§ 3. Построение сечений многогранников

А) При изучении стереометрии приходится пространственные фигуры показывать на плоских рисунках. Часто на рисунке нужно показать взаимное расположение двух фигур. Если одна из фигур — многогранник, а вторая — плоскость, то их взаимное расположение характеризует та часть многогранника, которая принадлежит рассматриваемой плоскости, или, иными словами, *сечение многогранника плоскостью*. Плоскость при этом называют *секущей плоскостью*.

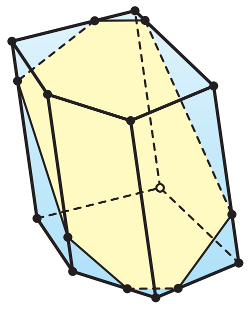

Рис. 106

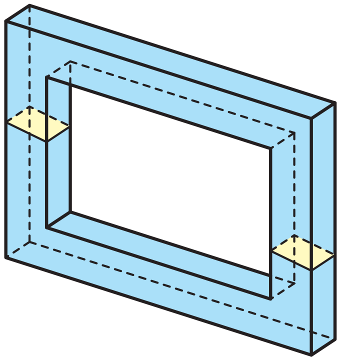

Рис. 107

Секущая плоскость пересекает поверхность многогранника по отрезкам, а сечением многогранника плоскостью является один или несколько многоугольников.

На рисунке 106 изображено сечение пятиугольной призмы, которое является семиугольником. Сечение «рамы» плоскостью на рисунке 107 состоит из двух четырёхугольников.

Для построения сечения многогранника достаточно построить общие точки его граней и секущей плоскости.

Пример 1. Построим сечение треугольной пирамиды $SABC$ плоскостью, проходящей через точки M, N и K на рёбрах SA, SB и SC.

Секущая плоскость MNK имеет с плоскостью SAB две общие точки M и N, поэтому прямая MN принадлежит как секущей плоскости, так и плоскости SAB. Значит, отрезок MN — линия пересечения грани SAB с плоскостью MNK.

Рассуждая аналогично, получаем, что плоскость MNK пересекает грани SAC и SBC по отрезкам MK и NK соответственно.

Треугольник MNK — искомое сечение (рис. 108).

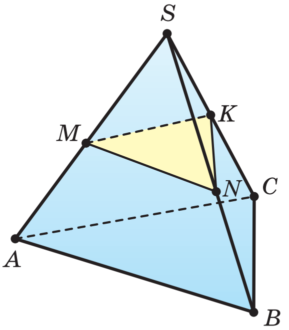

Рис. 108

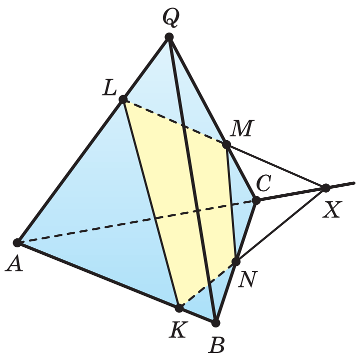

Рис. 109

Пример 2. Построим сечение треугольной пирамиды $QABC$ плоскостью α, проходящей через точки K, L, M рёбер AB, AQ, CQ.

Секущая плоскость α (рис. 109) имеет с гранью AQB две общие точки K и L, поэтому она пересекает эту грань по отрезку KL.

Поскольку точки L и M — общие точки секущей плоскости и грани AQC, то LM — линия пересечения этих плоскостей.

Грань ABC имеет с секущей плоскостью общую точку K. Найдём точку, в которой плоскость α пересекает ребро BC. Обратим внимание на то, что точка X пересечения прямых LM и AC принадлежит плоскости α, плоскости AQC и плоскости ABC. А поскольку точки K и X — общие точки плоскостей α и ABC, то KX — прямая, по которой плоскость α пересекает плоскость ABC. Точка N пересечения прямой KX с ребром BC принадлежит плоскости α. Значит, плоскость α пересекает грань ABC по отрезку KN, а грань BQC — по отрезку MN.

