§ 5. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

А) В пространстве общих точек у прямой и плоскости может быть ни одной, одна или более одной.

Если у прямой и плоскости общих точек более одной, то, как утверждает аксиома **2**, сама прямая принадлежит плоскости (рис. 163).

Прямая и плоскость могут иметь единственную общую точку. Пусть α — некоторая плоскость (рис. 164). Выберем точку A на плоскости α и точку M вне плоскости α. Точки A и M определяют единственную прямую l, которая не имеет с плоскостью α иных общих точек, кроме точки A. Действительно, если допустить обратное, то по аксиоме **2** прямая l будет лежать в плоскости α, а значит, в этой плоскости будет лежать и точка M, что противоречит выбору этой точки.

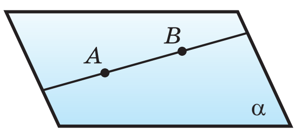


Рис. 163

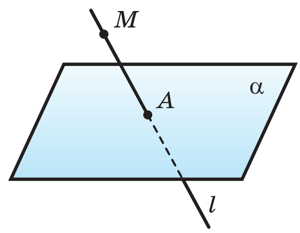
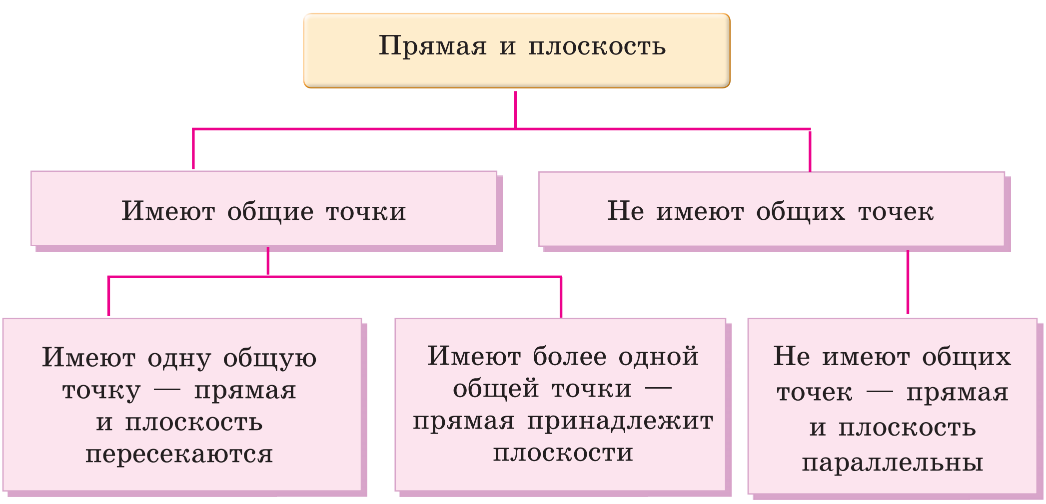


Рис. 164

Прямая и плоскость, имеющие единственную общую точку, называются *пересекающимися*.

Прямая и плоскость могут не иметь общих точек. В этом случае говорят, что прямая a **параллельна** плоскости α, и пишут $a \parallel \alpha$.



Правообладатель Адукацыя і выхаванне

Докажем *признак параллельности прямой и плоскости.*

Теорема 7. Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-либо прямой плоскости, то она параллельна этой плоскости.

Доказательство. Пусть прямая l параллельна прямой k, принадлежащей плоскости β, и l не принадлежит плоскости β (рис. 165). Нужно доказать, что прямая l не имеет общих точек с плоскостью β. Допустим, что это не так, т. е. прямая l пересекает плоскость β в некоторой точке U. Эта точка не может лежать на прямой k, так как $k \parallel l$. Тогда по признаку скрещивающихся прямых получаем, что прямые k и l — скрещивающиеся.

А это противоречит тому, что прямые k и l параллельные. Значит, прямая l и плоскость β не могут иметь общих точек, т. е. $l \parallel \beta$.

