152. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 60 см, а боковое ребро — 78 см. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середины двух противоположных сторон основания и параллельной какому-либо боковому ребру, и найдите площадь сечения.

153*. Имеется правильная четырёхугольная пирамида $FMNKL$, боковое ребро которой в два раза больше стороны основания, а площадь боковой поверхности равна S. Найдите длину расположенного внутри пирамиды отрезка прямой, проходящей через точку пересечения диагоналей основания и параллельной медиане FR грани FLK.

154*. Точка A — середина ребра FK четырёхугольной пирамиды $FGHEK$, в основании которой лежит трапеция $GHEK$, $KG \parallel HE$. Постройте точку P, в которой плоскость AEH пересекает прямую FG. Докажите, что отрезки PE и HA пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, учитывая, что средняя линия трапеции $GHEK$ равна $\frac{3}{2}$ HE.

§ 6. Взаимное расположение плоскостей в пространстве

А) Две плоскости или имеют общую точку, или не имеют её. В первом случае в соответствии с аксиомой **3** плоскости имеют общую прямую, т. е. пересекаются по этой прямой (рис. 183). Во втором случае плоскости не пересекаются (рис. 184).

Плоскости, которые не пересекаются, называются **параллельными плоскостями.**

Представление о параллельных плоскостях дают поверхности потолка и пола или поверхности противоположных стен комнаты (рис. 185). Следующая теорема выражает *признак параллельности плоскостей.*

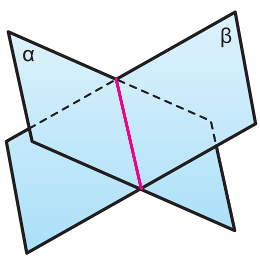

Рис. 183

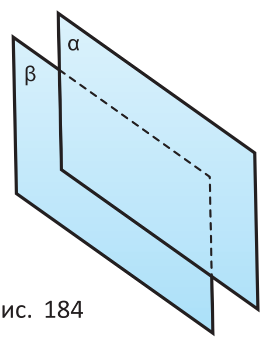

Рис. 184

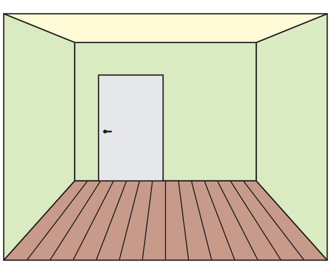

Рис. 185

Теорема 9. Плоскость, проходящая через две пересекающиеся прямые, параллельные другой плоскости, параллельна этой плоскости.

Доказательство. Пусть плоскость α проходит через пересекающиеся прямые m и n, которые параллельны плоскости β (рис. 186). Докажем, что плоскость α параллельна плоскости β.

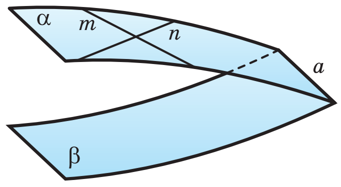

Рис. 186

Допустим, что плоскость α пересекает плоскость β по некоторой прямой a. Тогда по теореме **8** прямая a параллельна и прямой m, и прямой n. Значит, по теореме **3** прямые m и n параллельны друг другу. Но это противоречит условию о том, что они пересекаются. Значит, плоскость α параллельна плоскости β.

Следствие 1. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то такие плоскости параллельны.

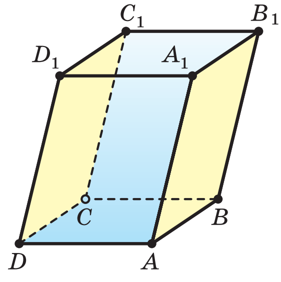

Рис. 187

Это следствие получается из теоремы **9** с учётом признака параллельности прямой и плоскости.

Следствие 2. Противоположные грани параллелепипеда параллельны, т. е. лежат в параллельных плоскостях.

Например, грань AA_1B_1B параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 187) содержит прямые AB и AA_1, а грань DD_1C_1C — прямые DC и DD_1. Поскольку $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограммы, то $AB \parallel DC$ и $AA_1 \parallel DD_1$, и, значит, плоскости AA_1B_1B и DD_1C_1C параллельны.

