§ 4. Взаимное расположение прямых в пространстве

А) Две прямые пространства называются **параллельными прямыми**, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек.

На плоскости через данную точку можно провести единственную прямую, параллельную данной. Это утверждение истинно и в пространстве.

Теорема 1. Через точку вне данной прямой можно провести единственную прямую, параллельную данной прямой.

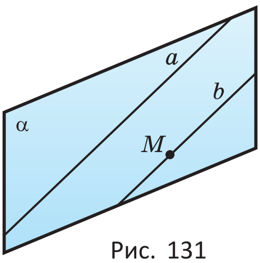


Рис. 131

Доказательство. Пусть имеется прямая a и точка M вне её (рис. 131). По теореме **3** из параграфа **2** через прямую a и точку M проходит единственная плоскость — плоскость α. Если прямая проходит через точку M параллельно прямой a, то она должна лежать в плоскости α. В плоскости α через точку M проходит единственная прямая b, параллельная прямой a. Прямая b — искомая прямая, и она единственная.

На плоскости, если одна из параллельных прямых пересекает некоторую прямую, то и другая также пересекает её. Аналогичное утверждение истинно и в пространстве.

Теорема 2. Если одна из двух параллельных прямых пересекает плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

Доказательство. Пусть есть две параллельные прямые b и c, и одна из них — прямая b — пересекает плоскость β в точке M (рис. 132).

Поскольку прямые b и c параллельны, то они лежат в одной плоскости, пусть это будет плоскость γ. Плоскости β и γ имеют общую точку M, поэтому по аксиоме **3** они имеют общую прямую l. Эта прямая лежит в плоскости γ и пересекает прямую b в точке M, поэтому она пересекает параллельную ей прямую c в некоторой точке N.

Поскольку прямая l лежит и в плоскости β, то точка N принадлежит этой плоскости. Значит, точка N — общая точка плоскостей β и γ.

Остаётся доказать, что прямая c с плоскостью β не имеет других общих точек. Допустим, что это не так. Пусть прямая c имеет с плоскостью β ещё одну общую точку K. Тогда по аксиоме **2** прямая c лежит в плоскости β. Получается, что прямая c — общая прямая плоскостей β и γ. Но такой прямой является прямая l. Значит, прямая c совпадает с прямой l, что невозможно, так как прямая b параллельна прямой c и пересекает прямую l.

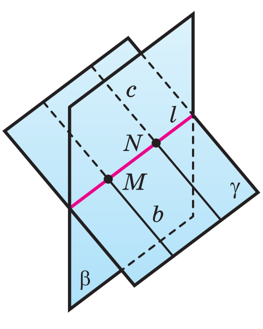


Рис. 132

Вы знаете, что если на плоскости две прямые параллельны третьей, то они параллельны и друг другу. Докажем, что такое утверждение истинно и в пространстве.

Теорема 3. Если две различные прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны и друг другу.

Доказательство. Пусть прямые m и n параллельны прямой p (рис. 133). Докажем, что прямая m параллельна прямой n, т. е. прямые m и n лежат в одной плоскости и не пересекаются.

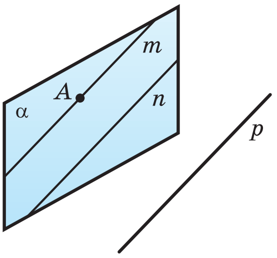


Рис. 133

На прямой m выберем произвольно точку A, через неё и прямую n проведём плоскость α. Докажем, что прямая m лежит в этой плоскости. Допустим, что это не так. Учитывая, что прямая m имеет с плоскостью α общую точку, нужно согласиться с тем, что прямая m пересекает плоскость α. Тогда по теореме **2** эту плоскость пересекает прямая p, так как она параллельна прямой m, и прямая n, которая параллельна прямой p. Но такое невозможно, так как прямая n лежит в плоскости α. Значит, прямая m вместе с прямой n лежат в плоскости α.

Прямые m и n не пересекаются. Допустим, что это не так, т. е. прямые m и n пересекаются в некоторой точке B. Получается, что через точку B проходят две различные прямые m и n, параллельные прямой p, что противоречит теореме 1.

Используя теорему **3**, можно доказать важные утверждения о параллелепипеде.

Теорема 4. У параллелепипеда: а) противоположные грани равны; б) все его диагонали пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

Доказательство. Пусть дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 134).

а) Докажем, например, равенство противоположных граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$.