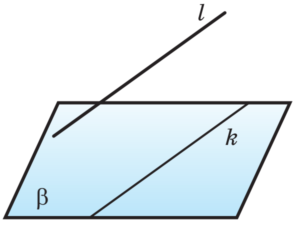


Рис. 165

Б) Докажем *свойство прямой, параллельной плоскости.*

Теорема 8. Линия пересечения плоскостей, одна из которых проходит через прямую, параллельную другой плоскости, параллельна этой прямой.

Доказательство. Пусть прямая a, параллельная плоскости α, принадлежит плоскости β, и прямая b — линия пересечения плоскостей α и β (рис. 166). Тогда прямые a и b обе лежат в плоскости β и не пересекаются, так как в противном случае прямая a пересекала бы плоскость β. Значит, прямые a и b параллельны.

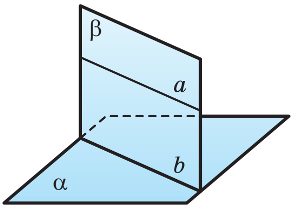


Рис. 166

Пример 1*. Докажем, что *через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит единственная плоскость, параллельная другой прямой.*

Пусть прямые a и b — скрещивающиеся (рис. 167). На прямой a выберем произвольно точку U и через неё проведём прямую c, параллельную прямой b. Прямые a и c пересекаются, поэтому через них проходит единственная плоскость α. Плоскость α параллельна прямой b, так как прямая b не лежит в плоскости α и параллельна прямой c, лежащей в плоскости α.

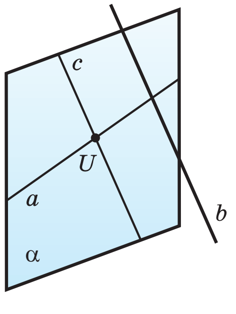


Рис. 167

Правообладатель Адукацыя і выхаванне

1. Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости.
2. Сформулируйте свойство прямой, параллельной плоскости.
3. Определите взаимное расположение натянутых троллейбусных или трамвайных проводов и плоскости земли (рис. 168). Приведите примеры взаимного расположения прямой и плоскости из окружающего мира.
4. Треугольники ABC и ABD лежат в разных плоскостях (рис. 169). Верно ли, что любая прямая, параллельная прямой CD, пересекает эти плоскости?

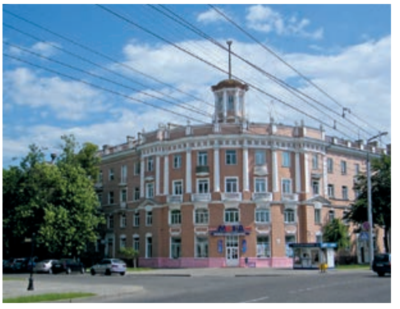


Рис. 168

5. Точки P и Q лежат в плоскости α, а точка R не принадлежит ей. Определите взаимное расположение прямой, проходящей через середины отрезков PR и QR (рис. 170), и плоскости α.
6. Вне плоскости прямоугольника $UVXY$ выбрана точка R (рис. 171). Определите взаимное расположение прямой UV и плоскости XYR.