Четырёхугольник $KLMN$ — искомое сечение пирамиды плоскостью α.

Прямые KL и KN называют *следами* плоскости α на плоскостях ABQ и ABC соответственно.

Пример 3. Построим сечение пирамиды $OKLMN$ плоскостью β, проходящей через точку A на ребре OL и прямую k в плоскости основания $KLMN$.

Найдём точку X (рис. 110), в которой пересекаются прямые LM и k. Эта точка принадлежит и секущей плоскости β как точка прямой k, и плоскости грани LOM как точка прямой LM. Точка A также принадлежит этим обеим плоскостям. Поэтому плоскость β пересекает плоскость LOM по прямой AX, а грань LOM — по отрезку AB, где B — точка пересечения прямых AX и OM.

Аналогично найдём точки Y и D и отрезок AD, по которому плоскость β пересекает грань OLK, а затем точки Z и C и отрезки DC и BC. Четырёхугольник $ABCD$ — искомое сечение.

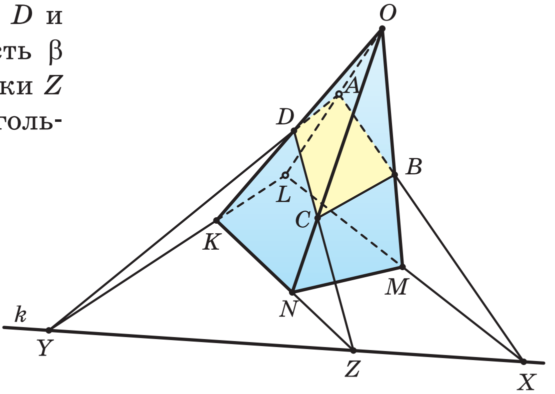

Рис. 110

Б) A, B, C — точки на разных рёбрах четырёхугольной призмы. Найдём сечение призмы плоскостью ABC.

Построение искомого сечения зависит от того, на каких рёбрах призмы лежат точки A, B, C. Наиболее просто строить сечение в том случае, когда точки A, B, C лежат на рёбрах, выходящих из одной вершины. Искомое сечение в этом случае — треугольник ABC.

Пример 4. Точки A, B, C расположены так, как показано на рисунке 111. Построим сечение призмы плоскостью ABC.

Вначале построим след секущей плоскости ABC на плоскости нижнего основания. Для этого найдём точки M и N пересечения прямых AB и BC, которые лежат в секущей плоскости, с плоскостью $RSUV$: M — точка пересечения прямых AB и RV, N — прямых BC и UV. Прямая MN — общая прямая секущей плоскости и плоскости нижнего основания.

Точка P пересечения прямой RS со следом MN принадлежит и секущей плоскости, и плоскости грани RR_1S_1S. Учитывая, что этим двум плоскостям принадлежит и точка A, получаем, что прямая PA — след секущей плоскости на плоскости RR_1S_1S. Значит, плоскость ABC пересекает грань RR_1S_1S по отрезку AD, а грань UU_1S_1S — по отрезку CD.

Искомым сечением является четырёхугольник $ABCD$.

Видим, что новым элементом в этом решении в сравнении с примером **2** является построение следа секущей плоскости на плоскости основания.

Пример 5. Точки A, B, C расположены так, как показано на рисунке 112. Построим сечение призмы плоскостью ABC.

Вначале построим след секущей плоскости ABC на плоскости нижнего основания. Для этого найдём точки M и N пересечения прямых AB и BC, которые лежат в секущей плоскости, с плоскостью $RSUV$: M — точка пересечения прямых AB и RV, N — прямых BC и UV. Прямая MN — общая прямая секущей плоскости и плоскости нижнего основания.