Отрезки AB и A_1B_1 а также BC и B_1C_1 равны как противоположные стороны параллелограммов ABB_1A_1 и BCC_1B_1 соответственно. Отрезки AA_1 и CC_1 параллельны и равны друг другу, так как каждый из них параллелен отрезку BB_1 и равен ему. Значит, четырёхугольник ACC_1A_1 — параллелограмм. А поэтому отрезки AC и A_1C_1 равны друг другу как противоположные стороны этого параллелограмма.

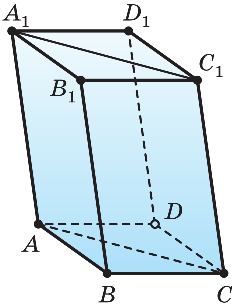


Рис. 134

Поскольку $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ и $AC = A_1C_1$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, поэтому равны и углы ABC и $A_1B_1C_1$. Значит, равны друг другу и параллелограммы-грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$.

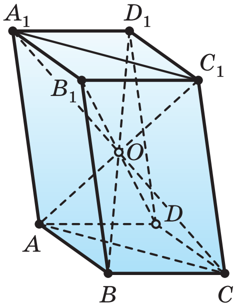


Рис. 135

б) Докажем, что все диагонали параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Четырёхугольник AA_1C_1C — параллелограмм, так как его противоположные стороны AA_1 и CC_1 равны и параллельны друг другу, потому что каждый из отрезков AA_1 и CC_1 равен отрезку DD_1 и параллелен ему (рис. 135). Поэтому диагонали AC_1 и CA_1 точкой пересечения O делятся пополам.

Четырёхугольник DCB_1A_1 — также параллелограмм, поэтому его диагональ DB_1 пересекает другую диагональ CA_1 в её середине, т. е. в точке O.

Наконец, четырёхугольник ABC_1D_1 — параллелограмм, поэтому его диагональ BD_1 пересекает другую диагональ AC_1 в её середине O.

Если две прямые пересекаются (рис. 136) или параллельны (рис. 137), то они лежат в одной плоскости. Две прямые, которые не лежат в одной плоскости, называются **скрещивающимися** (рис. 138).

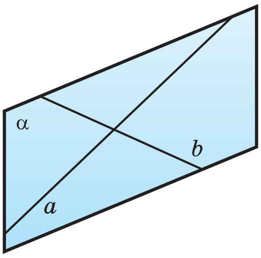


Рис. 136

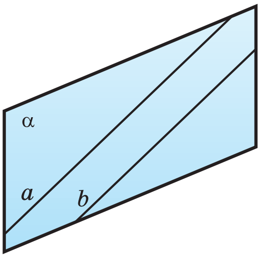


Рис. 137

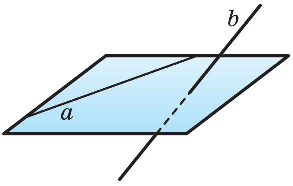


Рис. 138

Докажем признак скрещивающихся прямых.

Теорема 5. Если из двух прямых одна принадлежит некоторой плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то такие прямые являются скрещивающимися.

Доказательство. Пусть прямая p лежит в плоскости α, а прямая q пересекает эту плоскость в точке A, не принадлежащей прямой p (рис. 139). Докажем, что прямые p и q скрещиваются.

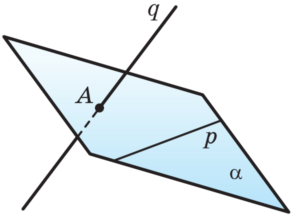


Рис. 139

Допустим, что прямые p и q лежат в некоторой плоскости β. Тогда плоскости β принадлежит прямая p и точка A, которая принадлежит прямой q, и, значит, плоскость β совпадает с плоскостью α. Получили, что плоскости α принадлежит прямая q, которая по условию ей не принадлежит. Это противоречие означает, что сделанное допущение ложно.

Б) Мы знаем, что *углом между пересекающимися прямыми* называется величина одного из четырёх образовавшихся при этом углов, который не больше 90° (рис. 140).

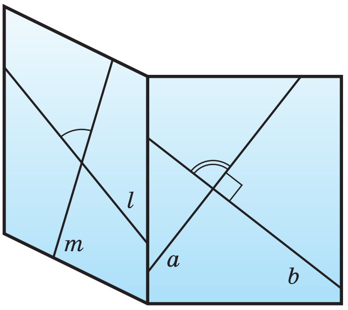


Рис. 140

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, которые параллельны данным скрещивающимся прямым.

Докажем, что это определение корректно, т. е. не зависит от выбора точки, через которую проходят прямые, параллельные данным скрещивающимся прямым.