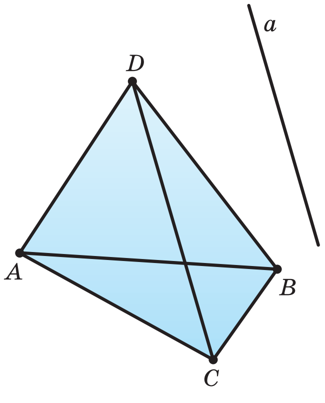


Рис. 169

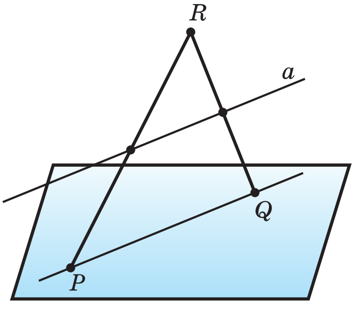


Рис. 170

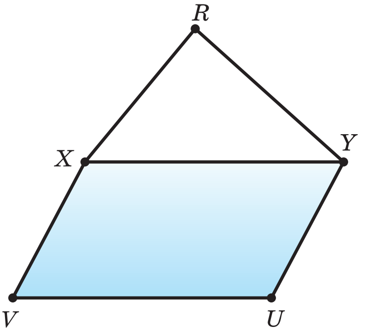


Рис. 171

Задача 1. Основание LM трапеции $KLMN$ равно 48 см. Вне плоскости трапеции выбрана точка O и отмечена середина P отрезка LO (рис. 172). Постройте точку H пересечения плоскости KNP и отрезка OM. Найдите длину отрезка PH.

Правообладатель Адукацыя і выхаванне

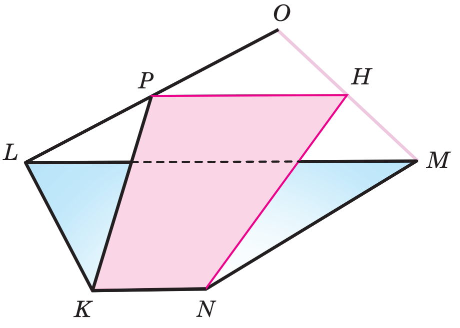


Рис. 172

Р е ш е н и е. $M \notin LO$, поэтому определена (LOM) (теорема **4**).

$KN \parallel LM$ и $LM \subset (LOM)$, поэтому $KN \parallel (LOM)$ (теорема **7**).

$P \in LO$ и $LO \subset (LOM)$, поэтому $P \in (LOM)$.

$P \in (LOM)$ и $P \in (KPN)$, поэтому $(LOM) \cap (KPN) = a$ и $P \in a$ (аксиома **3**).

$KN \subset (KPN)$, $KN \parallel (LOM)$, $(LOM) \cap (KPN) = a$, значит, $a \parallel KN$ (теорема **8**).

$a \parallel KN$ и $KN \parallel LM$, значит, $a \parallel LM$.

$(LOM) \cap (KPN) = a$, значит, $a \subset (LOM)$.

$a \parallel LM$ и $a \cap OM = H$, значит, $H \in OM$ и $H \in a$.

$P \in a$ и $H \in a$, значит, $a = PH$.

P — середина LO и $PH \parallel LM$, поэтому PH — средняя линия $\triangle LOM$.

$LM = 48$ см и PH — средняя линия $\triangle LOM$, поэтому $PH = \frac{1}{2}LM$.

$PH = \frac{1}{2}LM$ и $LM = 48$ см, поэтому $PH = \frac{1}{2} \cdot 48 = 24$ (см).

О т в е т: 24 см.

Задача 2. Постройте сечение правильной четырёхугольной пирамиды $FABCD$ плоскостью α, проходящей через ребро AB и точку X на ребре FC.

Р е ш е н и е. Определим, по какой линии пересекает поверхность пирамиды плоскость α, которой принадлежат прямая AB и точка X.

$AB \subset \alpha$ и $AB \subset (FAB)$, поэтому $\alpha \cap (FAB) = AB$ (рис. 173).

$B \in \alpha$ и $B \in (FBC)$, $X \in \alpha$ и $X \in (FBC)$, поэтому $\alpha \cap (FBC) = BX$.

$X \in \alpha$ и $X \in (FCD)$, поэтому $\alpha \cap (FCD) = a$ и $X \in a$.

$FABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида, поэтому $ABCD$ — квадрат и $AB \parallel CD$.

$AB \parallel CD$ и $CD \subset (FCD)$, поэтому $AB \parallel (FCD)$ (теорема **7**).

