## § 1. Пространственные фигуры

**А)** Геометрические фигуры делятся на **плоские** и **пространственные** в зависимости от того, все или не все точки фигуры принадлежат одной плоскости. Плоские фигуры вы изучали в предыдущих классах, там познакомились и с некоторыми пространственными фигурами — призмой (рис. 1), пирамидой (рис. 2), цилиндром (рис. 3), конусом (рис. 4), шаром (рис. 5). Раздел геометрии, в котором изучаются плоские фигуры, называется *планиметрией*, а раздел, в котором изучаются пространственные фигуры, — *стереометрией*.

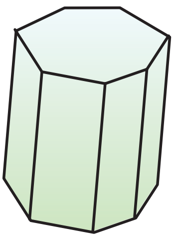


Рис. 1

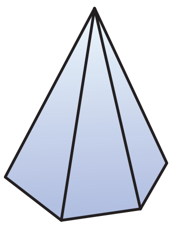


Рис. 2

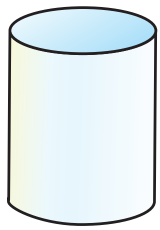


Рис. 3

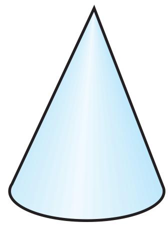


Рис. 4

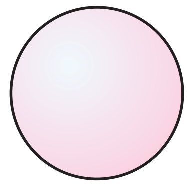


Рис. 5

Ту или иную пространственную фигуру приходится изображать на плоскости листа в тетради или на плоскости доски. Соответствующий рисунок выполняют таким образом, чтобы он создавал то же впечатление, что и сама изображаемая фигура. При этом невидимые линии делают *штриховыми*.

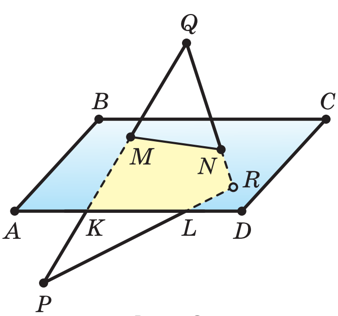



Рис. 6

На рисунке 6 изображены параллелограмм $ABCD$ и треугольник $PQR$, которые пересекаются по отрезку $MN$. Часть $QMN$ треугольника $PQR$ находится над параллелограммом $ABCD$, часть $PMNR$ — под ним. При этом часть $PKL$ четырёхугольника $PMNR$ видна, а часть $KMNRL$ — не видна. Обращаем внимание на то, что точки $K$ и $L$ треугольника $PQR$ не принадлежат параллелограмму $ABCD$, а значит, и его стороне $AD$.

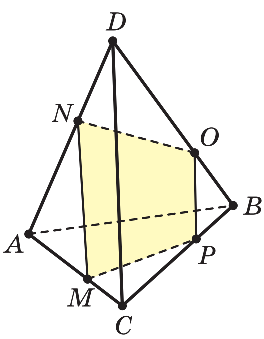



Рис. 7

На рисунке 7 изображена треугольная пирамида $DABC$, которую пересекает плоскость по четырёхугольнику $MNOP$. При этом у пирамиды невидимым является ребро $AB$, а у сечения $MNOP$ — его стороны $NO$ и $MP$.

Представление пространственной фигуры на рисунке называют **изображением фигуры**.

Важным классом пространственных фигур являются **многогранники**, под которыми понимают тела, ограниченные плоскими многоугольниками.

Эти многоугольники называются **гранями** многогранника, их вершины — **вершинами** многогранника, а стороны — **рёбрами** многогранника.

Отрезок, соединяющий две вершины многогранника, не принадлежащие одной грани, называется **диагональю** многогранника (рис. 8).

Многогранник называется *выпуклым*, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой своей грани. На рисунке 9 изображён невыпуклый многогранник.

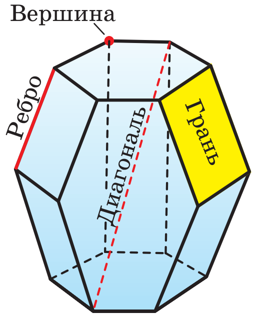


Рис. 8

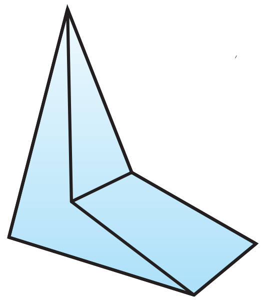


Рис. 9

**Б)** Мы будем изучать простейшие выпуклые многогранники — призмы и пирамиды.

**Призмой** называется многогранник, две грани которого — равные $n$-угольники, а остальные $n$ граней — параллелограммы.

Равные грани-многоугольники призмы называются её **основаниями**, а остальные грани — **боковыми гранями**. Рёбра боковых граней, не принадлежащие основаниям, называются **боковыми рёбрами** (рис. 10).

В зависимости от количества сторон основания призмы отличают **треугольную**, **четырёхугольную**, **пятиугольную** и т. д. призмы. На рисунке 11 изображена шестиугольная призма.

Совокупность боковых граней призмы образуют **боковую поверхность**.

Площадь боковой поверхности призмы равна сумме площадей боковых граней.

Призмы разделяются на *прямые* и *наклонные*.

*Прямая* призма — призма, боковые грани которой являются прямоугольниками. Обычно, изображая прямую призму, её боковые рёбра проводят вертикально (рис. 12).

Призма *прямая*, если боковые рёбра перпендикулярны рёбрам основания призмы.

