§ 2. Прямые и плоскости

А) Прямые и плоскости в пространстве могут располагаться по-разному.

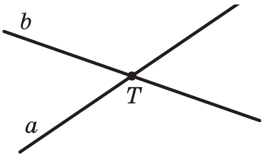

Рис. 56

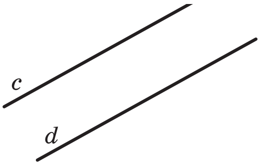

Рис. 57

Две прямые плоскости могут иметь только одну общую точку. Такие прямые называются *пересекающимися*. На рисунке 56 показаны пересекающиеся прямые a и b и их единственная общая точка T. Две прямые плоскости могут не иметь общих точек. Тогда их называют *параллельными*. На рисунке 57 показаны параллельные прямые c и d. В пространстве две прямые могут быть расположены так, что они не лежат в одной плоскости, т. е. нет такой плоскости, которой бы они обе принадлежали. Такие прямые называются *скрещивающимися*. Представление о таких прямых дают две дороги, одна из которых проходит по эстакаде, а другая — под эстакадой (рис. 58). Такими являются прямые, которые проходят через рёбра MN и L_1M_1 параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$ (рис. 59).

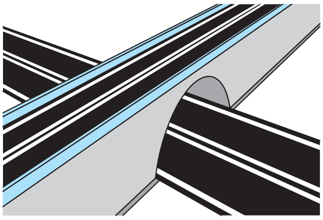

Рис. 58

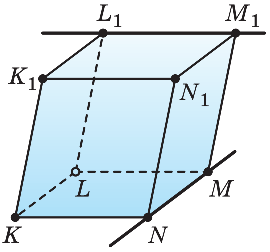

Рис. 59

Каким может быть взаимное расположение прямой и плоскости?

Прямая может лежать в плоскости (рис. 60). Если прямая не лежит в плоскости, то она может пересекать её в некоторой точке (рис. 61) или не иметь с плоскостью ни одной общей точки (рис. 62). В последнем случае прямая и плоскость называются *параллельными*.

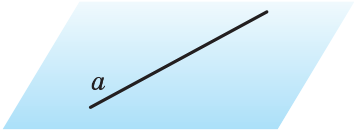

Рис. 60

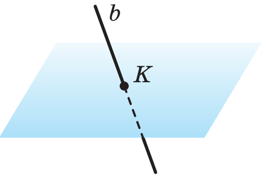

Рис. 61

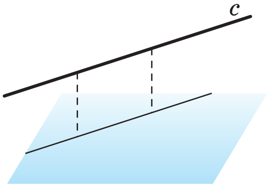

Рис. 62

Представление о прямой, лежащей в плоскости, даёт карандаш, который лежит на столе (рис. 63), о пересекающихся прямой и плоскости — стрела, выпущенная из лука и попавшая в плоскую мишень (рис. 64), о прямой, не пересекающей плоскость, — пол в спортивном зале и гимнастическое бревно (рис. 65).

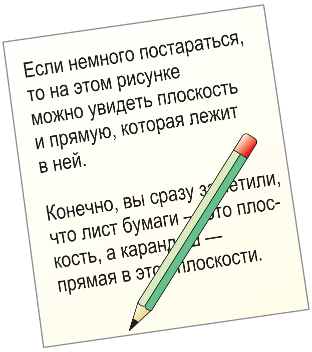

Рис. 63

Рис. 64

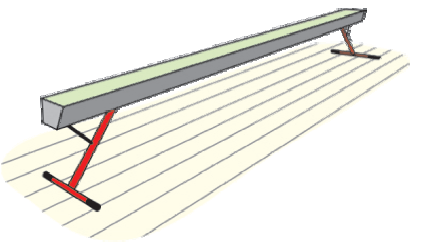

Рис. 65

Указанные виды взаимного расположения прямой и плоскости можно проследить и на изображении параллелепипеда (рис. 66). Прямая, которой принадлежит диагональ AE грани $ACEG$, лежит в плоскости этой грани. Прямая, проходящая через ребро AA_1, пересекает плоскость грани $ACEG$. Прямая, содержащая ребро A_1C_1, параллельна плоскости грани $ACEG$.

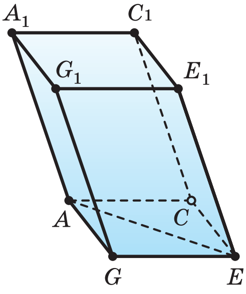

Рис. 66

Как могут располагаться в пространстве две плоскости?

Плоскости могут пересекаться по прямой (рис. 67) или не иметь общих точек (рис. 68). В соответствии с этим их называют *пересекающимися* или *параллельными*.

Представление о пересекающихся плоскостях дают столешница и боковина стола (рис. 69), о параллельных плоскостях — пол и потолок в помещении (рис. 70). На изображении параллелепипеда на рисунке 66 пересекающимися являются плоскости граней AGG_1A_1 и $AGEC$, параллельными — плоскости граней AGG_1A_1 и CEE_1C_1.