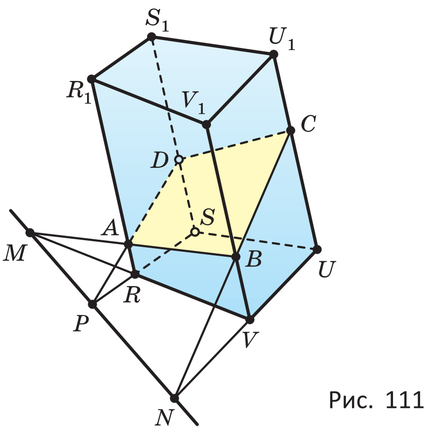

Рис. 111

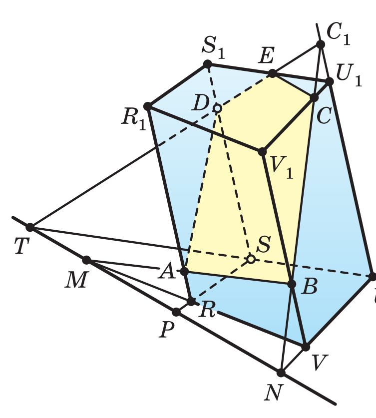

Рис. 112

Точка P пересечения прямой RS со следом MN принадлежит и секущей плоскости, и плоскости грани RR_1S_1S. Учитывая, что этим двум плоскостям принадлежит и точка A, получаем, что прямая PA — след секущей плоскости на плоскости RR_1S_1S. Значит, плоскость ABC пересекает грань RR_1S_1S по отрезку AD.

Найдём точку C_1 пересечения прямой BC и плоскости грани S_1SUU_1. Прямая BC лежит с прямой UU_1 в плоскости UU_1V_1V. Точка C_1 пересечения этих прямых как точка прямой BC лежит в секущей плоскости, а как точка прямой UU_1 — в плоскости S_1SUU_1. Учитывая, что этим двум плоскостям принадлежит точка D, получаем, что прямая DC_1 — след секущей плоскости на плоскости S_1SUU_1. Значит, плоскость ABC пересекает грань S_1SUU_1 по отрезку ED.

Искомым сечением является пятиугольник $ABCED$.

Пример 6. Точки A, B, C расположены так, как показано на рисунке 113. Построим сечение призмы плоскостью ABC.

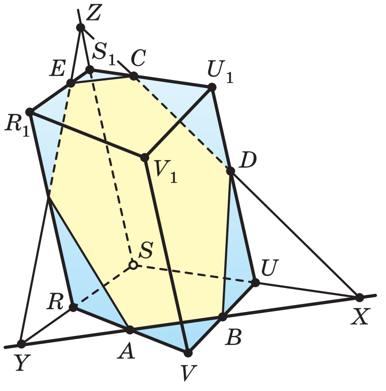

Рис. 113

След AB секущей плоскости на плоскости основания позволяет последовательно найти точки X и Y его пересечения с гранями SUU_1S_1 и RSS_1R_1, след XC секущей плоскости — на плоскости SUU_1S_1. Значит, плоскость ABC пересекает грань SUU_1S_1 по отрезку CD. Пусть точка Z — точка пересечения прямой XC и плоскости грани RSS_1R_1. Тогда Z — точка пересечения ребра SS_1 с секущей плоскостью и след ZY секущей плоскости на грани RSS_1R_1. Поэтому плоскость ABC пересекает грань RSS_1R_1 по отрезку EF.

Искомым сечением является шестиугольник $ABDCEF$.

?

1. Какая фигура называется сечением многогранника? Какой фигурой может быть это сечение?
2. Какая прямая называется следом одной плоскости на другой?
3. Каким может быть сечение плоскостью четырёхугольной призмы?
4. Правда ли, что сечением пятиугольной пирамиды может быть:
   а) точка;
   б) отрезок;
   в) четырёхугольник;
   г) шестиугольник;
   д) семиугольник?