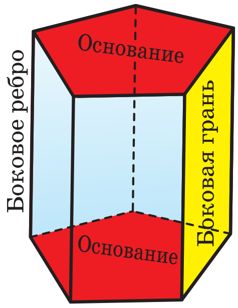


Рис. 10

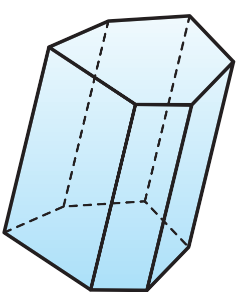


Рис. 11

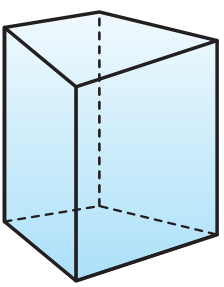


Рис. 12

Призма *наклонная*, если боковые рёбра не перпендикулярны рёбрам основания призмы.

Прямая призма называется **правильной**, если её основания являются правильными многоугольниками.

Призма, основаниями которой являются параллелограммы, называется **параллелепипедом.**

Параллелепипед, как и призма, может быть и прямым (рис. 13), и наклонным (рис. 14).

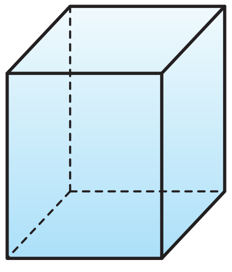


Рис. 13

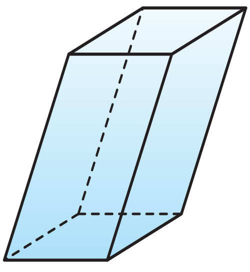


Рис. 14

Прямой параллелепипед, основания которого являются прямоугольниками, называется **прямоугольным параллелепипедом.**

Все грани прямоугольного параллелепипеда являются прямоугольниками.

Три ребра прямоугольного параллелепипеда, сходящиеся в одной вершине, называются **измерениями** прямоугольного параллелепипеда.

Прямоугольный параллелепипед с равными измерениями называется **кубом.**

Все грани куба — равные друг другу квадраты.

**В) Пирамидой** называется многогранник, одна грань которого — многоугольник, а остальные являются треугольниками с общей вершиной.

На рисунке 15 изображена пирамида $TABCDE$. Многоугольник $ABCDE$ называют **основанием пирамиды**, треугольные грани $ATB$, $BTC$, $CTD$, $DTE$, $ETA$ — **боковыми гранями**, а общую вершину $T$ боковых граней — **вершиной пирамиды.** Обычно в записи обозначения пирамиды первая буква соответствует её вершине.

В зависимости от количества сторон основания пирамиды отличают **треугольную, четырёхугольную, пятиугольную** и т. д. пирамиды. Пирамида на рисунке 15 — пятиугольная, а на рисунке 16 — треугольная.

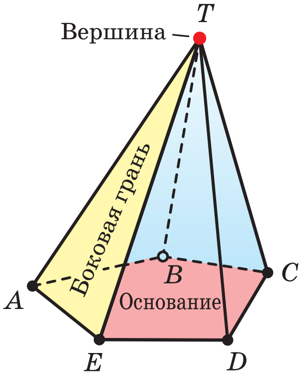



Рис. 15

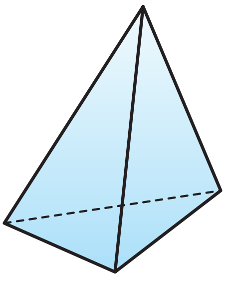


Рис. 16

Пирамида, основание которой — правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий её вершину с центром основания, перпендикулярен любой прямой, проведённой в плоскости основания через этот центр, называется **правильной**.

Высота боковой грани правильной пирамиды, опущенная из вершины пирамиды, называется **апофемой** пирамиды.

На рисунке 17 изображена правильная четырёхугольная пирамида $APQRS$, отрезок $AB$ — одна из её апофем.

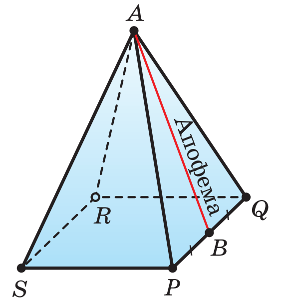


Рис. 17

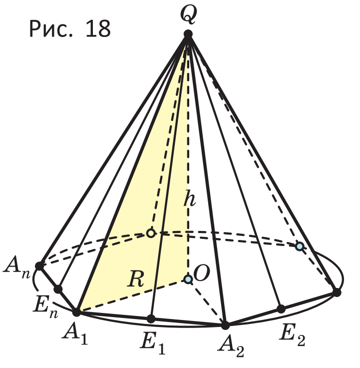
**Теорема 1. У правильной пирамиды равны её: а) боковые грани; б) апофемы.**

**Доказательство.** Пусть $QA_1A_2...A_n$ — правильная пирамида и точка $O$ — центр её основания (рис. 18).

а) Поскольку треугольники $QOA_1$ и $QOA_2$ оба прямоугольные, имеют общий катет $QO$ и равные катеты $OA_1$ и $OA_2$, то они равны. Поэтому равны и их гипотенузы $QA_1$ и $QA_2$. Аналогично доказывается, что другие боковые рёбра также равны $QA_1$.

Боковые грани пирамиды — равнобедренные треугольники с равными боковыми сторонами. Основания этих треугольников также равны друг другу как стороны правильного многоугольника, который лежит в основании пирамиды. Поэтому боковые грани равны между собой по трём сторонам.

б) Поскольку боковые грани пирамиды $QA_1A_2...A_n$ равны между собой, то равны и их высоты, проведённые из вершины $Q$, это значит, что все апофемы пирамиды $QA_1A_2...A_n$ равны.