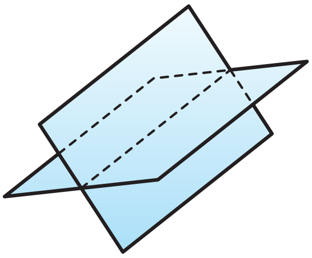

Рис. 67

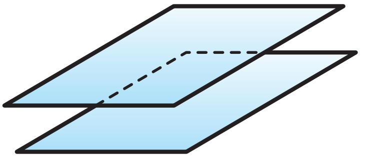

Рис. 68

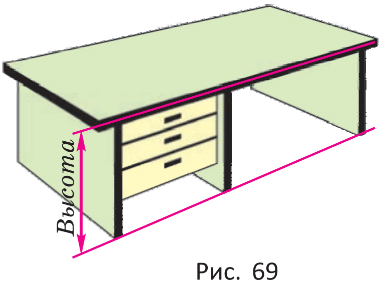

Рис. 69

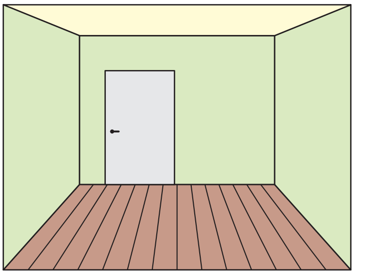

Рис. 70

Знак || используют не только для обозначения параллельности прямых, но и параллельности прямой и плоскости и двух плоскостей. Если учесть, что прямые обозначаются строчными латинскими буквами a, b, c, ..., а плоскости — строчными греческими буквами α, β, γ, ..., то записи $a \parallel b$, $c \parallel \alpha$, $\alpha \parallel \beta$ означают, что параллельными являются прямые a и b, прямая c и плоскость α, плоскости α и β.

Б) Теория взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве основывается на следующих аксиомах.

Аксиома 1. Если три точки не лежат на одной прямой, то через них проходит единственная плоскость.

Аксиома 2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то каждая точка этой прямой принадлежит плоскости.

В этом случае говорят, что прямая лежит в плоскости.

Аксиома 3. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют и общую прямую, проходящую через эту точку.

Свойство плоскости, которую фиксирует аксиома **1**, часто используется на практике. Острия ножек штатива фотоаппарата (рис. 71) принадлежат одной плоскости, и поэтому положение фотоаппарата устойчивое. Дверь, закреплённая на двух петлях, не занимает определённого положения (рис. 72), но если добавить третью точку крепления — замок, то положение двери фиксируется (рис. 73). Когда ножки табурета неправильно подрезаны, то табурет стоит на трёх ножках, а четвёртая ножка висит над полом (рис. 74).

Свойство плоскости, которое выражает аксиома **2**, используют для проверки прямолинейности чертёжной линейки. Линейку прикладывают

Рис. 71

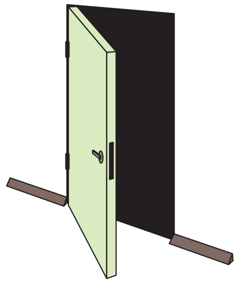

Рис. 72

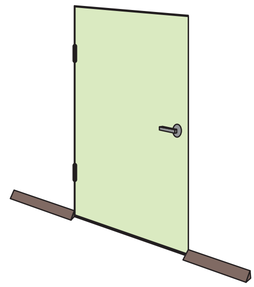

Рис. 73

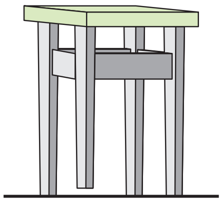

Рис. 74

краем к поверхности стола: если край прямолинейный, то он всеми своими точками прилегает к поверхности стола (рис. 75), а если неровный, то между краем линейки и поверхностью стола есть щель (рис. 76 и 77).

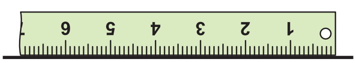

Рис. 75

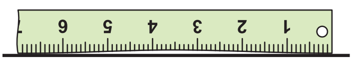

Рис. 76

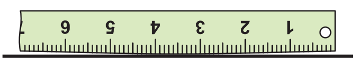

Рис. 77

Свойство плоскости, зафиксированное аксиомой **3**, проявляется при пересечении двух смежных стен комнаты (рис. 78).

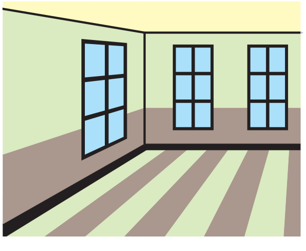

Рис. 78

Отметим, что в стереометрии выполняются все аксиомы планиметрии и все доказанные в ней утверждения. В частности, признаки равенства и признаки подобия треугольников остаются в силе и для треугольников, лежащих в разных плоскостях.

В соответствии с аксиомой **1** плоскость определяется тремя своими точками A, B, C, поэтому иногда плоскость обозначают тремя прописными латинскими буквами: плоскость, проходящую через точки A, B, C, обозначают (ABC).

Пример. На рёбрах KK_1, K_1L_1, L_1M_1 призмы $KLMNK_1L_1M_1N_1$ выбраны точки A, B, C, причём прямая, определённая точками B и C, не параллельна ребру K_1N_1 (рис. 79). Плоскости ABC и KNN_1 имеют общую точку A. В соответствии с аксиомой **3** они имеют общую прямую. Построим её.