$AB \subset \alpha$, $AB \parallel (FCD)$ и $\alpha \cap (FCD) = a$, поэтому $a \parallel AB$ и $a \subset \alpha$ (теорема **8**).

$\alpha \cap (FCD) = a$ и $a \cap FD = Y$, поэтому $Y \in a$ и $Y \in FD$.

$X \in a$ и $Y \in a$, поэтому $a = XY$, $XY \parallel AB$, $|XY| < |AB|$.

$Y \in FD$ и $FD \subset (FCD)$, поэтому $Y \in (FCD)$.

$Y \in a$ и $a \subset \alpha$, поэтому $Y \in \alpha$.

$X \in \alpha$ и $X \in (FCD)$, $Y \in \alpha$ и $Y \in (FCD)$, поэтому $\alpha \cap (FCD) = XY$.

$A \in \alpha$ и $A \in (FAD)$, $Y \in \alpha$ и $Y \in (FAD)$, поэтому $\alpha \cap (FAD) = AY$.

Получили, что плоскость α пересекает пирамиду $FABCD$ по трапеции $ABXY$.

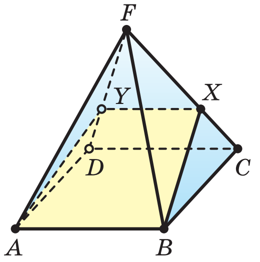


Рис. 173

Правообладатель Адукацыя і выхаванне

Задача 3*. Точки E, F, G — середины рёбер LN, LK, MK треугольной пирамиды $MNKL$ (рис. 174).

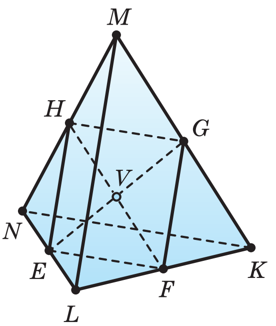


Рис. 174

а) Постройте точку H, в которой плоскость EFG пересекает ребро MN.

б) Докажите, что отрезки EG и FH пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Решение. а) Точки G и F — общие точки плоскостей EFG и MKL. Поэтому $(EFG) \cap (MKL) = GF$.

Плоскость EFG имеет с гранью NKL общие точки E и F. Поэтому $(EFG) \cap (NKL) = EF$.

E и F — середины рёбер LN и LK, значит, EF — средняя линия $\triangle LNK$, и поэтому $EF \parallel NK$ и $EF = \frac{1}{2} \cdot NK$.

$EF \parallel NK$ и $NK \subset (MKN)$, следовательно, $EF \parallel (MKN)$ (теорема **7**).

$EF \subset (EFG)$ и $EF \parallel NK$ и $(EFG) \cap (MKN) = GH$, следовательно, $GH \parallel NK$.

Поскольку G — середина ребра MK и $GH \parallel NK$, то GH — средняя линия $\triangle MNK$, и поэтому $GH = \frac{1}{2} \cdot NK$. Значит, H — середина ребра MN. Искомое сечение — четырёхугольник $HEFG$.

б) Поскольку $EF \parallel NK$ и $GH \parallel NK$, $EF = \frac{1}{2} \cdot NK$ и $GH = \frac{1}{2} \cdot NK$, то $HEFG$ — параллелограмм. Отрезки EG и FH — его диагонали. Поэтому $EG \cap FH = V$ и V — середина EG и FH.

127. Учитывая, что точки Q, H, G — середины диагоналей SE_1, S_1R_1, R_1T соответствующих граней куба $SERTS_1E_1R_1T_1$ (рис. 175):
а) установите, параллельна ли прямая QH плоскости SS_1T_1;
б) докажите, что прямая HG параллельна плоскости E_1ER.