Рис. 18



**Теорема 2. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению полупериметра её основания и апофемы.**

**Доказательство.** Пусть $QA_1A_2...A_n$ — правильная пирамида (см. рис. 18). Площадь $S$ её боковой поверхности состоит из площадей боковых граней, которые являются равными друг другу равнобедренными треугольниками с равными апофемами $QE_1$, $QE_2$, ..., $QE_n$. Поэтому

$$S = S_{A_1QA_2} + S_{A_2QA_3} + ... + S_{A_nQA_1} = \frac{1}{2}A_1A_2 \cdot QE_1 + \frac{1}{2}A_2A_3 \cdot QE_2 + ... +$$

$$+ \frac{1}{2}A_nA_1 \cdot QE_n = \frac{1}{2}QE_1 \cdot (A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_nA_1) =$$

$$= \frac{A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_nA_1}{2} \cdot QE_1 = p \cdot a,$$

где $p$ — полупериметр основания пирамиды, $a$ — апофема пирамиды.

**Г)** Ещё один класс пространственных фигур составляют тела вращения, к которым относятся цилиндр, конус, шар.

**Цилиндром** называется тело, полученное вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон (рис. 19). При этом вращении одна сторона прямоугольника остаётся неподвижной, её называют *осью цилиндра*. Сторона, противолежащая оси, образует поверхность, которую называют боковой поверхностью цилиндра, а саму сторону — *образующей цилиндра*. Ещё две стороны прямоугольника при вращении образуют поверхности, которые являются равными кругами, эти круги называют *основаниями цилиндра* (рис. 20). На рисунке 21 дано изображение цилиндра.

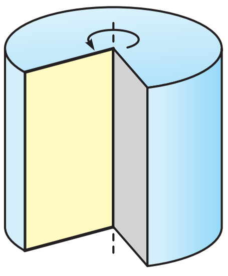


Рис. 19

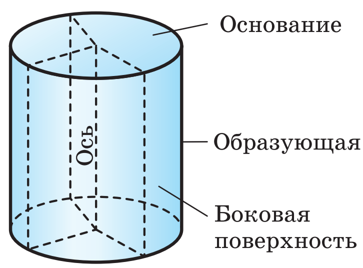



Рис. 20

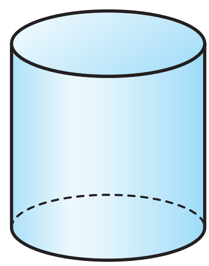


Рис. 21

**Конусом** называется тело, полученное вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов (рис. 22), который называют *осью конуса*. Второй катет описывает круг, который называют *основанием конуса*; неподвижную вершину треугольника, которая не принадлежит основанию, называют *вершиной конуса*. Гипотенуза при вращении образует поверхность, которую называют *боковой поверхностью конуса*, саму гипотенузу называют *образующей конуса* (рис. 23). На рисунке 24 дано изображение конуса.

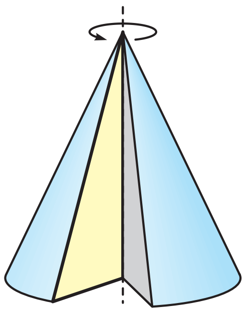


Рис. 22

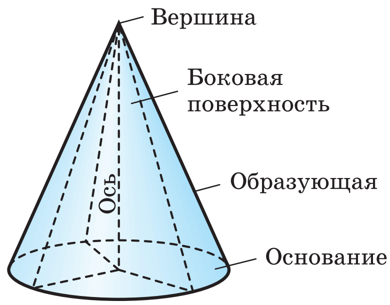



Рис. 23

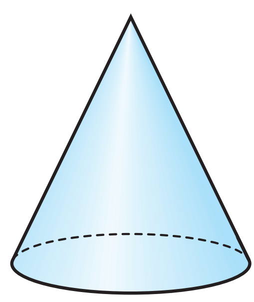


Рис. 24

**Шаром** называется тело, полученное вращением круга вокруг своего диаметра (рис. 25). При этом вращении окружность описывает поверхность, которую называют *сферой* (рис. 26). На рисунке 27 дано изображение шара.