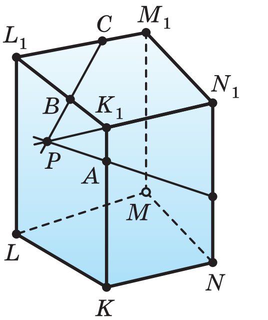

Рис. 79

Точка A принадлежит грани KK_1N_1N, а точки B, C — грани $K_1L_1M_1N_1$, и эти грани пересекаются по прямой K_1N_1. Эта прямая и прямая BC лежат в одной плоскости и не параллельны. Поэтому они пересекаются в некоторой точке. Найдём её, продлив отрезки BC и K_1N_1, и получим точку P.

Точка P принадлежит прямым BC и K_1N_1, значит, она принадлежит как плоскости ABC, так и плоскости KK_1N_1. Этим же плоскостям принадлежит и точка A. Значит, прямая, определённая точками P и A, принадлежит и плоскости ABC, и плоскости KK_1N_1. Иными словами, плоскости ABC и KK_1N_1 пересекаются по прямой PA.

Теорема 3. Через прямую и точку вне её проходит единственная плоскость.

Доказательство. Пусть есть прямая l и точка A, которая не принадлежит прямой l (рис. 80).

Выберем на прямой l две точки B и C. Точки A, B, C не лежат на одной прямой, поэтому по аксиоме **1** через них проходит некоторая плоскость α (рис. 81). Плоскость α в соответствии с аксиомой **2** проходит и через прямую l, так как две её точки B и C принадлежат плоскости α.

Рис. 80

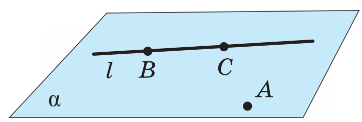

Рис. 81

Допустим, что через прямую l и точку A проходит ещё одна плоскость β. Тогда плоскость β проходит как через точку A, так и через точки B и C. Поскольку по аксиоме **1** через три различные точки проходит единственная плоскость, то плоскость β совпадает с плоскостью α. Значит, через прямую l и точку A вне её проходит единственная плоскость.

Теорема 4. Через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость.

Доказательство. Пусть имеются две пересекающиеся прямые p и q, и D — их общая точка (рис. 82).

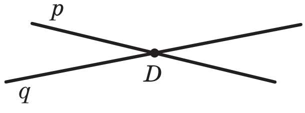

Рис. 82

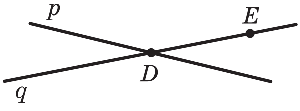

Рис. 83

Выберем на прямой q какую-либо точку E, отличную от точки D (рис. 83). В соответствии с теоремой **3** через прямую p и точку E проходит единственная плоскость γ. Плоскость γ проходит и через прямую q, так как две точки D и E прямой q принадлежат плоскости γ.

Допустим, что через прямые p и q проходит ещё одна плоскость δ. Тогда плоскость δ проходит через точку E. Но через эту точку и прямую p в соответствии с теоремой **3** проходит единственная плоскость. Значит, плоскость δ совпадает с плоскостью γ. Таким образом, через пересекающиеся прямые p и q проходит единственная плоскость.

Теорема 4 находит своё применение на практике. Если столяру нужно распилить брусок под определённым углом, он, чтобы наметить плоскость распила, проводит в двух смежных гранях бруска пересекающиеся прямые PQ и PS (рис. 84).

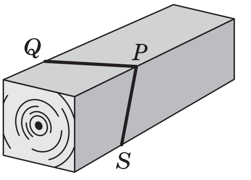

Рис. 84

1. Какие две прямые плоскости называются пересекающимися; параллельными?
2. Какие прямые называются скрещивающимися?
3. Как могут располагаться две прямые в пространстве?
4. Какие прямая и плоскость называются пересекающимися; параллельными?
5. Как могут располагаться в пространстве прямая и плоскость?
6. Какие две плоскости называются пересекающимися; параллельными?
7. Как могут располагаться в пространстве две плоскости?
8. Сформулируйте свойство плоскости, проходящей через три точки, и приведите примеры моделей, иллюстрирующих это свойство.
9. Сформулируйте свойство прямой, две точки которой принадлежат плоскости, и приведите примеры моделей, иллюстрирующих это свойство.
10. Сформулируйте свойство линии пересечения двух плоскостей и приведите примеры моделей, иллюстрирующих это свойство.
11. Как обозначаются точки; прямые; плоскости?
12. Назовите способы задания плоскости.
13. Верно ли, что:
    а) через любые две точки проходит единственная прямая;
    б) через любые три точки проходит единственная плоскость;
    в) три попарно пересекающиеся прямые лежат в одной плоскости? Ответ обоснуйте.
14. На рисунке 85 изображена призма, основания которой — правильные шестиугольники. Назовите:
    а) прямые, пересекающие плоскость ABC;
    б) прямые, пересекающие плоскость UTF;
    в) прямые, лежащие в плоскости PTR;
    г) прямые, лежащие в плоскости CDR;
    д) прямые, параллельные плоскости FEC;
    е) прямые, параллельные плоскости AQB.