128. Учитывая, что плоскость α проходит через основание ST трапеции $SURT$ и не проходит через вершину R, а точка A лежит в плоскости α (рис. 176):

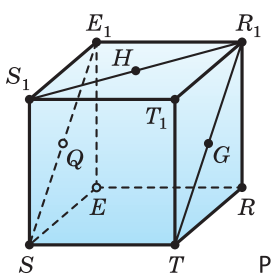


Рис. 175

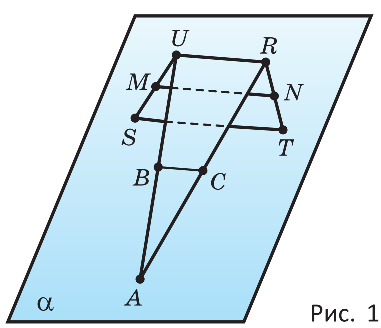


Рис. 176

Правообладатель Адукацыя і выхаванне

а) докажите, что средняя линия MN трапеции параллельна плоскости α;

б) установите, параллельна ли плоскости α средняя линия BC треугольника UAR.

129. Точка D не лежит в плоскости параллелограмма $ABMN$. Определите взаимное расположение прямой AB и плоскости MDN.

130. Точка A не лежит в плоскости параллелограмма $MNPQ$, а точка B — середина отрезка NA (рис. 177). Докажите, что плоскость MBQ пересекает прямую AP.

131. На ребре DD_1 куба $DFGED_1F_1G_1E_1$ выбрана точка Q (рис. 178). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте точку пересечения с поверхностью куба прямой c, проходящей через точку Q и параллельной прямой D_1G.

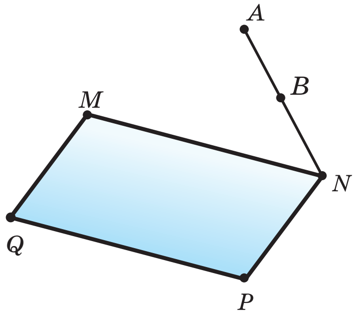


Рис. 177

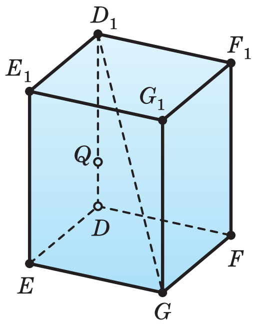


Рис. 178

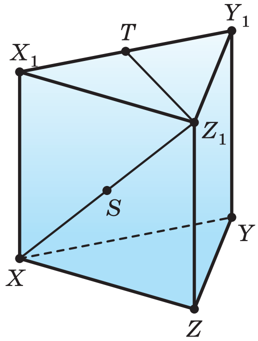


Рис. 179

132. Все рёбра правильной треугольной призмы $XYZX_1Y_1Z_1$ равны друг другу, а точка S — середина диагонали XZ_1 грани XX_1Z_1Z (рис. 179). Сделайте такой рисунок в тетради и:

а) постройте точку пересечения с гранью XX_1Y_1Y прямой p, которая проходит через точку S и параллельна медиане Z_1T грани $X_1Y_1Z_1$;

б) найдите площадь боковой поверхности призмы, учитывая, что длина отрезка прямой p, расположенного внутри призмы, равна 10 см.

133. Все рёбра треугольной призмы $XYZX_1Y_1Z_1$ равны между собой, Q — точка пересечения медиан грани XYZ. Найдите длину расположенного внутри призмы отрезка прямой, проходящей через середину отрезка X_1Q и параллельной прямой ZQ, учитывая, что площадь боковой поверхности призмы равна S.

134. Учитывая, что точки N и M — середины диагоналей BC_1 и BD соответствующих граней прямоугольного параллелепипеда $BCDEB_1C_1D_1E_1$:

а) докажите, что отрезок MN параллелен плоскости, в которой лежит грань CDD_1C_1;

б) найдите длину отрезка MN, учитывая, что $BE = 6$ см, $EE_1 = 8$ см.