5. Правда ли, что сечением пятиугольной призмы может быть:
а) отрезок;
б) четырёхугольник;
в) шестиугольник;
г) семиугольник;
д) восьмиугольник?

Задача 1. Постройте сечение куба $IJKLI_1J_1K_1L_1$ плоскостью IKJ_1 (рис. 114). Найдите ребро куба, учитывая, что площадь этого сечения равна S.

Решение. Плоскость IKJ_1 пересекает грани $IJKL$, IJJ_1I_1, JKK_1J_1 по отрезкам IK, IJ_1, J_1K соответственно. Следовательно, треугольник IKJ_1 — искомое сечение.

$\triangle\ IKJ_1$ — правильный, значит, $S_{IKJ_1} = \dfrac{\sqrt{3}IK^2}{4}$, или $S = \dfrac{\sqrt{3}IK^2}{4}$. Следовательно, $IK^2 = \dfrac{4S}{\sqrt{3}}$.

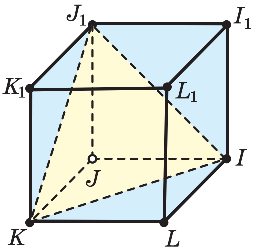

Рис. 114

$\triangle\ IJK$ — равнобедренный прямоугольный с прямым углом J, следовательно, $2IJ^2 = IK^2$, или $IJ^2 = \dfrac{IK^2}{2}$, или $IJ^2 = \dfrac{2S}{\sqrt{3}}$, или $IJ = \sqrt{\dfrac{2S}{\sqrt{3}}}$.

Ответ: $\sqrt{\dfrac{2S}{\sqrt{3}}}$.

Задача 2. Постройте сечение правильной пирамиды $QABCD$ плоскостью, проходящей через боковое ребро и противоположную ему вершину основания. Найдите площадь этого сечения, учитывая, что все рёбра этой пирамиды равны a.

Решение. Пусть $QABCD$ — правильная пирамида; $AB = BC = CD = DA = QA = QB = QC = QD = a$.

Q, A, C — вершины пирамиды, следовательно, QAC — искомое сечение.

$AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$, так как $ABCD$ — квадрат.

В $\triangle\ AQC$ $AQ = QC = a$, $AC = a\sqrt{2}$. Следовательно, $\angle AQC = 90°$ и $S_{\text{сеч}} = S_{AQC} = \dfrac{a^2}{2}$.

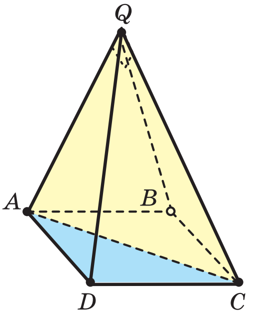

Рис. 115

Ответ: $\dfrac{a^2}{2}$.

1. Количество диагональных сечений четырёхугольной пирамиды равно:

а) 1; в) 3;

б) 2; г) 4.

2. Определите вид фигуры, которая является сечением куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершины A, C и D_1.

62. Изобразите куб $STRUS_1T_1R_1U_1$ и отметьте точки B и C на рёбрах SU и RU. Постройте сечение куба плоскостью BCT_1.

63. Точки A, B, C лежат на рёбрах MM_1, M_1P_1, M_1T_1 призмы $MPQTM_1P_1Q_1T_1$ (рис. 116). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение призмы плоскостью ABC.

64. Изобразите куб $MNOPM_1N_1O_1P_1$ и отметьте середины A, B и C рёбер NM, NO и NN_1. Используя полученный рисунок:

а) постройте сечение куба плоскостью ABC;

б) докажите, что треугольник ABC правильный;

в) найдите площадь треугольника ABC, приняв ребро куба равным 1 м.