Теорема 6. Угол между пересекающимися прямыми равен углу между параллельными им пересекающимися прямыми.

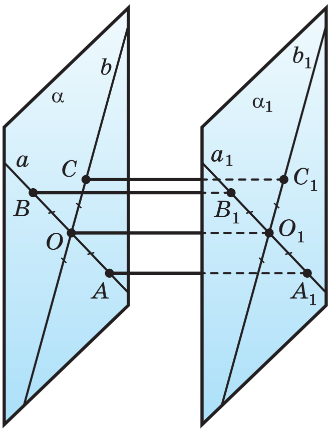


Рис. 141

Доказательство. Пусть прямые a и b пересекаются в точке O, прямые a_1 и b_1 — в точке O_1 и $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$ (рис. 141).

От точки O на прямой a отложим равные отрезки OA и OB, а на прямой b — отрезок OC, равный отрезку OA. Через точки A и B проведём прямые, параллельные прямой OO_1, они пересекут прямую a_1 в точках A_1 и B_1 соответственно. Через точку C проведём прямую, параллельную прямой OO_1, она пересечёт прямую b_1 в точке C_1.

Четырёхугольник OO_1A_1A является параллелограммом, так как его противоположные стороны OA и O_1A_1 параллельны и равны. Поэтому $AA_1 = OO_1$ и $AA_1 \parallel OO_1$. Аналогично, поскольку четырёхугольник OO_1B_1B — параллелограмм, то $BB_1 = OO_1$ и $BB_1 \parallel OO_1$, а так как OO_1C_1C — параллелограмм, то $BB_1 = CC_1$ и $CC_1 \parallel OO_1$.

Поскольку каждый из отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 равен и параллелен отрезку OO_1, то они равны и параллельны друг другу. Поэтому четырёхугольники AA_1C_1C и BB_1C_1C оба являются параллелограммами и, значит, $AC = A_1C_1$ и $BC = B_1C_1$.

Теперь по признаку равенства треугольников по трём сторонам можно утверждать, что $\triangle AOC = \triangle A_1O_1C_1$ и $\triangle BOC = \triangle B_1O_1C_1$, а потому $\angle AOC = \angle A_1O_1C_1$ и $\angle BOC = \angle B_1O_1C_1$.

Таким образом, мы доказали, что углы, образованные при пересечении прямых a и b, равны соответственным углам, образованным при пересечении прямых a_1 и b_1.

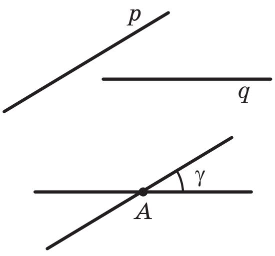


Рис. 142

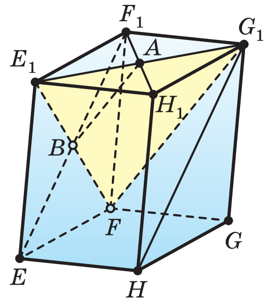


Рис. 143

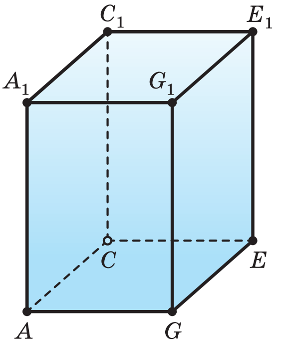


Рис. 144

На рисунке 142 показано, как можно найти угол между скрещивающимися прямыми: выбрать произвольно точку A пространства и через неё провести прямые, параллельные данным скрещивающимся прямым. Понятно, что точка A может быть выбрана и на одной из скрещивающихся прямых.

Пример. На рисунке 143 точки A и B — точки пересечения диагоналей граней $E_1F_1G_1H_1$ и EE_1F_1F параллелепипеда $EFGHE_1F_1G_1H_1$. Построим угол между скрещивающимися прямыми AB и HG_1. Для этого в плоскости E_1FG_1, которой принадлежат точка G_1 и прямая AB, через точку G_1 параллельно прямой AB проведём прямую. Это прямая G_1F. Угол FG_1H — искомый угол между скрещивающимися прямыми AB и HG_1.

Угол между параллельными прямыми считается равным нулю.

Прямые, угол между которыми равен 90°, называются **перпендикулярными прямыми**.

Перпендикулярные прямые могут быть пересекающимися, а могут быть и скрещивающимися. Например, перпендикулярные прямые AC и AG, которые проходят через соответствующие рёбра прямоугольного параллелепипеда $ACEGA_1C_1E_1G_1$ (рис. 144), пересекаются, а перпендикулярные прямые AC и EE_1 скрещиваются.