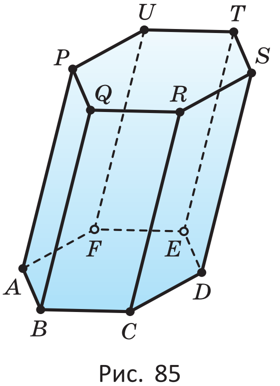

Рис. 85

15. На рисунке 86 изображён параллелепипед. Назовите:
а) плоскости, пересекающие прямую CQ;
б) плоскости, пересекающие прямую OP;
в) плоскости, в которых лежит прямая NO;
г) плоскости, которым принадлежит прямая DN;
д) плоскости, параллельные прямой CF;
е) плоскости, параллельные прямой EO.

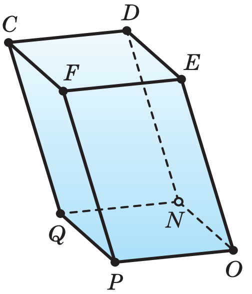

Рис. 86

16. Могут ли две плоскости иметь:
а) только одну общую точку;
б) только две общие точки;
в) только одну общую прямую;
г) только две общие прямые?

Задача 1. Докажите, что:

а) если некоторая точка A лежит на прямой k, принадлежащей плоскости α, то точка A принадлежит плоскости α;

б) если две точки A и B принадлежат как прямой l, так и плоскости α, то прямая l лежит в плоскости α;

в) если плоскости α и β пересекаются по прямой l и точка A принадлежит как плоскости α, так и плоскости β, то точка A принадлежит прямой l;

г) прямая a, пересекающая в различных точках две пересекающиеся прямые k и l, принадлежит плоскости этих прямых.

Решение: а) $k \subset \alpha$ означает, что любая точка прямой k принадлежит также и плоскости α.

Любая точка прямой k принадлежит плоскости α, поэтому и некоторая точка A прямой k принадлежит плоскости α.

б) $A \in l$ и $B \in l$, поэтому прямые AB и l совпадают ($AB = l$) (аксиома прямой).

$A \in \alpha$ и $B \in \alpha$, поэтому $AB \subset \alpha$ (аксиома **2**).

$AB \subset \alpha$ и $AB = l$, поэтому $l \subset \alpha$.

в) $A \in \alpha$ и $A \in \beta$, поэтому $A \in \alpha \cap \beta$.

$A \in \alpha \cap \beta$ и $\alpha \cap \beta = l$, поэтому $A \in l$.

г) $k \cap l = O$, поэтому существует такая плоскость α, что $k \subset \alpha$ и $l \subset \alpha$.

$a \cap k = A$, $k \subset \alpha$, поэтому $A \in \alpha$.

$a \cap l = B$ и $l \subset \alpha$, поэтому $B \in \alpha$.

$A \in \alpha$ и $B \in \alpha$, поэтому $AB \subset \alpha$ (аксиома **2**).

$a \cap k = A$, поэтому $A \in a$.

$a \cap l = B$, поэтому $B \in a$.

$A \in a$ и $B \in a$, поэтому $AB = a$.

$AB \subset \alpha$ и $AB = a$, поэтому $a \subset \alpha$.

Задача 2. Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDHGFE$ является квадрат $ABCD$ со стороной 6 см, а боковое ребро AH параллелепипеда равно 8 см (рис. 86). Найдите длину пространственной ломаной $HFDBH$.

Решение. $DB = AB\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ (см), $AC = 6\sqrt{2}$ (см), так как $ABCD$ — квадрат.

$FD = \sqrt{FC^2 + CD^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ (см), так как $DEFC$ — прямоугольник. $BH = FD = 10$ см, так как равные прямоугольники имеют равные диагонали.

$$l_{HFDBH} = HF + FD + DB + BH = 6\sqrt{2} + 10 + 6\sqrt{2} + 10 =$$
$$= \left(20 + 12\sqrt{2}\right) \text{ (см)} = 4 \cdot \left(5 + 3\sqrt{2}\right) \text{ (см)}.$$

Ответ: $4 \cdot \left(5 + 3\sqrt{2}\right)$ см.

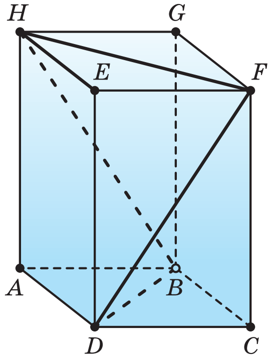

Рис. 86

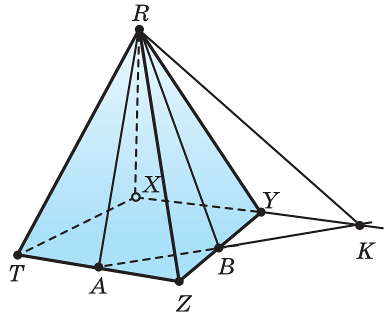

Рис. 87

Задача 3. Точки A и B — середины рёбер TZ и YZ пирамиды $RTXYZ$ (рис. 87). Постройте:

а) точку пересечения прямой AB и плоскости RXY;

б) прямую, по которой пересекаются плоскости RAB и RXY.