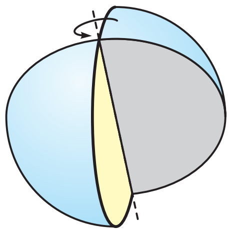


Рис. 25

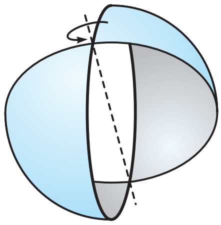


Рис. 26

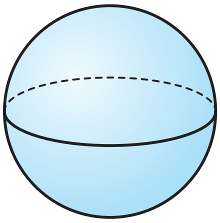


Рис. 27

**?**

**1.** Какие геометрические фигуры называются плоскими; пространственными?
**2.** Какое тело называют многогранником?
**3.** Что называют гранями многогранника; рёбрами многогранника; вершинами многогранника?
**4.** Какой многогранник называется призмой?
**5.** Что называют основаниями призмы; боковыми гранями призмы; боковыми рёбрами призмы?
**6.** Какая призма называется прямой призмой; наклонной призмой?
**7.** Какая призма называется правильной призмой?
**8.** Какая призма называется параллелепипедом; прямым параллелепипедом?
**9.** Какой прямой параллелепипед называется прямоугольным параллелепипедом?
**10.** Какие рёбра прямоугольного параллелепипеда называются его измерениями?
**11.** Какой многогранник называется пирамидой?
**12.** Что называют основанием пирамиды; боковыми гранями пирамиды; вершиной пирамиды?
**13.** Какая пирамида называется правильной пирамидой?
**14.** Какой отрезок называется апофемой правильной пирамиды?
**15.** Сформулируйте свойство боковых рёбер правильной пирамиды; боковых граней правильной пирамиды; апофем правильной пирамиды.
**16.** Чему равна площадь боковой поверхности правильной пирамиды?
**17.** Какое тело называется цилиндром?
**18.** Какое тело называется конусом?
**19.** Какое тело называется шаром?
**20.** Верно ли, что:
а) количество вершин любой призмы — число чётное;
б) количество рёбер любой призмы — число, кратное трём?
**21.** Найдите количество диагоналей семиугольной призмы.
**22.** Существует ли пирамида, которая имеет 11 рёбер? Обоснуйте свой ответ.

**Задача 1.** Найдите площадь боковой поверхности прямой четырёхугольной призмы, в основании которой лежит прямоугольник с измерениями 4 см и 5 см, а боковое ребро равно 6 см.

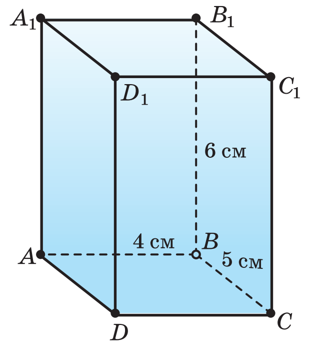


Рис. 28

Решение. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая призма; $ABCD$ — прямоугольник, $AB = 4$ см, $BC = 5$ см, $BB_1 = 6$ см (рис. 28).

$ABB_1A_1, CBB_1C_1, CDD_1C_1, ADD_1A_1$ — прямоугольники ($ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая призма), поэтому $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = 6$ см.

$S_{ABB_1A_1} = AB \cdot BB_1 = 4 \cdot 6 = 24$ (см$^2$), так как $AB = CD$, $BB_1 = CC_1$.

$S_{CBB_1C_1} = CB \cdot BB_1 = 5 \cdot 6 = 30$ (см$^2$), так как $AD = BC$, $AA_1 = CC_1$.

Значит, $S_{бок} = S_{ABB_1A_1} + S_{DCC_1D_1} + S_{CBB_1C_1} + S_{ADD_1A_1} = 2 \cdot \left(S_{ABB_1A_1} + S_{CBB_1C_1}\right) =$

$$= 2 \cdot (24 + 30) = 108 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 108 см$^2$.

Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра её основания и бокового ребра. Докажите это самостоятельно.

**Задача 2.** Боковая поверхность правильной четырёхугольной пирамиды равна 240 см$^2$, а её апофема — 12 см. Найдите площадь основания пирамиды.

Решение. Пусть $SABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида; $S_{бок} = 240$ см$^2$; $SH$ — апофема; $SH = 12$ см (рис. 29).

$S_{бок} = \frac{1}{2} P_{ABCD} \cdot SH$, так как пирамида правильная, поэтому

$$240 = \frac{1}{2} \cdot P_{ABCD} \cdot 12. \text{ Тогда } P_{ABCD} = 2 \cdot 240 : 12 = 40 \text{ (см)},$$

$$AB = 40 : 4 = 10 \text{ (см), так как } ABCD \text{ — квадрат.}$$

$$S_{ABCD} = AB^2 = 10^2 = 100 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 100 см$^2$.

Площадь боковой поверхности пирамиды равна сумме площадей её боковых граней.

**Задача 3.** Апофема правильной четырёхугольной пирамиды равна 30 см, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, — 24 см. Найдите боковую поверхность пирамиды.

Решение. Пусть $SABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида, $SH$ — апофема, $SH = 30$ см, $O$ — центр основания $ABCD$, $SO = 24$ см (см. рис. 29).

$OH = \sqrt{SH^2 - SO^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18$ (см), так как $SO \perp OH$, $AB = 2 \cdot OH = 2 \cdot 18 = 36$ (см), так как $ABCD$ — квадрат, $P_{ABCD} = 4 \cdot AB = 4 \cdot 36 = 144$ (см).

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}P_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{2} \cdot 144 \cdot 30 = 2160 \text{ (см}^2\text{)},$$

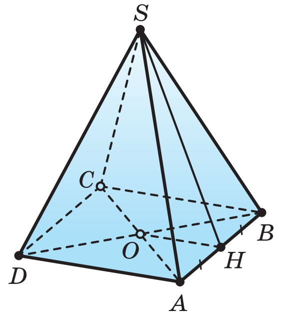


Рис. 29

так как пирамида правильная.

Ответ: 2160 см$^2$.

В правильной пирамиде отрезок, соединяющий центр основания пирамиды с основанием апофемы пирамиды, — радиус окружности, вписанной в основание пирамиды. Докажите это самостоятельно.

**Задача 4.** Сторона основания $AB$ правильной треугольной пирамиды $MABC$ равна $6\sqrt{3}$ см, а отрезок, который соединяет вершину $M$ пирамиды с центром $O$ основания, — 8 см. Найдите:
а) боковые рёбра пирамиды;
б) боковую поверхность пирамиды;
в) полную поверхность пирамиды.

Решение. Пусть $MABC$ — правильная треугольная пирамида, $AB = 6\sqrt{3}$ см, $O$ — центр основания $ABC$, $MO = 8$ см (рис. 30).

а) $OA = \dfrac{AB\sqrt{3}}{3} = \dfrac{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{3} = 6$ (см), так как $OA$ — радиус окружности, описанной около правильного треугольника $ABC$.