?

1. Сформулируйте утверждение о прямых, проходящих через данную точку параллельно данной прямой.

2. Какие две прямые пространства называются параллельными; пересекающимися; скрещивающимися?

3. Сформулируйте утверждение о параллельных прямых, из которых одна пересекает данную плоскость.

4. Сформулируйте утверждение о прямых, параллельных некоторой прямой.

5. Сформулируйте свойство противоположных граней прямоугольного параллелепипеда; диагоналей прямоугольного параллелепипеда.

6. Сформулируйте признак скрещивающихся прямых.

7. Какой угол называют углом между пересекающимися прямыми; скрещивающимися прямыми; параллельными прямыми?

8. Как построить угол между скрещивающимися прямыми?

9. Какие прямые называют перпендикулярными?

10. Точки M, N, P — соответственно середины рёбер HE, HF, HG треугольной пирамиды $EFGH$ (рис. 145), а точка K лежит на отрезке FN. Определите взаимное расположение прямых:
а) PK и FG; б) MP и EG; в) NH и EF.

11. Установите, пересекаются ли прямые, на которых лежат основания двух треугольников BAC и DFE (рис. 146), имеющих общую среднюю линию.

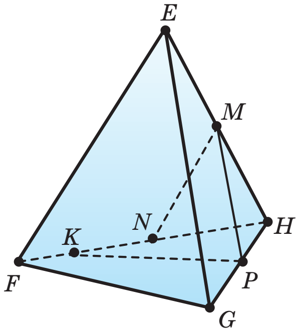


Рис. 145

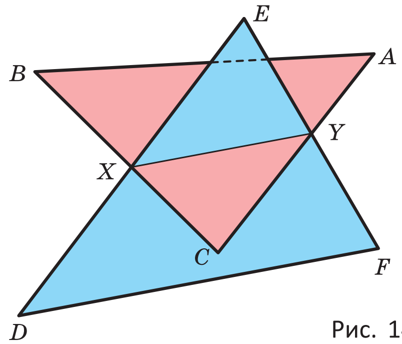


Рис. 146

12. Определите взаимное расположение линии реки и линии моста (рис. 147).


Рис. 147

13. Используя рисунок 148, на котором дан куб $LKMNL_1K_1M_1N_1$, назовите скрещивающиеся прямые.

14. В треугольной пирамиде $EFGH$ точки M, N, P — середины рёбер HE, HF, HG соответственно, а точка K лежит на отрезке FN (рис. 149). Определите взаимное расположение прямых:
а) KP и MN; б) MN и EG; в) MH и FG.

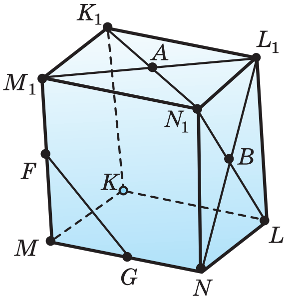


Рис. 148

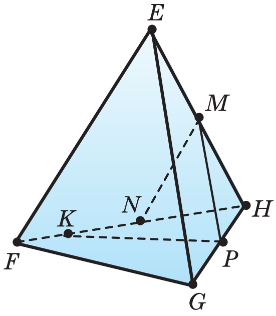


Рис. 149

Задача 1. Диагонали грани $L_1K_1M_1N_1$ куба $LKMNL_1K_1M_1N_1$ пересекаются в точке A, а диагонали грани LL_1N_1N — в точке B. Серединами рёбер MM_1 и MN являются точки F и G соответственно (рис. 150). Определите взаимное расположение прямых AB и FG.

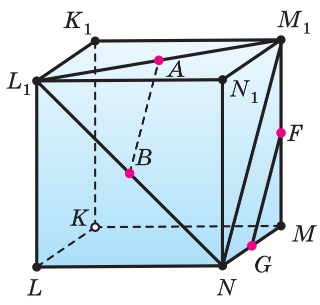


Рис. 150

Р е ш е н и е. $LKMNL_1K_1M_1N_1$ — куб, следовательно, $L_1K_1M_1N_1$ — квадрат и LL_1N_1N — квадрат.

$L_1K_1M_1N_1$ — квадрат и $L_1M_1 \cap K_1N_1 = A$, поэтому A — середина L_1M_1.

LL_1N_1N — квадрат и $L_1N \cap LN_1 = B$, поэтому B — середина L_1N.

Поскольку AB — средняя линия $\triangle NL_1M_1$ (A — середина L_1M_1 и B — середина L_1N), то $AB \parallel NM_1$.