Правообладатель Адукацыя і выхаванне

135. Точка A — середина ребра PY треугольной пирамиды $PXYZ$, все рёбра которой равны $4\sqrt{3}$. Постройте точку пересечения с поверхностью пирамиды прямой b, которая проходит через точку A и параллельна медиане YR грани XYZ. Найдите длину отрезка этой прямой, расположенного внутри пирамиды.

136. Через точку пересечения медиан грани MPQ треугольной пирамиды $MNPQ$ проведена прямая, параллельная медиане PA грани MNP. Найдите длину расположенного внутри пирамиды отрезка этой прямой, учитывая, что $PA = m$.

137. Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды $TPQUV$ равны между собой, точки B, C, D — середины рёбер TP, TV, TU. Через точку B проведена прямая p, параллельная прямой CD. Постройте точку A пересечения прямой p с плоскостью TQU и найдите площадь основания пирамиды, учитывая, что площадь четырёхугольника $ABCD$ равна S.

138. Дан параллелепипед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$, на ребре SS_1 которого выбрана точка B (рис. 180). Постройте сечение этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки B, Q, P_1.

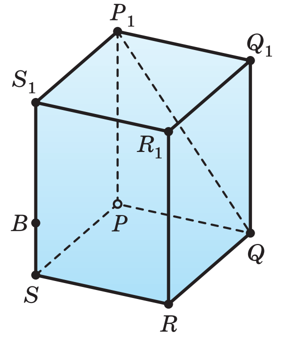


Рис. 180

139. На рисунке 181 изображена четырёхугольная пирамида, основанием которой является трапеция $MNKL$ с основаниями KL и MN. Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку B ребра SL и прямую MN. Какой фигурой является сечение?

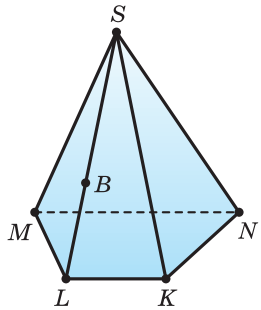


Рис. 181

140. Есть прямая a, параллельная плоскости α, и точка T, принадлежащая этой плоскости. Докажите, что прямая, которая проходит через точку T и параллельна прямой a, лежит в плоскости α.

141. Одно основание трапеции параллельно плоскости β, а вершина другого лежит в этой плоскости. Докажите, что:

а) другое основание трапеции лежит в плоскости β;

б) средняя линия трапеции параллельна плоскости β.

142. Докажите, что если данная прямая не лежит в пересекающихся плоскостях и параллельна линии их пересечения, то она параллельна и этим плоскостям.

Правообладатель Адукацыя і выхаванне

143*. Постройте сечение параллелепипеда $CDEFC_1D_1E_1F_1$ плоскостью, проходящей через ребро EE_1 и точку A, выбранную на ребре CC_1.

144. Точки A, B, C — соответственно середины рёбер FE, GH, GK четырёхугольной пирамиды $FGHEK$, в основании которой лежит параллелограмм $GHEK$. Постройте отрезок, по которому плоскость ABC пересекает диагональное сечение FHK пирамиды.

145. Сторона RT треугольника RST параллельна плоскости γ, а стороны RS и ST пересекаются с этой плоскостью в точках M и N. Докажите, что треугольники RST и MSN подобны.

146. На отрезке AB выбрана такая точка C, что $AB : BC = 4 : 3$. Через конец B отрезка AB проведена плоскость α. Параллельно этой плоскости построен отрезок CD, равный 24 см. Докажите, что прямая AD пересекает плоскость α в некоторой точке E, и найдите отрезок BE.

147. Точки D и E на сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны так, что $DE = 5$ см и $\dfrac{BD}{DA} = \dfrac{2}{3}$. Плоскость, проведённая через точки B и C, параллельна отрезку DE. Найдите длину отрезка BC.

148. Имеется правильная треугольная пирамида $MNPQ$, длина бокового ребра которой равна 6 см, а основанием является треугольник со стороной 4 см. Найдите периметр сечения пирамиды плоскостью, параллельной NP и проходящей через середину ребра PQ, и среднюю линию треугольника MNP.