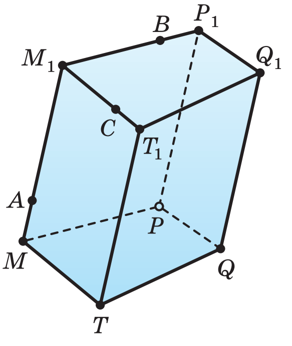

Рис. 116

65. Изобразите куб $NORQN_1O_1R_1Q_1$ и отметьте середины A и B его рёбер NQ и QR. Докажите, что сечение куба плоскостью ABQ_1 является равнобедренным треугольником. Найдите ребро куба, учитывая, что периметр этого треугольника равен a.

66. Постройте сечение пирамиды $ABCD$ плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, AC, AD. Найдите площадь этого сечения, учитывая, что все рёбра этой пирамиды равны a.

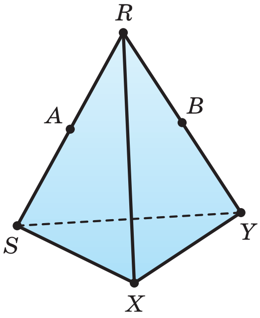

Рис. 117

67. На рисунке 117 изображена правильная пирамида $RSXY$, у которой грань основания равна боковой грани. На её рёбрах RS и RY отмечены их середины A и B. Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение пирамиды плоскостью ABX. Докажите, что треугольник ABX является равнобедренным, и найдите его периметр и площадь, учитывая, что ребро пирамиды равно a.

68. Рёбра UX, UZ, UU_1 прямоугольного параллелепипеда $UXYZU_1X_1Y_1Z_1$ равны 6 см, 6 см, 8 см соответственно. Докажите, что сечение параллелепипеда плоскостью XY_1Z является равнобедренным треугольником, и найдите высоты этого треугольника.

69. Изобразите прямоугольный параллелепипед $TPQRT_1P_1Q_1R_1$ и постройте его сечение плоскостью, которая проходит через прямую T_1Q_1 и вершину R. Найдите площадь этого сечения, учитывая, что рёбра RT и RQ равны друг ивдругу и равны l, а радиус окружности, описанной около четырёхугольника RQQ_1R_1, равен a.

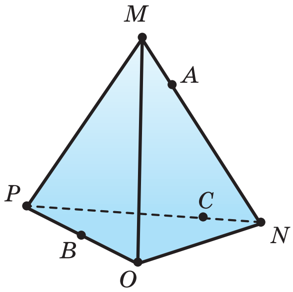

Рис. 118

70. На рисунке 118 изображена треугольная пирамида $MNOP$. Постройте сечение треугольной пирамиды $MNOP$ плоскостью ABC, учитывая, что точки A, B, C выбраны соответственно на рёбрах MN, OP, PN.

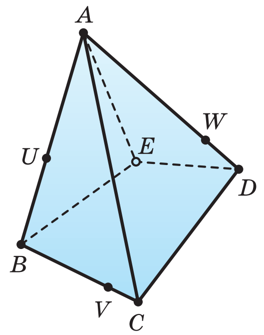

Рис. 119

71. На рисунке 119 точки U, V, W выбраны на рёбрах AB, BC, AD пирамиды $ABCDE$. Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение пирамиды плоскостью UVW.

72. Постройте сечение четырёхугольной призмы $RSTVR_1S_1T_1V_1$ плоскостью ABC, учитывая, что точки A, B, C выбраны соответственно на рёбрах RS, RV, TT_1 (рис. 120).

73. Сторона основания правильной треугольной призмы $CDEC_1D_1E_1$ равна 12 см, а её боковое ребро — 6 см. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, которой принадлежит сторона основания и противоположная вершина второго основания.

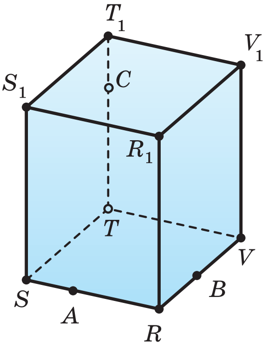

Рис. 120

74. Ребро основания правильной треугольной пирамиды и её боковое ребро соответственно равны k и l. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через две вершины основания и середину бокового ребра.