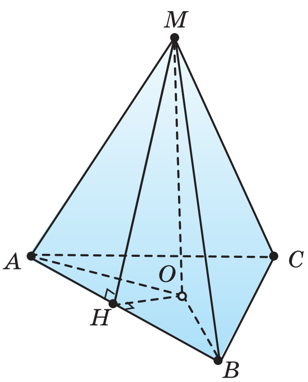


Рис. 30

$MA = \sqrt{MO^2 + OA^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ (см), так как $MO \perp OA$.

$MA = MB = MC = 10$ (см), так как $MABC$ — правильная треугольная пирамида.

б) Пусть $MH$ — апофема. Тогда $H$ — середина $AB$ (в $\triangle\ AMB$ $MA = MB$ и $MH \perp AB$).

$OH \perp AB$ (медиана, проведённая к основанию равнобедренного треугольника $OAB$), поэтому $OH$ — радиус вписанной в $\triangle ABC$ окружности и $OH = \frac{OA}{2} = \frac{6}{2} = 3$ (см).

$MH = \sqrt{MO^2 + OH^2} = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73}$ (см), так как $MO \perp OH$.

$$P_{ABC} = 3 \cdot AB = 3 \cdot 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3} \text{ (см)},$$

$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3} \cdot AB^2}{4} = \frac{\sqrt{3}(6\sqrt{3})^2}{4} = 27\sqrt{3}$ (см$^2$), так как $\triangle ABC$ — правильный.

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{ABC} \cdot MH = \frac{1}{2} \cdot 18\sqrt{3} \cdot \sqrt{73} = 9\sqrt{219} \text{ (см}^2\text{)}.$$

в) $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{ABC} = 9\sqrt{219} + 27\sqrt{3} = 9\sqrt{3}(\sqrt{73} + 3)$ (см$^2$).

Ответ: а) $MA = MB = MC = 10$ см; б) $S_{\text{бок}} = 9\sqrt{219}$ см$^2$;

в) $S_{\text{полн}} = 9\sqrt{3}\left(\sqrt{73} + 3\right)$ см$^2$.

Площадь полной поверхности пирамиды равна сумме площади боковой поверхности и площади основания.

**1.** Ответьте, какая — плоская или пространственная — ломаная изображена на рисунке:

а) 31; в) 33; д) 35;
б) 32; г) 34; е) 36.

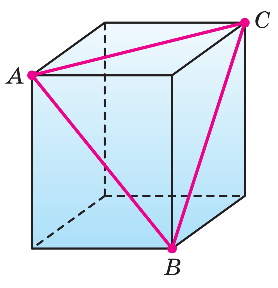



Рис. 31

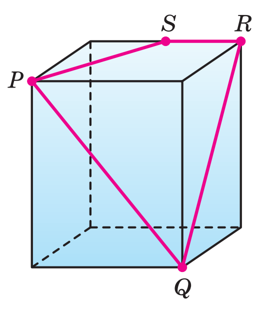



Рис. 32

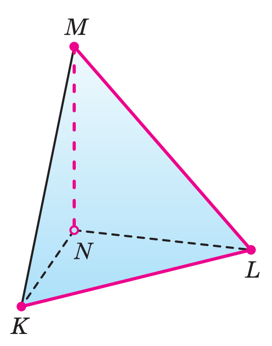



Рис. 33

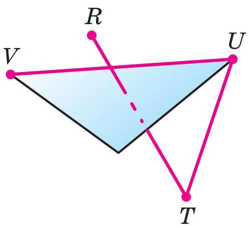



Рис. 34

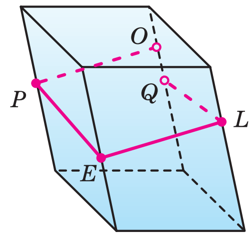



Рис. 35

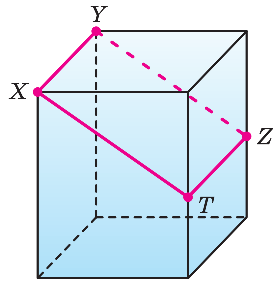



Рис. 36

**2.** Определите, является ли многогранником тело, изображённое на рисунке:
а) 37; б) 38; в) 39; г) 40; д) 41; е) 42.

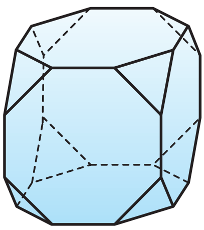


Рис. 37

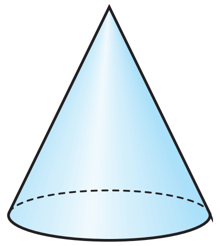


Рис. 38

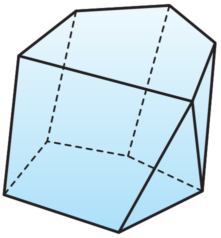


Рис. 39

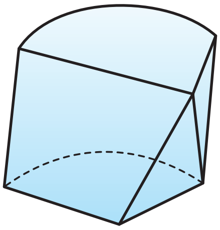


Рис. 40

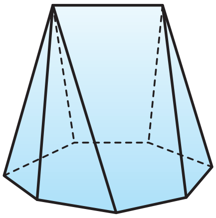


Рис. 41

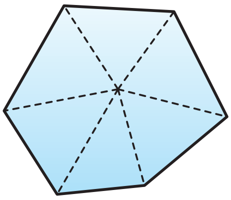


Рис. 42

**3.** На рисунке 43 изображён многогранник $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Назовите:

а) грани с общим ребром $CD$;

б) грани с общим ребром $DD_1$;

в) грани с общей вершиной $E$;

г) грани с общей вершиной $C_1$;

д) рёбра с общей вершиной $A$;

е) рёбра с общей вершиной $F_1$.