Решение. а) $A \in TZ$, $TZ \subset (TXY)$, поэтому $A \in (TXY)$;
$B \in YZ$, $YZ \subset (TXY)$, поэтому $B \in (TXY)$.
$AB \subset (TXY)$ (аксиома 2).
$XY \subset (TXY)$, поэтому $AB \cap XY = K$, $K \in XY$ и $K \in AB$.
$XY \subset (RXY)$, поэтому $K \in (RXY)$ и $K = AB \cap (RXY)$.

б) $K \in (RXY)$ и $R \in (RXY)$, поэтому $KR \subset (RXY)$.
$K \in AB$ и $AB \subset (RAB)$, поэтому $K \in (RAB)$.
$K \in (RAB)$ и $R \in (RAB)$, поэтому $KR \subset (RAB)$.
$KR \subset (RAB)$ и $KR \subset (RXY)$, поэтому $KR = (RAB) \cap (RXY)$.

Задача 4. Точки P, Q и R принадлежат соответственно рёбрам SA, SC и BC пирамиды $SABCD$ (рис. 88). Постройте прямую, по которой плоскость PQR пересекает плоскость ABC.

Решение. $Q \in SC$ и $SC \subset (SBC)$, поэтому $Q \in (SBC)$.
$R \in BC$ и $BC \subset (SBC)$, поэтому $R \in (SBC)$.

По аксиоме **2** $QR \subset (SBC)$.
$QR \subset (SBC)$ и $SB \subset (SBC)$,
поэтому $QR \cap SB = K$, $K \in SB$,
$SB \subset (SAB)$ и $K \in (SAB)$.
$P \in SA$ и $SA \subset (SAB)$, поэтому $P \in (SAB)$.
$K \in (SAB)$ и $P \in (SAB)$, поэтому $KP \subset (SAB)$.
$KP \subset (SAB)$ и $AB \subset (SAB)$,
поэтому $KP \cap AB = M \in AB$.
$R \in BC$ и $BC \subset (ABC)$, поэтому $R \in (ABC)$;
$R \in (PQR)$; тогда $R \in (ABC) \cap (PQR)$.
$M \in AB$ и $AB \subset (ABC)$, поэтому $M \in (ABC)$;
$M \in KP$ и $KP \subset (PQR)$, поэтому $M \in (PQR)$;
тогда $M \in (ABC) \cap (PQR)$.
По аксиоме **3** $(PQR) \cap (ABC) = MR$.

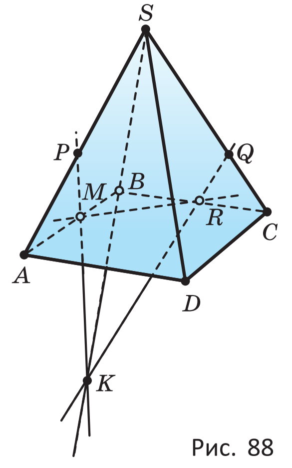

Рис. 88

21. Сколько общих точек могут иметь:
а) две прямые; б) прямая и плоскость; в) две плоскости?

22. Могут ли иметь единственную общую точку:
а) две прямые;
б) прямая и плоскость;
в) две плоскости;
г) три плоскости?

23. Сколько образуется линий при попарном пересечении трёх плоскостей?

24. Сколько разных прямых могут определять четыре разные точки?

25. Используя рисунок 89, назовите:
а) точки, лежащие в плоскостях LMQ и NME;
б) плоскости, в которых лежит прямая NR;
в) точку пересечения прямой BC с плоскостью KLN;
г) точки пересечения прямых PL и ND с плоскостью OPR;
д) прямую, по которой пересекаются плоскости KON и KLM;
е) прямую, по которой пересекаются плоскости RDQ и MNK;
ж) точку пересечения прямых AB и LM;
з) точку пересечения прямых RQ и BD;
и) точку пересечения прямых BQ и MC.

26. Четырёхугольная пирамида $PGHKL$ на рисунке 90 — правильная, а PA и PB — высоты её граней PGH и PHK. Докажите, что треугольники PGA и PHB равны.

27. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Могут ли:
а) какие-либо три из них лежать на одной прямой;
б) прямые AB и CD пересекаться?

28. Точки U и V являются точками треугольника ABC, а точка W принадлежит прямой UV (рис. 91). Принадлежит ли точка W плоскости ABC?

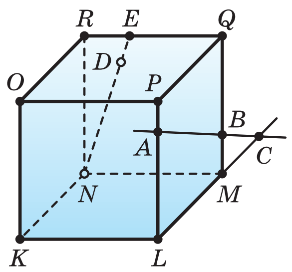

Рис. 89

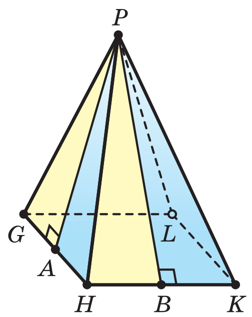

Рис. 90

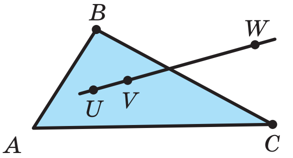

Рис. 91

29. Докажите, что через три данные точки, лежащие на одной прямой, проходит плоскость. Сколько имеется таких плоскостей?