Поскольку FG — средняя линия $\triangle NMM_1$ (F — середина MM_1 и G — середина NM), то $FG \parallel NM_1$.

$AB \parallel NM_1$ и $FG \parallel NM_1$, поэтому $AB \parallel FG$.

О т в е т: $AB \parallel FG$.

Задача 2. Отрезок XY имеет с плоскостью β одну общую точку X. Через точку Y и середину Z отрезка XY проведены параллельные прямые, которые пересекают плоскость β в точках Y_1 и Z_1 соответственно (рис. 151). Найдите длину отрезка YY_1, учитывая, что $ZZ_1 = 10$ см.

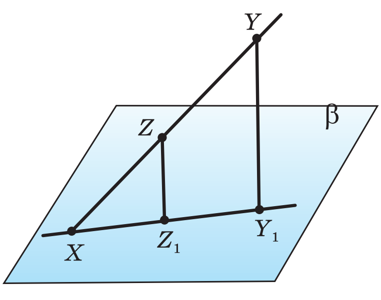


Рис. 151

Р е ш е н и е. Пересекающиеся прямые XY и YY_1 определяют плоскость XYY_1.

$XY_1 \subset (XYY_1)$ и $XY_1 \subset \beta$, следовательно,

$$(XYY_1) \cap \beta = XY_1.$$

$Y_1 \in \beta$, $Z_1 \in \beta$ и $YY_1 \parallel ZZ_1$, следовательно,

$$ZZ_1 \subset (XYY_1) \text{ и } Z_1 \in XY_1.$$

ZZ_1 — средняя линия $\triangle XYY_1$ (Z — середина XY и $YY_1 \parallel ZZ_1$), следовательно,

$$YY_1 = 2ZZ_1 = 2 \cdot 10 = 20 \text{ (см)}.$$

О т в е т: 20 см.

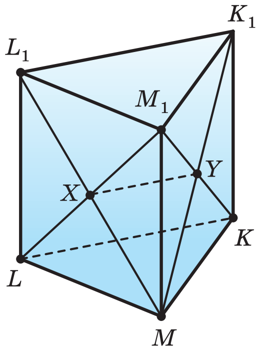


Рис. 152

Задача 3. $LKML_1K_1M_1$ — правильная треугольная призма, длина каждого ребра которой равна 1 м. Диагонали граней LL_1M_1M и MM_1K_1K пересекаются соответственно в точках X и Y (рис. 152). Найдите площадь четырёхугольника XL_1K_1Y.

Р е ш е н и е. $LKML_1K_1M_1$ — правильная треугольная призма и $LK = KM = LM = L_1K_1 = K_1M_1 = L_1M_1 = LL_1 = KK_1 = MM_1 = 1$ м, следовательно, LL_1M_1M и MM_1K_1K — квадраты со стороной 1 м.

Поэтому $ML_1 = MK_1 = \sqrt{2}$ м.

$X = ML_1 \cap LM_1$ и $Y = KM_1 \cap MK_1$, поэтому $MX = XL_1$ и $K_1Y = YM$.

$MX = XL_1$ и $K_1Y = YM$, поэтому XY — средняя линия $\triangle ML_1K_1$.

XY — средняя линия $\triangle ML_1K_1$, поэтому $XY = \frac{1}{2} L_1K_1 = \frac{1}{2}$ (м) и $XY \parallel L_1K_1$.

XY — средняя линия $\triangle ML_1K_1$, поэтому $S_{MXY} = \frac{1}{4} S_{ML_1K_1}$, $S_{XL_1K_1Y} = \frac{3}{4} S_{ML_1K_1}$.

$$p_{ML_1K_1} = \frac{ML_1 + L_1K_1 + MK_1}{2} = \frac{\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2}}{2} = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2} \text{ (м)}.$$

$$S_{ML_1K_1} = \sqrt{p_{ML_1K_1}\left(p_{ML_1K_1} - ML_1\right)\left(p_{ML_1K_1} - L_1K_1\right)\left(p_{ML_1K_1} - MK_1\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1+2\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1+2\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\right)\left(\frac{1+2\sqrt{2}}{2} - 1\right)\left(\frac{1+2\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1+2\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2\sqrt{2}-1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{4} \text{ (м}^2\text{)}.$$

$$S_{XL_1K_1Y} = \frac{3}{4} S_{ML_1K_1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{16} \text{ (м}^2\text{)}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{7}}{16}$ м^2.