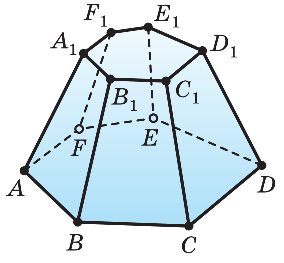



Рис. 43

**4.** На рисунке 44 изображена пятиугольная призма $UVWXYU_1V_1W_1X_1Y_1$ и её диагональ $UX_1$. Назовите другие диагонали этого многогранника.

**5.** На рисунке 45 изображена четырёхугольная призма. Назовите:
а) основания призмы;
б) боковые грани с ребром $EE_1$;
в) грани с ребром $DE$.

**6.** Сторона основания правильной треугольной призмы равна 6 см, а боковое ребро — 11 см. Найдите боковую и полную поверхности призмы.

**7.** Сторона основания правильной $n$-угольной призмы равна $a$, а её боковое ребро — $h$. Найдите боковую и полную поверхности призмы, учитывая, что:
а) $n = 3$, $a = 5$, $h = 10$;
б) $n = 4$, $a = 10$, $h = 30$;
в) $n = 6$, $a = 18$, $h = 32$.

**8.** Основанием прямой призмы является треугольник со сторонами 3 см и 5 см и углом между ними в 120°, а наибольшая из площадей боковых граней равна 35 см$^2$. Найдите полную поверхность призмы.

**9.** Основанием прямого параллелепипеда с боковым ребром 8 м является ромб с диагоналями 10 м и 24 м. Найдите боковую и полную поверхности параллелепипеда.

**10.** Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция с основаниями 25 см, 15 см и высотой 12 см. Найдите боковую поверхность призмы, учитывая, что её боковое ребро равно 20 см.

**11.** Сторона основания $ABC$ правильной треугольной пирамиды $MABC$ равна $10\sqrt{3}$ см, а отрезок, соединяющий вершину $M$ пирамиды с центром $O$ основания, — 12 см (рис. 46). Найдите:
а) апофему пирамиды;
б) боковую поверхность пирамиды;
в) полную поверхность пирамиды.

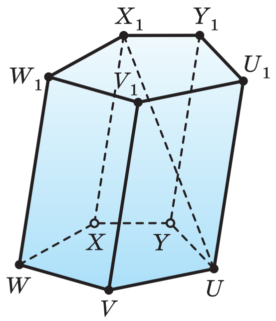


Рис. 44

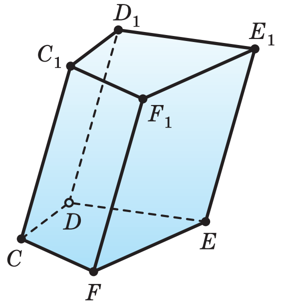


Рис. 45

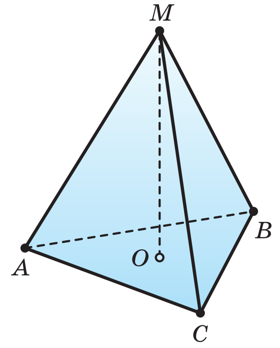


Рис. 46

**12.** Апофема правильной треугольной пирамиды равна 15 см, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, — 12 см. Найдите:

а) боковое ребро;
б) боковую поверхность пирамиды;
в) полную поверхность пирамиды.

**13.** Боковая поверхность правильной шестиугольной пирамиды равна 150 см$^2$, а её апофема — 10 см. Найдите площадь основания пирамиды.

**14.** Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 10 см, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, — $\sqrt{69}$ см. Найдите:

а) боковое ребро и апофему пирамиды;
б) боковую поверхность пирамиды;
в) полную поверхность пирамиды.

**15.** Апофема правильной шестиугольной пирамиды равна 26 см, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, — 10 см. Найдите:

а) боковое ребро и сторону основания пирамиды;
б) боковую поверхность пирамиды;
в) полную поверхность пирамиды.

**16.** Основанием пирамиды $QABCD$ является ромб $ABCD$ со стороной, равной 10 см, одна из диагоналей которого равна 16 см. Отрезок, соединяющий вершину $Q$ пирамиды с точкой $O$ пересечения диагоналей основания, перпендикулярен этим диагоналям и равен 14 см (рис. 47). Найдите:

а) боковые рёбра пирамиды;
б) боковую поверхность пирамиды.

**17.** Основанием пирамиды $REFGH$ является параллелограмм $EFGH$ со сторонами 10 см, 18 см и площадью 90 см$^2$. Отрезок, соединяющий вершину $R$ пирамиды с точкой $O$ пересечения диагоналей основания, перпендикулярен этим диагоналям и равен 6 см. Найдите:

а) боковые рёбра пирамиды;
б) боковую поверхность пирамиды;
в) полную поверхность пирамиды.

**18*.** Основанием пирамиды является параллелограмм со сторонами 8 м, 10 м и меньшей диагональю 6 м. Отрезок, соединяющий вершину пирамиды с точкой пересечения диагоналей

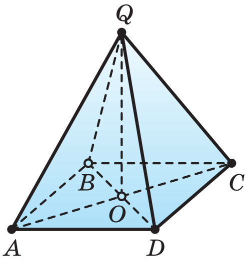


Рис. 47

основания, перпендикулярен этим диагоналям и равен 4 м. Найдите:

а) боковые рёбра пирамиды;

б) боковую поверхность пирамиды;

в) полную поверхность пирамиды.

