскасцю.

359. Катэт AB прамавугольнага трохвугольніка ABC ляжыць у плоскасці α. Дакажыце, што плоскасць, якая праходзіць праз другі катэт і яго праекцыю на плоскасць α, перпендыкулярная прамой AB.

360. У правільнай шасцівугольнай прызме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ усе канты роўныя a. Знайдзіце адлегласці паміж прамой AB і прамой:

а) CD; в) A_1B_1; д) FC;
б) DE; г) D_1E_1; е) F_1C_1.

361. Асновай прамавугольнага паралелепіпеда з'яўляецца прамавугольнік з вымярэннямі 5 см і 12 см, а дыяганаль паралелепіпеда роўная 13 см. Знайдзіце трэцяе вымярэнне паралелепіпеда.

362. У правільнай шасцівугольнай прызме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ усе канты роўныя a. Знайдзіце адлегласці паміж прамой AB і прамой:

а) B_1C_1; в) A_1D_1; д) F_1E_1;
б) B_1D_1; г) C_1D_1; е) D_1F_1.

363. У правільнай трохвугольнай пірамідзе $QABC$ плоскі вугал AQB пры вяршыні роўны 30°. Знайдзіце двухгранны вугал пры бакавым канце.

364. Плоскасці квадрата $KMNP$ і ромба $KMDF$ перпендыкулярныя. Знайдзіце FN, улічыўшы, што старана ромба і вугал KMD адпаведна роўныя a і 60°.

365. Ёсць піраміда, у аснове якой ляжыць правільны шасцівугольнік са стараной 6 см, а ўсе бакавыя канты роўныя 12 см. Праз сярэдзіны дзвюх сумежных старон асновы праведзена плоскасць, перпендыкулярная да яе. Знайдзіце плошчу сячэння.

Праверце свае веды

1. Праекцыяй прамой на плоскасць можа быць:

а) пункт; б) прамая; в) адрэзак.

2. Ёсць трохвугольная піраміда $SABC$, усе канты якой роўныя адзін аднаму. На кантах SC, SB, CB пазначаны сярэдзіны U, V, Y адпаведна, а на канце SA — адвольны пункт X. Вызначце, ці перпендыкулярныя прамыя SA і UV.

3. Ёсць трохвугольная піраміда $SABC$, усе канты якой роўныя адзін аднаму. На кантах SC, SB, CB пазначаны сярэдзіны U, V, Y адпаведна, а на канце SA — адвольны пункт X. Вызначце вугал паміж прамымі UV і AY.

4. Вымярэнні AB, BC і CC_1 прамавугольнага паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ роўныя a, b і c адпаведна. Знайдзіце вугал паміж прамымі AB_1 і CD_1.

5. З цэнтра O акружнасці, умежанай у раўнабедраны трохвугольнік ABC з асновай BC і бакавой стараной AB, адпаведна роўнымі 18 см і 15 см, узведзены перпендыкуляр OX, роўны 6 см. Знайдзіце адлегласці пункта X ад старон трохвугольніка.

6. На плоскасці δ праведзены дзве паралельныя прамыя MN і KL, адлеглыя адна ад адной на a, а па-за плоскасцю δ выбраны пункт C, адлеглы ад MN на b і ад KL на c. Знайдзіце адлегласць ад пункта C да плоскасці δ, улічыўшы, што $a = 6$, $b = 25$, $c = 29$.

7. З вяршыні большага вугла трохвугольніка са старанамі 20 см, 34 см і 42 см узведзены перпендыкуляр да плоскасці гэтага трохвугольніка даўжынёй 30 см. Знайдзіце адлегласць ад яго канцоў да большай стараны трохвугольніка.

8. Асновай піраміды служыць трохвугольнік са старанамі 13 см, 14 см, 15 см. Бакавы кант насупраць сярэдняй па велічыні стараны асновы перпендыкулярны плоскасці асновы і роўны 16 см. Знайдзіце велічыні двухгранных вуглоў пры аснове гэтай піраміды.

9. У трохвугольнай пірамідзе ўсе канты асновы роўныя a, а ўсе бакавыя канты — b. Знайдзіце адлегласць паміж бакавым кантам і кантам асновы, якія не ляжыць з ім у адной плоскасці.

10. Перпендыкуляры, апушчаныя з пунктаў C і D, узятых у розных перпендыкулярных плоскасцях, на лінію іх перасячэння, адпаведна роўныя c і d, а адлегласць паміж іх асновамі роўная l. Знайдзіце адрэзак CD і яго праекцыі на кожную з плоскасцей.