Б) Докажем *свойства параллельных плоскостей*.

Теорема 10. Линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью параллельны.

Доказательство. Пусть плоскость γ пересекает параллельные плоскости α и β по прямым a и b (рис. 188). Докажем, что прямые a и b параллельны.

Допустим, что это не так, т. е. прямые a и b имеют общую точку Q. Тогда точка Q принадлежит плоскости α, так как прямая a принадлежит плоскости α, точка Q принадлежит и плоскости β, так как прямая b принадлежит плоскости β. Получается, что плоскости α и β имеют общую точку Q, но это невозможно, так как по условию плоскости α и β параллельны.

Значит, прямые a и b не могут иметь общей точки. А поскольку они лежат в одной плоскости, именно в плоскости γ, то они параллельны.

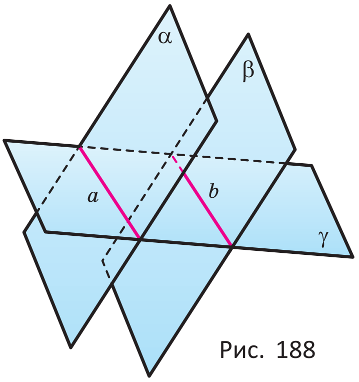

Рис. 188

Пример 1. Параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересечён плоскостью, проходящей через середины M, N, O его рёбер DD_1, AA_1, A_1B_1 соответственно. Определим, какая фигура получится в сечении.

Плоскость MNO пересекает грани AA_1D_1D и AA_1B_1B по отрезкам MN и NO (рис. 189), при этом $MN \parallel A_1D_1$, так как MN — средняя линия прямоугольника AA_1D_1D ($AN = A_1N$ и $DM = D_1M$).

Поскольку плоскость MNO проходит через прямую MN, параллельную плоскости $A_1B_1C_1D_1$, то линия пересечения этих плоскостей — прямая OP — параллельна MN. Четырёхугольник $MNOP$ — искомое сечение.

Учтём, что плоскости граней DD_1C_1C и AA_1B_1B параллельны. Из теоремы **10** следует, что прямые NO и MP, по которым плоскости DD_1C_1C и AA_1B_1B пересекает плоскость MNO, параллельны. А поскольку $MN \parallel OP$ и $NO \parallel MP$, то четырёхугольник $MNOP$ — параллелограмм.

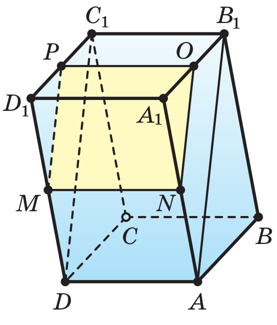

Рис. 189

Т е о р е м а 11. Через данную точку вне данной плоскости проходит единственная плоскость, параллельная данной.

Доказательство. Пусть даны плоскость α и точка T вне её (рис. 190). В плоскости α проведём какие-либо пересекающиеся прямые k и l, а через точку T — прямые k_1 и l_1, параллельные прямым k и l соответственно. Плоскость β, определённая прямыми k_1 и l_1, с учётом признака параллельности плоскостей параллельна плоскости α и проходит через точку T.

Докажем единственность плоскости β. Допустим, что есть ещё одна плоскость γ, которая проходит через точку T и параллельна плоскости α (рис. 191). Прямые k_1 и l_1 обе не могут принадлежать плоскости γ, ибо тогда плоскости β и γ совпадали бы. Пусть k_1 не принадлежит плоскости γ. Через точку T и прямую k проведём плоскость δ. Она пересекает плоскость β по прямой k_1, а плоскость γ — по прямой k_2. Тогда по теореме **10** обе эти прямые параллельны прямой k.

Но такое невозможно, так как в плоскости через данную точку параллельно данной прямой проходит единственная прямая.