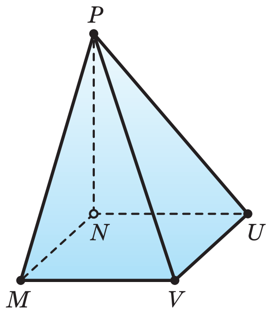



*Рис. 48*

**19*.** Основанием пирамиды $PMNUV$ является квадрат $MNUV$ (рис. 48). Боковое ребро $PN$ перпендикулярно каждой прямой плоскости основания, проходящей через точку $N$, углы $M$ и $U$ граней $PMV$ и $PUV$ прямые, а углы $M$ и $U$ граней $PMN$ и $PUN$ равны 45° каждый. Наибольшее боковое ребро равно 24 см. Найдите:

а) другие боковые рёбра пирамиды;

б) боковую поверхность пирамиды;

в) полную поверхность пирамиды.

**20*.** Основанием пирамиды является ромб со стороной 15 см и меньшей диагональю 18 см. Отрезок, соединяющий вершину пирамиды с точкой пересечения диагоналей, перпендикулярен им и равен 12 см. Найдите высоты граней пирамиды.

## Пространственное моделирование

**1.** Сделайте выкройку поверхности куба с ребром 5 см, предусмотрев полоски для склеивания (рис. 49), и склейте сам куб.

**2.** Какие из фигур, показанных на рисунке 50, являются развёртками куба?

**3.** Сделайте выкройку поверхности прямой призмы с боковым ребром 5 см, в основании которой находится трапеция со сторонами 6 см, 3 см, 3 см, 3 см, и склейте саму призму.

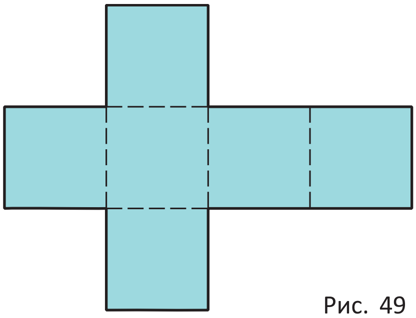


Рис. 49

а) б) в) г) д)

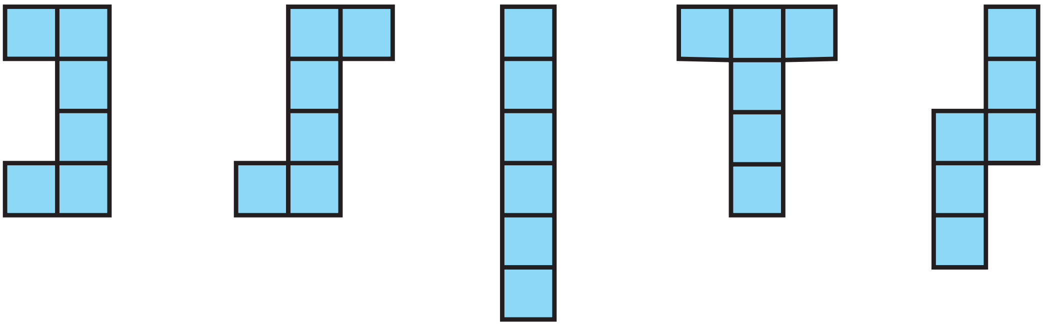


Рис. 50

**4.** Сделайте выкройку поверхности правильной четырёхугольной пирамиды (рис. 51), сторона основания которой равна 5 см, а боковое ребро — 7 см, и склейте саму пирамиду.

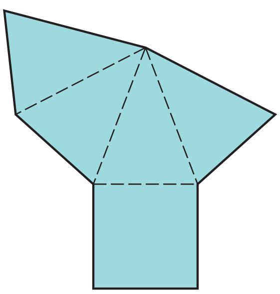


Рис. 51

Рис. 52

**5.** Сделайте выкройку поверхности пирамиды, стороны основания которой равны 4 см, 5 см и 7 см, а боковые рёбра — 7 см каждое, и склейте саму пирамиду.

**6.** Знак нулевого километра Беларуси установлен на Октябрьской площади столицы (рис. 52). Его моделью является правильная четырёхугольная пирамида, у которой соседние боковые рёбра взаимно перпендикулярны, а сторона основания равна 1 м 40 см. Какое количество материала потребуется для облицовки боковой поверхности пирамиды?

**7.** Может ли быть развёрткой пирамиды:

а) шестиугольник; в) ромб;
б) прямоугольник; г) треугольник?

## Изображение пространственных фигур

Чтобы получить изображение призмы, достаточно построить многоугольник — основание призмы. Из вершин основания провести прямые, параллельные некоторой фиксированной прямой, и отложить на них одинаковые отрезки. Соединив концы этих отрезков, получим многоугольник — изображение другого основания призмы.

Чтобы получить изображение пирамиды, достаточно построить изображение основания пирамиды, выбрать некоторую точку в качестве изображения вершины пирамиды и соединить её с вершинами многоугольника основания пирамиды.

Не каждый рисунок воспринимается нами как изображение реально существующей фигуры. Расхожее выражение «обман зрения» по сути является неверным. Глаза не могут обмануть нас, поскольку являются лишь промежуточным звеном между объектом и мозгом человека. Обман обычно возникает не из-за того, что мы видим, а из-за того, что неосознанно рассуждаем и непроизвольно ошибаемся.