75*. Точка C — середина ребра JL длиной a правильной треугольной пирамиды $IJKL$, боковая грань которой равна грани основания.

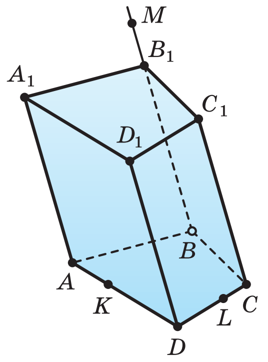

Рис. 121

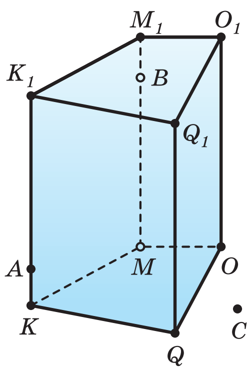

Рис. 122

Постройте сечение пирамиды плоскостью IKC и найдите радиусы окружностей, одна из которых вписана в это сечение, а вторая описана около него.

76*. Изобразите куб $RSTVR_1S_1T_1V_1$ и отметьте середину C его ребра SS_1. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через прямую RT и точку C. Найдите медианы треугольника RTC, учитывая, что ребро куба равно 40 мм.

77. Точки K и L выбраны на рёбрах DA и DC призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$, а точка M — на луче BB_1 за точкой B_1 (рис. 121). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение призмы плоскостью KLM.

78. Точки A и B лежат соответственно на рёбрах KK_1 и MM_1 призмы $KMOQK_1M_1O_1Q_1$, а точка C — на плоскости грани $KMOQ$ (рис. 122). Постройте сечение призмы плоскостью ABC.

79. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ACEHA_1C_1E_1H_1$ плоскостью KLM, учитывая, что точки K, L, M лежат соответственно на лучах C_1A_1, EE_1, H_1H за точками A_1, E_1, H (рис. 123).

80. Точки A и B лежат на рёбрах KK_1 и LL_1 треугольной призмы $KLMK_1L_1M_1$, а точка C — на плоскости KLM (рис. 124). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение призмы плоскостью ABC.

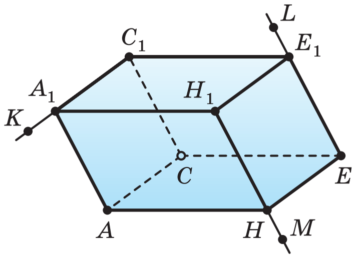

Рис. 123

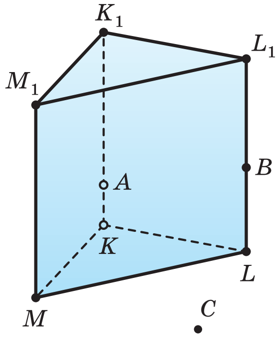

Рис. 124

81. На рисунке 125 изображена призма $IJKLI_1J_1K_1L_1$, на рёбрах J_1I_1, J_1K_1, LL_1 выбраны точки A, B, C. Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение призмы плоскостью ABC.

82. Изобразите призму $MNOPM_1N_1O_1P_1$ и на её рёбрах NN_1, MP, OP выберите точки C, D, E. Постройте сечение призмы плоскостью CDE.

83. Дана правильная призма $XYZX_1Y_1Z_1$, все рёбра которой равны друг другу. Найдите площадь сечения призмы плоскостью XY_1Z_1, учитывая, что полная поверхность призмы равна S.

84. В правильной треугольной призме плоскость, проходящая через сторону её основания и противоположную вершину другого основания, делит полную поверхность призмы в отношении 2 : 3. Найдите эту поверхность, учитывая, что ребро основания равно a.