30. Докажите, что если две смежные вершины четырёхугольника и точка пересечения его диагоналей принадлежат некоторой плоскости, то четырёхугольник целиком лежит в этой плоскости.

31. Истинно ли утверждение:
а) прямая лежит в плоскости данного треугольника, если она пересекает две его стороны во внутренних точках;
б) прямая лежит в плоскости данного треугольника, если она пересекает две его стороны?

32. Докажите, что любая прямая, которая:
а) проходит через вершину A треугольной пирамиды $ABCD$ и пересекает прямую CD, принадлежит плоскости ACD;
б) не проходит через вершину B треугольной пирамиды $ABCD$ и пересекает как прямую BC, так и прямую BD, принадлежит плоскости BCD.

33. Плоскость β проходит через две смежные вершины трапеции и точку пересечения её диагоналей. Докажите, что две другие вершины трапеции лежат в плоскости β.

34. Даны три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Докажите, что все прямые, которые:
а) проходят через точку A и пересекают прямую BC, лежат в одной плоскости;
б) не проходят через точку A и пересекают обе прямые AB и AC, лежат в одной плоскости.

35. Можно ли утверждать, что прямая лежит в плоскости данного треугольника, если она:
а) проходит через вершину треугольника;
б) пересекает две стороны треугольника;
в) пересекает в различных точках две стороны треугольника;
г) пересекает две прямые, на которых лежат стороны треугольника;
д) пересекает три прямые, на которых лежат стороны треугольника?

36. Имеется прямая a и точка K, не принадлежащая ей. Докажите, что все прямые, проходящие через точку K и пересекающие прямую a, лежат в одной плоскости.

37. Точки M и N принадлежат рёбрам SS_1 и RR_1 призмы $PQRSP_1Q_1R_1S_1$. Докажите, что прямая MN принадлежит плоскости RSS_1.

38. Прямая a лежит в одной из пересекающихся плоскостей β и пересекает другую плоскость γ. Докажите, что прямая a пересекает линию пересечения плоскостей β и γ.

39. Используя рисунок 92, на котором точки B и C принадлежат рёбрам PK и PT треугольной пирамиды $KPTU$, а точка A лежит на прямой, проходящей через ребро KU:

а) назовите прямые, которым принадлежит точка U;

б) докажите, что прямая AB лежит в плоскости KPU;

в) установите, каким граням пирамиды принадлежит прямая BC;

г) установите, каким граням пирамиды принадлежит прямая KT;

д) назовите плоскость, которой принадлежит точка A;

е) назовите прямые, через которые проходит плоскость KPT.

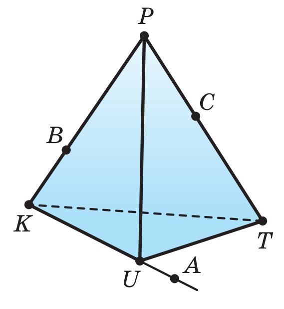

Рис. 92

40. Используя рисунок 93, на котором E — точка ребра AI четырёхугольной пирамиды $AIJKL$, точка F принадлежит ребру AK, а точка G лежит на луче AK за точкой K:

а) назовите прямую, по которой пересекаются плоскости IAJ и JAK;

б) назовите прямую, по которой пересекаются плоскости AJG и KAL;

в) докажите, что прямая EF лежит в плоскости IAK;

г) докажите, что прямые EF и FG лежат в одной плоскости;

д) назовите плоскости, которым принадлежит прямая JL.

41. На рисунке 94 изображена четырёхугольная призма $CDEFC_1D_1E_1F_1$, точка P выбрана на луче D_1E_1 за точкой E_1, а точка R — на ребре C_1F_1. Используя этот рисунок:

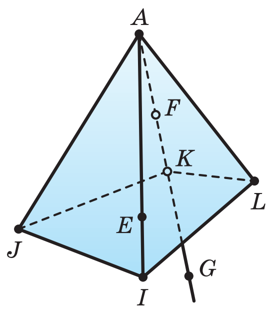

Рис. 93

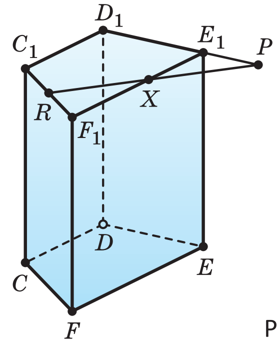

Рис. 94

а) докажите, что прямая PR принадлежит плоскости $C_1D_1F_1$;

б) докажите, что прямая PR пересекает прямую E_1F_1;

в) назовите прямую, по которой плоскость $C_1D_1F_1$ пересекает плоскость DD_1E;

г) назовите прямую, по которой плоскость $C_1D_1F_1$ пересекает плоскость PRF;

д) назовите точку, в которой прямая PR пересекает плоскость DEE_1;

е) назовите точку, в которой прямая PR пересекает плоскость FF_1E_1.

42. Имеется призма $MTUXM_1T_1U_1X_1$. На луче TT_1 за точкой T_1 выбрана точка H, через которую проведены прямые HU и HX (рис. 95). Используя это:

а) докажите, что прямые HU и T_1U_1 пересекаются в некоторой точке B;

б) назовите точку, в которой прямая HU пересекает плоскость $M_1T_1X_1$;

в) докажите, что прямые HX и T_1X_1 пересекаются в некоторой точке A;

г) докажите, что прямая HX и плоскость $M_1T_1U_1$ пересекаются в точке A;

д) назовите прямую, по которой пересекаются плоскости XHU и T_1TU;

е) назовите прямую, по которой пересекаются плоскости XHU и MTX.