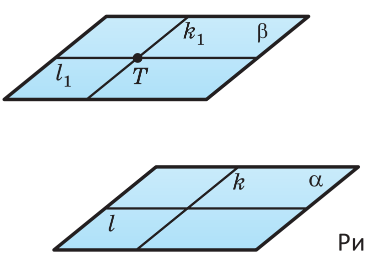

Рис. 190

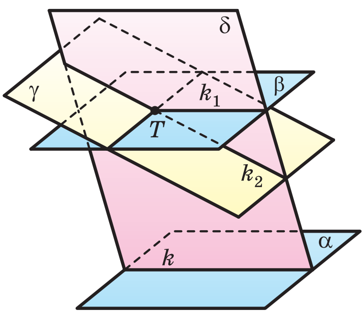

Рис. 191

Следствие 3. Если каждая из двух данных плоскостей параллельна третьей плоскости, то эти две плоскости параллельны друг другу.

Если прямая a пересекает плоскость β, то она пересекает и любую плоскость, параллельную плоскости β. Докажите самостоятельно.

Если плоскости α и β параллельны и прямая l, проходящая через точку A плоскости β, параллельна плоскости α, то прямая l лежит в плоскости β. Докажите самостоятельно.

Сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию, есть многоугольник, подобный основанию. Докажите самостоятельно.

Теорема 12. Отрезки параллельных прямых, заключённые между двумя параллельными плоскостями, равны.

Доказательство. Пусть параллельные плоскости α и β высекают из параллельных прямых k и l отрезки AB и CD (рис. 192). Докажем, что эти отрезки равны.

Плоскость γ, которой принадлежат параллельные прямые k и l, пересекает параллельные плоскости по параллельным прямым AC и BD. В результате получается четырёхугольник $ABDC$, в котором противоположные стороны параллельны. Значит, этот четырёхугольник — параллелограмм, поэтому его противоположные стороны AB и CD равны.

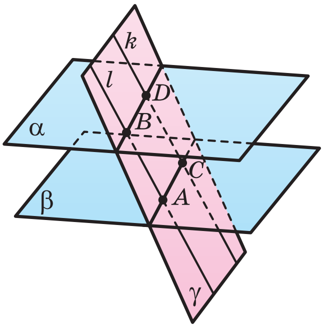

Рис. 192

Пример 2*. Докажем, что отрезки произвольных прямых, заключённые между тремя параллельными плоскостями, пропорциональны.

Пусть параллельные плоскости α, β, γ высекают из прямой m отрезки AB и BC, а из прямой n — отрезки DE и EF (рис. 193). Докажем, что $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

Через точку A проведём прямую, параллельную прямой n, пусть она пересекается с плоскостями β и γ в точках G и H соответственно. В треугольнике ACH отрезок BG параллелен стороне CH. Поэтому $\frac{AB}{BC} = \frac{AG}{GH}$.

Но $AG = DE$ и $GH = EF$ в соответствии с теоремой **12**. Значит, $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

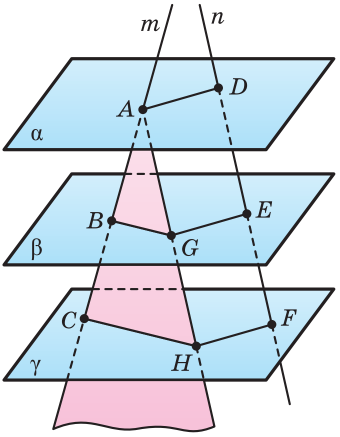

Рис. 193

Параллельные или пересекающиеся прямые определяют единственную плоскость. Скрещивающиеся прямые определяют единственную пару параллельных плоскостей.

Пример 3*. Докажем, что через скрещивающиеся прямые можно провести параллельные плоскости, причём такая пара плоскостей единственная.

Пусть даны скрещивающиеся прямые a и b (рис. 194). Выберем произвольно на прямой a точку X, на прямой b — точку Y, и через точку X проведём прямую b_1, параллельную прямой b, а через точку Y — прямую a_1, параллельную прямой a. Пересекающиеся прямые a и b_1, а также b и a_1 определяют плоскости α и β, которые с учётом признака параллельности плоскостей являются параллельными.

Единственность искомой пары плоскостей доказывается методом от противного, подобно тому, как это было сделано при доказательстве теоремы **11**. Проведите это рассуждение самостоятельно.

На рисунке 195 плоскости граней $STUV$ и $S_1T_1U_1V_1$ параллелепипеда $STUVS_1T_1U_1V_1$ проходят через скрещивающиеся прямые TU и U_1V_1.