Задача 4. На ребре HX треугольной пирамиды $HXYZ$ (рис. 153) выбрана такая точка S, что $HS : SX = 2 : 5$, и через неё проведена прямая q, параллельная медиане HP грани HYZ. Найдите медиану HP, учитывая, что длина отрезка прямой q, находящегося внутри пирамиды, равна 35 см.

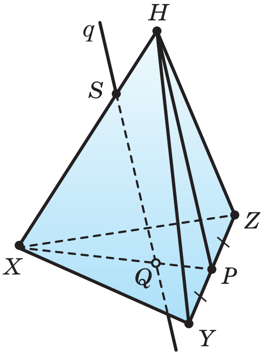


Рис. 153

Решение. Поскольку точки X и P лежат как в плоскости HXP, так и в плоскости XYZ, то $(HXP) \cap (XYZ) = XP$. Точка S прямой HX лежит в плоскости HXP, так как $HX \subset (HXP)$.

Прямая q проходит через точку S плоскости HXP параллельно прямой HP этой плоскости, поэтому $q \subset (HXP)$.

Поскольку прямые $q \parallel HP$, а прямые HP и XP пересекаются, то пересекаются и прямые q и XP. Пусть $q \cap XP = Q$.

$$\triangle HXP \sim \triangle SXQ \ (SQ \parallel HP), \text{ поэтому } HP : SQ = HX : SX,$$

$$HP = SQ \cdot HX : SX = SQ \cdot \frac{HS + SX}{SX} = SQ \cdot \left(\frac{HS}{SX} + 1\right) =$$

$$= 35 \cdot \left(\frac{2}{5} + 1\right) = 49 \text{ (см)}.$$

Ответ: 49 см.

Задача 5. Прямая l параллельна диагонали AC параллелограмма $ABCD$ и не лежит в его плоскости. Докажите, что прямые l и CD — скрещивающиеся, и найдите угол между ними, учитывая, что $\angle BAC = 60°$.

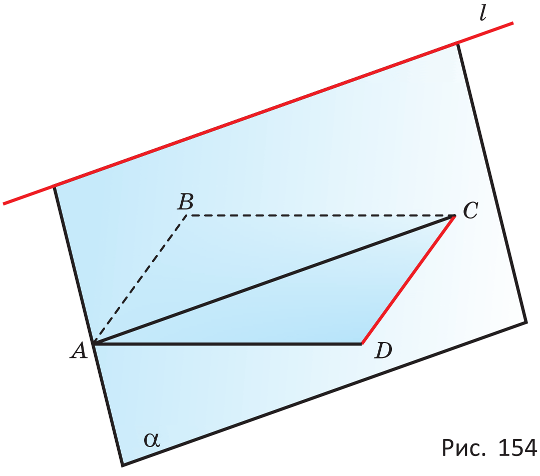


Рис. 154

Решение. Пусть α — плоскость, в которой лежат параллельные прямые l и AC. Тогда $\alpha \cap (ACD) = AC$ (рис. 154).

Поскольку $C \in \alpha$, а $D \notin \alpha$, то $C = \alpha \cap CD$.

Прямые l и CD — скрещивающиеся по теореме 5 ($l \subset \alpha$, $C = \alpha \cap CD$ и $C \notin l$).

$l \parallel AC$, поэтому угол между l и CD равен углу между AC и CD и равен углу DCA (теорема **6**).

$ABCD$ — параллелограмм, следовательно, $\angle DCA = \angle BAC = 60°$.

Ответ: $60°$.

99. Точки M и N — середины рёбер PC и PD треугольной пирамиды $PCDF$, а точки U и V — середины отрезков EM и EN (рис. 155). Установите, являются ли параллельными прямые MN и UV.

100. Докажите, что середины сторон пространственного четырёхугольника (рис. 156) являются вершинами параллелограмма.

101. Параллелограмм $MNKL$ и треугольник NAK не лежат в одной плоскости. Прямая a проходит через точку P прямой AK и параллельна прямой NK. Определите взаимное расположение прямых a и ML.

102. Есть правильная четырёхугольная пирамида $PMNKL$. На прямой PL выбрана точка D, через которую проведена прямая l, параллельная прямой LK. Определите взаимное расположение прямых MN и l.

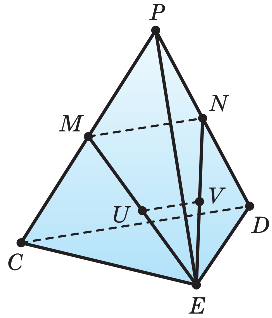
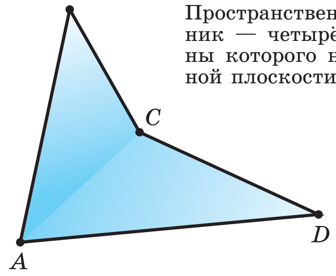


Рис. 155



Пространственный четырёхугольник — четырёхугольник, вершины которого не принадлежат одной плоскости.