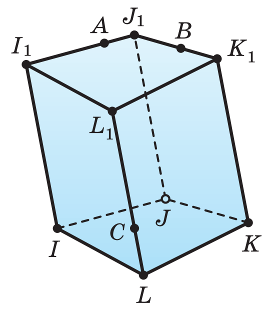

Рис. 125

85. На рисунке 126 изображена правильная пирамида $ABCDE$ и на ребре AE отмечена его середина M. Треугольник BMD — сечение этой пирамиды плоскостью, которой принадлежат прямая BD и точка M. Найдите высоты треугольника BMD, учитывая, что все рёбра пирамиды равны 20 мм.

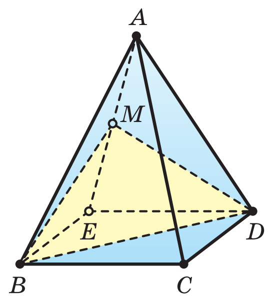

Рис. 126

86. Точка A — середина бокового ребра KE правильной четырёхугольной пирамиды $KCDEF$, все рёбра которой равны друг другу. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую DF и точку A. Найдите полную поверхность пирамиды, учитывая, что площадь этого сечения равна S.

87. Перенесите в тетрадь рисунок 127, на котором изображена четырёхугольная пирамида $MNOPQ$ и отмечены точки A, B, C на рёбрах PQ, PM, OM соответственно. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки A, B, C.

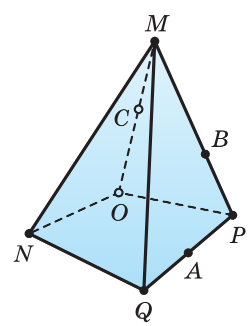

Рис. 127

88. Изобразите четырёхугольную пирамиду $STUVW$ и постройте её сечение плоскостью, проходящей через точки A, B, C на рёбрах ST, TW, VW.

89. Точка A лежит на ребре PQ треугольной пирамиды $PQRS$, точка B — на луче QR за точкой R, а точка C — на плоскости QRS (рис. 128). Постройте сечение пирамиды плоскостью ABC.

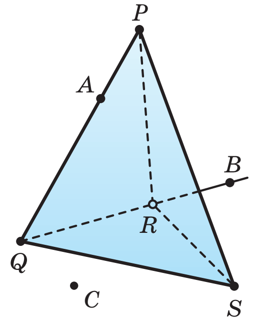

Рис. 128

90. Имеется пирамида $RMNOP$, все рёбра которой равны друг другу. Сечением этой пирамиды плоскостью, проходящей через вершину R и прямую NP, является треугольник RNP. Найдите боковую поверхность пирамиды, учитывая, что радиус окружности, описанной около этого треугольника, равен R.

91. Изобразите правильную пирамиду $TUVWX$ и постройте её сечение плоскостью, проходящей через вершину T и прямую UW. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, учитывая, что площадь построенного сечения равна площади основания, а ребро основания равно l.

92. Пирамида V_1P_1QW имеет своими вершинами вершины куба $PQVWP_1Q_1V_1W_1$ (рис. 129). Найдите полную поверхность этой пирамиды, учитывая, что ребро куба равно 1 м.

93*. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABTVA_1B_1T_1V_1$ плоскостью AB_1T. Найдите радиус окружности, описанной около боковой грани параллелепипеда, учитывая, что его основанием является квадрат со стороной a, а площадь построенного сечения равна S.

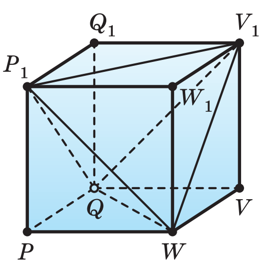

Рис. 129

94*. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $IJKLI_1J_1K_1L_1$ плоскостью, проходящей через вершину I и прямую J_1L_1. Найдите полную поверхность параллелепипеда, учитывая, что его основанием является квадрат со стороной a, а угол J_1IL_1 равен γ.