Невозможные объекты представляют собой рисунки на двумерной плоскости, изображающие трёхмерные структуры, существование которых в реальном трёхмерном мире представляется невозможным. Классическим примером такой простой фигуры является невозможный треугольник Пенроуза (рис. 53). В этом треугольнике каждый угол сам по себе является возможным, но парадокс возникает тогда, когда мы рассматриваем его целиком. Стороны треугольника направлены одновременно и на зрителя, и от него, поэтому отдельные части треугольника не могут образовать реальный трёхмерный объект.

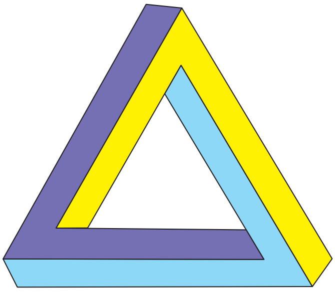


Рис. 53

Наш мозг интерпретирует рисунок на плоскости как трёхмерную модель. Сознание задаёт «глубину», на которой находится каждая точка рисунка. Наши представления о реальном мире сталкиваются с противоречием, с определённой непоследовательностью, и приходится делать некоторые допущения: прямые двумерные линии интерпретируются как прямые трёхмерные линии; двумерные параллельные линии интерпретируются как трёхмерные параллельные линии; острые и тупые углы интерпретируются как прямые углы в перспективе; внешние линии рассматриваются как граница формы, которая крайне важна для восприятия определённого изображения.

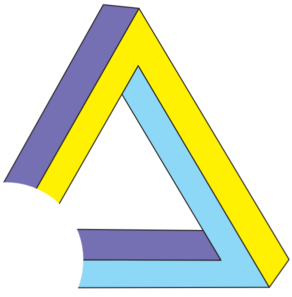


Рис. 54

Человеческое сознание сначала создаёт общий рисунок предмета, а затем анализирует его отдельные части. Каждый угол совместим с пространственной перспективой, но, соединившись, они образуют пространственный парадокс. Если закрыть любой из углов треугольника (рис. 54), то невозможность существования исчезает.

Похожие фигуры явились источником вдохновения для многих творцов. График Маурицио Эшер создал ряд литографий (рис. 55), которые принесли ему известность художника-иллюзиониста.

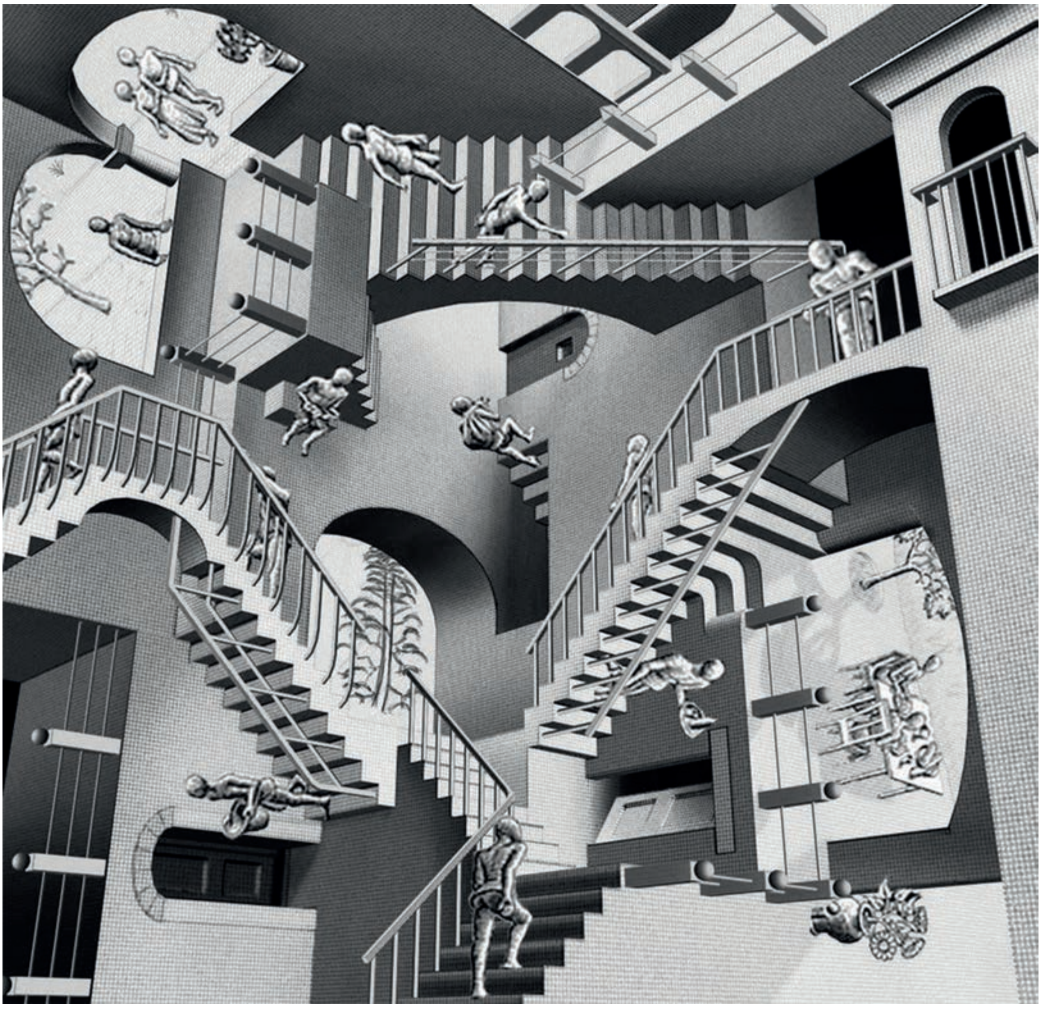


Рис. 55