Рис. 156

103. Имеются параллелограмм $MNOP$ и трапеция $MNEK$ с основанием EK, причём эти четырёхугольники не лежат в одной плоскости.

а) Установите взаимное расположение прямых OP и EK.

б) Найдите периметр трапеции, учитывая, что в неё можно вписать окружность, а её основания MN и EK равны 45 см и 55 см соответственно.

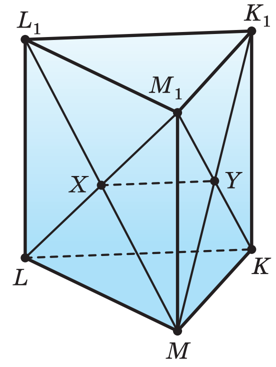


Рис. 157

104. $LKML_1K_1M_1$ — правильная треугольная призма, длина каждого ребра которой равна 2 м. Диагонали граней LL_1M_1M и MM_1K_1K пересекаются соответственно в точках X и Y (рис. 157). Найдите периметр четырёхугольника $XLKY$.

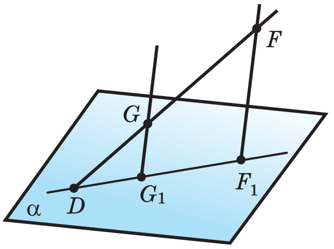


Рис. 158

105. Точка P лежит на продолжении ребра NM параллелепипеда $LKMNL_1K_1M_1N_1$. Найдите расстояние от точки N до точки пересечения прямой M_1P с плоскостью LL_1N, учитывая, что $MM_1 = 24$ м, $NM = 12$ м, $PM = 18$ м.

106. Конец D отрезка DF принадлежит плоскости α, через другой его конец F и его точку G проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках F_1 и G_1 (рис. 158). Найдите длину отрезка GG_1, учитывая, что $FF_1 = 32$ см и $DG : GF = 3 : 5$.

107. Вершины M и N трапеции $MNLK$ с основаниями NL и KM принадлежат плоскости γ, а две другие вершины не принадлежат ей. Найдите расстояние от точки M до точки пересечения прямой LK с плоскостью γ, учитывая, что $MK = 16$ см, $MN = 9$ см, $NL = 12$ см.

108. Точка E является точкой отрезка TR, который не пересекает плоскость γ. Параллельные прямые, проведённые через точки T, R, E, пересекают плоскость γ в точках T_1, R_1, E_1 соответственно. Докажите, что точки T_1, R_1, E_1 лежат на одной прямой, и найдите отрезок EE_1, учитывая, что $TT_1 = 27$ см, $RR_1 = 15$ см, $TE : RE = 1 : 3$.

109. На отрезке AB, конец A которого принадлежит плоскости α, выбрана точка C, и через точки B и C проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках B_1 и C_1 соответственно. Найдите отрезок CC_1, учитывая, что:

а) точка C — середина отрезка AB и $BB_1 = 14$ см;

б) $AC : CB = 3 : 2$ и $BB_1 = 50$ см.

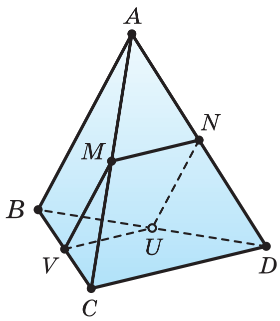


Рис. 159

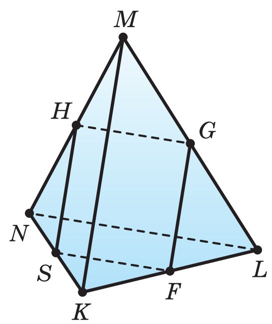


Рис. 160

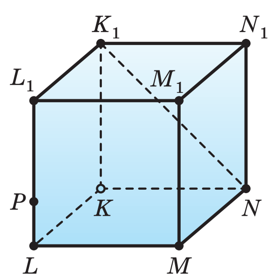


Рис. 161

110. Точки M, N, U, V — соответственно середины рёбер AC, AD, BD, BC треугольной пирамиды $ABCD$ (рис. 159). Найдите периметр четырёхугольника $MNUV$, учитывая, что $AB = 20$ см, $CD = 30$ см.