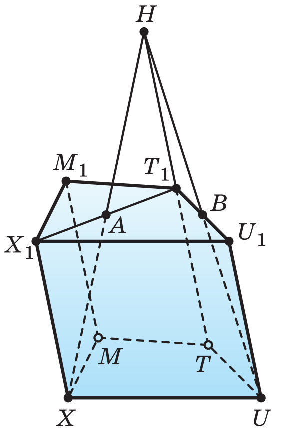

Рис. 95

43. Точки P, Q и R принадлежат соответственно рёбрам SA, SC и BC пирамиды $SABCD$ (рис. 96). Постройте прямую, по которой плоскость PQR пересекает плоскость:

а) SBC;
б) SAB;
в) SBD;
г) SDC.

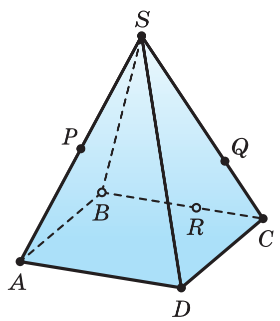

Рис. 96

44. Точка M — внутренняя точка ребра AJ треугольной пирамиды $AIJK$, точка N лежит на луче AK за точкой K. Постройте: точку пересечения прямой MN с плоскостью IJK;

б) прямую, по которой пересекаются плоскости IMN и IJK.

45. На отрезке MN как на стороне в разных плоскостях построены два четырёхугольника $MNAB$ и $MNCD$, на отрезках NA и NC выбраны внутренние точки R и S соответственно (рис. 97). Сделайте такой рисунок в тетради и:

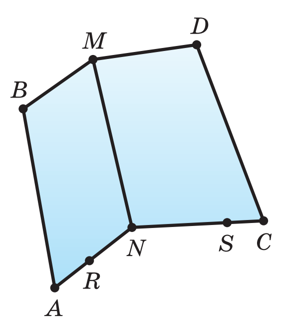

Рис. 97

а) постройте точку, в которой прямая MR пересекает плоскость ABC;
б) постройте точку пересечения прямой CD с плоскостью ARS;
в) докажите, что прямая RS принадлежит плоскости CAN.

46. Точки A и B — внутренние точки рёбер KM и KQ призмы $KMOQK_1M_1O_1Q_1$. Постройте:

а) точку, в которой прямая AB пересекает плоскость M_1MO;
б) прямую, по которой плоскость ABO_1 пересекает плоскость MOO_1.

47. Точки A, B, C являются серединами рёбер T_1U_1, U_1V_1, V_1V параллелепипеда $TUVWT_1U_1V_1W_1$. Постройте:

а) точку, в которой прямая AB пересекает плоскость WW_1V_1;
б) прямую, по которой плоскость ABC пересекает плоскость WW_1V_1.

48. Диагонали KM и LN основания $KLMN$ пирамиды $AKLMN$ пересекаются в точке O, точка B — внутренняя точка отрезка KO, а точка C лежит на луче LN за точкой N. Постройте:

а) точку, в которой прямая BC пересекает плоскость ALM;
б) прямую, по которой пересекаются плоскости ABC и ALM.

49. Имеется параллелепипед $BCDEB_1C_1D_1E_1$. Постройте:

а) точку пересечения прямой EE_1 с линией пересечения плоскостей BC_1D и C_1CE;
б) линию пересечения плоскостей BC_1D и EDD_1.

50. Точки A и B лежат в гранях PQS и PRS треугольной пирамиды $PQRS$ (рис. 98). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте точку, в которой прямая AB пересекает:

а) плоскость QRS;
б) плоскость PQR.

51. Боковая поверхность прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием равна 12 см^2. Найдите диагональ боковой грани, учитывая, что диагональ основания равна $\sqrt{2}$ см.

52. Основанием прямой треугольной призмы является прямоугольный треугольник, радиусы вписанной в него и описанной около него окружностей равны соответственно 4 см и 10 см. Найдите полную поверхность призмы, учитывая, что её боковое ребро равно 16 см.

53. Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция, в которую можно вписать окружность. Боковая сторона трапеции равна 12 см и образует с основанием угол в 30°. Найдите боковое ребро призмы, учитывая, что её полная поверхность равна 336 см^2.

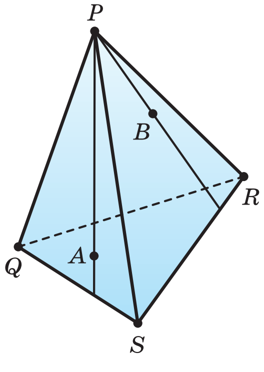

Рис. 98

54. Медианы BB_1 и NN_1 грани BKN четырёхугольной пирамиды $BKLMN$ пересекаются в точке G (рис. 99). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте точку, в которой прямая MG пересекает плоскость BLN.