149. Точки A, B, C — соответственно середины рёбер LN, LK, MK треугольной пирамиды $LMNK$, все рёбра которой равны друг другу, а площадь грани равна $16\sqrt{3}$ см^2. Найдите периметр сечения этой пирамиды плоскостью ABC.

150. На рисунке 182 изображена правильная треугольная пирамида $IJKL$. Четырёхугольник $XYZT$ — сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середины X и Y рёбер JI и JL и параллельно медиане JE грани JKL. Найдите длину отрезков XY и ZT, учитывая, что $IK = 48$ см.

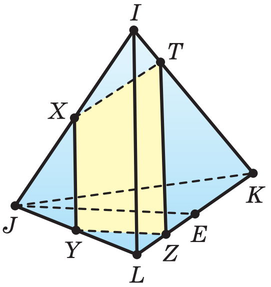


Рис. 182

151. Точка Q — середина ребра FA четырёхугольной пирамиды $FABCD$, основанием которой является трапеция $ABCD$ с параллельными сторонами BC и AD. Найдите отрезок, по которому плоскость QBC пересекает грань FAD, учитывая, что ребро BC и средняя линия трапеции соответственно равны 30 см и 40 см.

Правообладатель Адукацыя і выхаванне

152. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 60 см, а боковое ребро — 78 см. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середины двух противоположных сторон основания и параллельной какому-либо боковому ребру, и найдите площадь сечения.

153*. Имеется правильная четырёхугольная пирамида $FMNKL$, боковое ребро которой в два раза больше стороны основания, а площадь боковой поверхности равна S. Найдите длину расположенного внутри пирамиды отрезка прямой, проходящей через точку пересечения диагоналей основания и параллельной медиане FR грани FLK.

154*. Точка A — середина ребра FK четырёхугольной пирамиды $FGHEK$, в основании которой лежит трапеция $GHEK$, $KG \parallel HE$. Постройте точку P, в которой плоскость AEH пересекает прямую FG. Докажите, что отрезки PE и HA пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, учитывая, что средняя линия трапеции $GHEK$ равна $\frac{3}{2}$ HE.

§ 6. Взаимное расположение плоскостей в пространстве

А) Две плоскости или имеют общую точку, или не имеют её. В первом случае в соответствии с аксиомой **3** плоскости имеют общую прямую, т. е. пересекаются по этой прямой (рис. 183). Во втором случае плоскости не пересекаются (рис. 184).

Плоскости, которые не пересекаются, называются **параллельными плоскостями.**

Представление о параллельных плоскостях дают поверхности потолка и пола или поверхности противоположных стен комнаты (рис. 185). Следующая теорема выражает *признак параллельности плоскостей*.

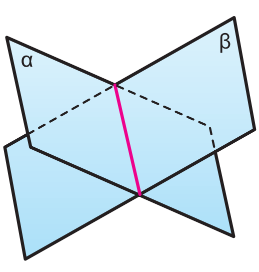


Рис. 183

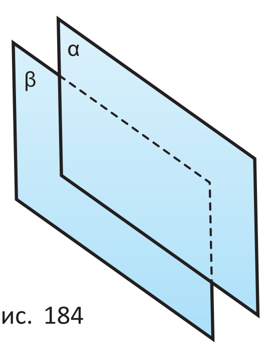


Рис. 184

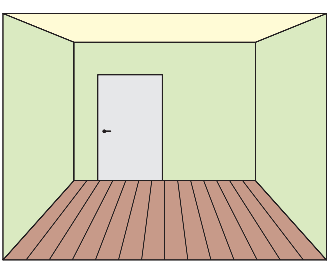


Рис. 185

Теорема 9. Плоскость, проходящая через две пересекающиеся прямые, параллельные другой плоскости, параллельна этой плоскости.

Правообладатель Адукацыя і выхаванне