111. Точки H, G, F, S — середины рёбер MN, ML, LK, KN треугольной пирамиды $MKLN$ (рис. 160). Найдите периметр четырёхугольника $HGFS$, учитывая, что $LN = 18$ мм, $MK = 22$ мм.

112. Точка P выбрана на ребре LL_1 куба $KLMNK_1L_1M_1N_1$ (рис. 161). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте точку пересечения с плоскостью M_1N_1M прямой q, проходящей через точку P и параллельной прямой NK_1.

113. Через вершины D и Q треугольника PDQ со стороной PQ, равной 20 см, проведена плоскость α, которой не принадлежит вершина P. Учитывая, что прямая x параллельна прямой PQ и пересекает сторону PD в такой точке C, что $PC : CD = 2 : 3$:

а) докажите, что прямая x пересекает плоскость α;

б) найдите расстояние от точки C до точки пересечения прямой x с плоскостью α.

114. На ребре GH треугольной пирамиды $FGHK$ с равными друг другу рёбрами выбрана такая точка T, что $HT : TG = 1 : 3$, и через неё проведена прямая h, параллельная медиане HM боковой грани KHF и пересекающая поверхность пирамиды в точке R. Найдите ребро пирамиды, учитывая, что $TR = 6$ см.

115. Через точку пересечения медиан грани MNK треугольной пирамиды $JMNK$ с равными друг другу рёбрами проведена прямая b, параллельная прямой MJ, а на ребре MJ отмечена его середина Z. Найдите площадь треугольника NZJ, учитывая, что отрезок прямой b, расположенный внутри пирамиды, равен m.

116. Прямая m пересекает сторону AB треугольника ABC. Определите взаимное расположение прямых m и BC, учитывая, что:

а) прямая m лежит в плоскости ABC и не пересекает отрезок AC;

б) прямая m не лежит в плоскости ABC.

117. Точки M и N выбраны на скрещивающихся прямых a и b соответственно. Через прямую a и точку N проведена плоскость α, а через прямую b и точку M — плоскость β. Определите:
а) лежит ли прямая b в плоскости α;
б) пересекаются ли плоскости α и β, и если они пересекаются, то по какой прямой.

118. Докажите, что если AB и CD — скрещивающиеся прямые, то AD и BC — также скрещивающиеся прямые.

119. Через точку M вне прямой a проведены две прямые, не имеющие с прямой a общих точек. Докажите, что хотя бы одна из этих прямых и прямая a являются скрещивающимися.

120. Прямая m пересекает прямую k и не пересекает прямую l, параллельную прямой k. Докажите, что l и m — скрещивающиеся прямые.

121. Прямые XU и VT — параллельные, а прямые XY и VT — скрещивающиеся. Найдите угол между прямыми XY и VT, учитывая, что:
а) $\angle YXU = 40°$; б) $\angle YXU = 135°$; в) $\angle YXU = 90°$.

122. Прямая l параллельна стороне BC параллелограмма $ABCD$ и не лежит в его плоскости. Докажите, что l и CD — скрещивающиеся прямые, и найдите угол между ними, учитывая, что один из углов параллелограмма равен:
а) 58°; б) 133°.

123. Прямая m параллельна диагонали FH ромба $EFGH$ и не лежит в плоскости ромба. Докажите, что скрещиваются прямые:
а) m и EG, и найдите угол между ними;
б) m и EH, и найдите угол между ними, учитывая, что $\angle EFG = 128°$.

124. Через вершину P ромба $PQRS$ проведена прямая a, параллельная диагонали QS, а через вершину R — прямая b, не лежащая в плоскости ромба. Докажите, что:
а) прямые a и RS пересекаются; б) a и b скрещиваются.

125. Стороны AB и CD пространственного четырёхугольника $ABCD$ равны. Докажите, что прямые AB и CD образуют равные углы с прямой, проходящей через середину отрезков BC и AD.

126*. Точки P, Q, R, S — середины рёбер AB, BB_1, AD и диагонали B_1D прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основании которого лежит квадрат со стороной 1 м, а боковое ребро равно 7 м (рис. 162). Определите, во сколько раз сторона PQ четырёхугольника $PQSR$ больше его стороны QS.

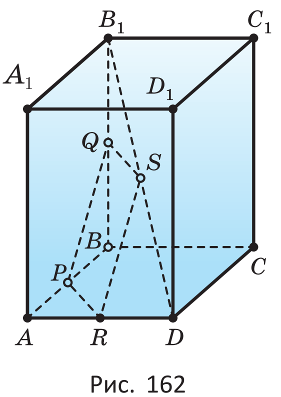


Рис. 162