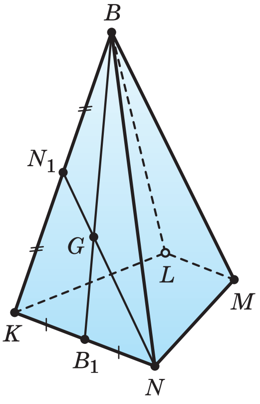

Рис. 99

55. Точку M выберите на диагонали DC_1 грани треугольной призмы $CDEC_1D_1E_1$, точку N — на отрезке E_1F, где F — внутренняя точка ребра DE, точку L — на луче DD_1 за точкой D_1 (рис. 100). Постройте прямую, по которой плоскость MNL пересекает плоскость ECC_1.

56. Выберите точки A и B соответственно на рёбрах MX и MY четырёхугольной пирамиды $MXYZV$, а точку C — на луче YZ за точкой Z. Постройте прямую, по которой пересекаются плоскости ABC и XYZ.

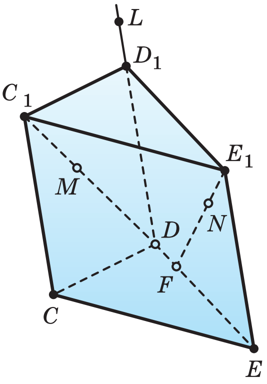

Рис. 100

57. Ребро основания правильной треугольной призмы $IJKPML$ (рис. 101) относится к боковому ребру как $2 : 3$. Найдите боковую поверхность призмы, учитывая, что длина ломаной $IPLKMI$ равна $16 + 4\sqrt{13}$ дм.

58. Точки A и B делят рёбра QD и QE правильной четырёхугольной пирамиды $QCDEF$ со всеми равными рёбрами в отношении $5 : 7$, если считать от вершины Q. Найдите полную поверхность пирамиды, учитывая, что длина ломаной $ABQFA$ равна 70 см.

59*. Площадь боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$ с квадратным основанием равна 2640 мм^2. Найдите рёбра параллелепипеда, учитывая, что радиус окружности, вписанной в треугольник NKK_1, равен 5 мм.

60*. Диагональ боковой грани прямоугольного параллелепипеда $CDEFC_1D_1E_1F_1$ с квадратным основанием равна 52 см, а радиус окружности, вписанной в треугольник CC_1D, равен 8 см. Найдите полную поверхность параллелепипеда.

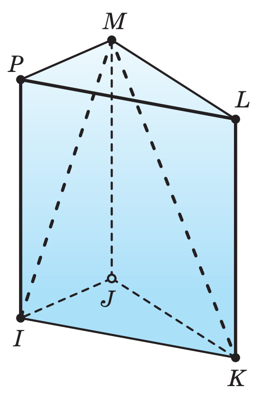

Рис. 101

61*. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды равно 8 см, а её боковая поверхность — $16\sqrt{15}$ см^2. Найдите сторону основания пирамиды, учитывая, что радиус окружности, вписанной в боковую грань, равен $2\sqrt{0{,}6}$ см.

Пространственное моделирование

Ответьте, какая — плоская или пространственная — фигура изображена на рисунке:

а) 102; б) 103; в) 104.

На рисунке 104 изображена поверхность, которую называют лентой Мёбиуса, или листом Мёбиуса. Её открыли независимо друг от друга в 1858 году немецкие математики Август Мёбиус и Иоганн Листинг. До этого считалось, что любая поверхность имеет две стороны, которые можно окрасить в разный цвет.

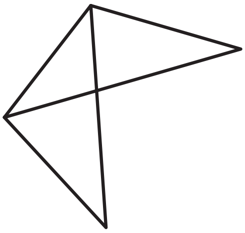

Рис. 102

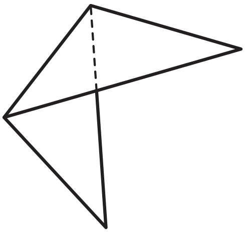

Рис. 103

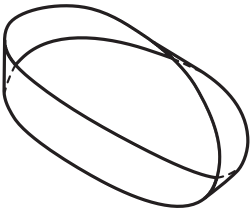

Рис. 104

Лента Мёбиуса имеет одну сторону и один край. В этом легко убедиться. Возьмём прямоугольную ленту $ABCD$ и склеим её так, чтобы точка A совпала с точкой C, а точка B — с точкой D. Сделайте это сами и попробуйте покрасить полученную ленту, не переходя через её край. Какой результат у вас получился?

Какая поверхность получится, если лист Мёбиуса разрезать по его средней линии? Попробуйте окрасить эту поверхность. Что получилось? А что будет, если лист Мёбиуса разрезать, отступив от его края на третью часть ширины?

Памятный знак «Лист Мёбиуса» (рис. 105) был установлен 22 января 2009 года к 80-летию Национальной академии наук Беларуси.

Свойства ленты Мёбиуса нашли практическое применение и в промышленности. В виде ленты Мёбиуса изготавливают шлифовальные ленты, красящую ленту матричных принтеров, полосу ленточного конвейера, что позволяет увеличить срок службы, потому что вся поверхность ленты равномерно изнашивается. Ленту Мёбиуса применяют в системах записи на непрерывную плёнку, чтобы удвоить время записи.

Рис. 105