95*. Четырёхугольник $RBCY$ — сечение прямоугольного параллелепипеда плоскостью, проходящей через прямую RY и точку A на луче SS_1 за точкой S_1 (рис. 130). Докажите, что это сечение является равнобедренной трапецией, и найдите её площадь, учитывая, что основанием параллелепипеда является квадрат $RSYZ$ со стороной c, высота RR_1 параллелепипеда равна h, а вершина S_1 делит отрезок SA пополам.

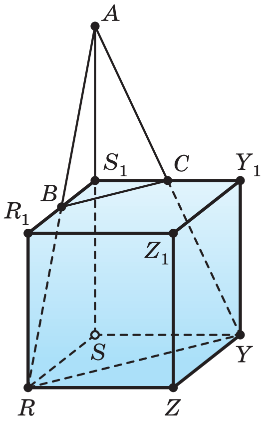

Рис. 130

96*. Изобразите куб $KPTVK_1P_1T_1V_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через прямую K_1T и такую точку A луча V_1T_1, что вершина T_1 делит отрезок V_1A в соотношении 2 : 1, если считать от точки V_1. Найдите периметр этого сечения, учитывая, что ребро куба равно 2 м.

97. Изобразите треугольную пирамиду $CDEF$ и постройте её сечение плоскостью, проходящей через середины рёбер FC, FD, FE. Найдите площадь грани пирамиды, учитывая, что все её грани — равные друг другу правильные треугольники, а площадь сечения равна 120 см^2.

98*. Ребро основания правильной четырёхугольной призмы равно a, а площадь сечения призмы плоскостью, которая проходит через концы рёбер, выходящих из одной вершины, равна Q. Найдите боковую поверхность призмы.

Пространственное моделирование

При изготовлении балки из цилиндрического бревна поступают следующим образом:

1) на торце бревна проводят диаметр;

2) делят его на пять равных частей;

3) второй диаметр проводят так, чтобы его проекция на первый составила $\frac{3}{5}$ его;

4) концы построенных диаметров принимают за вершины четырёхугольного сечения и удаляют излишки древесины.

Сравните прочность такой балки с прочностью балки с квадратным сечением, полученной из такого же бревна, учитывая, что прочность балки с прямоугольным сечением пропорциональна ширине и квадрату высоты сечения.

Проверьте свои знания

1. Три точки расположены на одинаковом расстоянии друг от друга. Можно ли выбрать ещё одну точку, равноудалённую от всех остальных?

2. Какое наибольшее количество прямых можно провести через различные пары из пяти точек:

а) 5; б) 6; в) 8; г) 10?

3. Какое наибольшее количество плоскостей можно провести через разные тройки из четырёх точек?

4. Сколько образуется линий при попарном пересечении трёх плоскостей?

а) 2; б) 3; в) 4; г) 6.

5. Нарисуйте призму $ABCDEFPQRSTU$, основания которой — правильные шестиугольники. Назовите:

а) плоскости, пересекающиеся с плоскостью UQR;

б) плоскости, пересекающиеся с прямой FT.

6. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 6 см, а боковое ребро — 11 см. Найдите полную поверхность призмы.

7. Ребро основания правильной треугольной призмы $IJKPML$ относится к боковому ребру как 2 : 3. Найдите боковую поверхность призмы, учитывая, что длина ломаной $IPLKMI$ равна $4 + \sqrt{13}$ см.

8. Боковая поверхность правильной треугольной пирамиды равна 30 420 мм^2, а её боковое ребро — 169 мм. Найдите площадь основания пирамиды.

9. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 12 см, а отрезок, соединяющий высоту пирамиды с центром основания, — 16 см. Найдите:

а) боковое ребро и апофему пирамиды;

б) боковую поверхность пирамиды;

в) полную поверхность пирамиды.

10. Площадь сечения правильной четырёхугольной пирамиды $RUSVW$ с ребром основания a плоскостью RUV равна Q. Найдите боковую поверхность пирамиды.