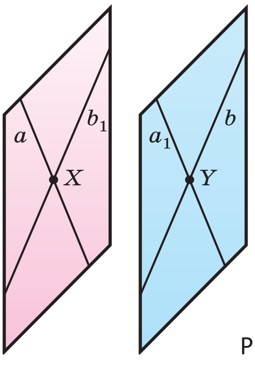

Рис. 194

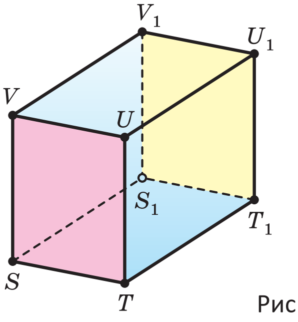

Рис. 195

1. Назовите возможные случаи взаимного расположения двух плоскостей.
2. Какие плоскости называются параллельными?
3. Сформулируйте признак параллельности плоскостей.
4. Сформулируйте утверждение о линиях пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.
5. Сформулируйте утверждение об отрезках, которые две параллельные плоскости отсекают на параллельных прямых.
6. Сформулируйте утверждение об отрезках, которые три параллельные плоскости отсекают на произвольных прямых.
7. Сформулируйте утверждение о плоскости, проходящей через данную точку параллельно данной плоскости.

8. Сформулируйте утверждение о плоскостях, которые параллельны другой плоскости.

9. Сформулируйте утверждение о параллельных плоскостях, определяемых парой скрещивающихся прямых.

10. Покажите параллельные плоскости на предметах вашего класса.

11. Прямая m пересекает плоскость α в точке A. Существует ли плоскость, которая проходит через прямую m и параллельна плоскости α?

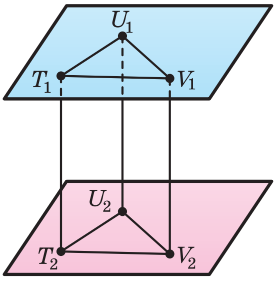

Рис. 196

12. Плоскости α и β параллельны, прямая m лежит в плоскости α. Определите, будет ли прямая m параллельна плоскости β.

13. Учитывая, что параллельные отрезки T_1T_2, U_1U_2 и V_1V_2 заключены между параллельными плоскостями α и β (рис. 196):
а) определите вид четырёхугольников $T_1U_1U_2T_2$, $U_1V_1V_2U_2$ и $T_1V_1V_2T_2$;
б) верно ли, что $\triangle T_1U_1V_1 = \triangle T_2U_2V_2$.

Задача 1. Учитывая, что точка T не лежит в плоскости треугольника ABC с площадью, равной 48 см^2, а точки M, N, P — середины отрезков TA, TB, TC (рис. 197):
а) докажите, что плоскости MNP и ABC параллельны;
б) найдите площадь треугольника MNP.

Решение. а) Точки M и N — середины отрезков TA и TB, следовательно, $MN \parallel AB$ и $MN = \frac{1}{2}AB$.

Точки M и P — середины отрезков TA и TC, следовательно, $MP \parallel AC$ и $MP = \frac{1}{2}AC$.

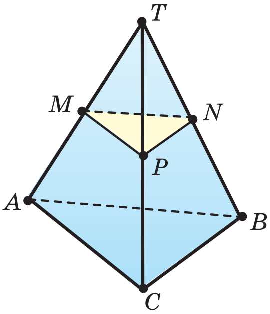

Рис. 197

$MN \parallel AB$ и $AB \subset (ABC)$, следовательно, $MN \parallel (ABC)$.
$MP \parallel AC$ и $AC \subset (ABC)$, следовательно, $MP \parallel (ABC)$.
$MN \cap MP = M$, $MN \parallel (ABC)$ и $MP \parallel (ABC)$, следовательно, $(MNP) \parallel (ABC)$.

б) Поскольку MN и MP — средние линии $\triangle ATB$ и $\triangle ATC$ соответственно, то точки N и P — середины рёбер TB и TC. Следовательно, NP — средняя линия $\triangle BTC$.

$\triangle MNP$ и $\triangle ABC$ подобны по третьему признаку, так как $MN : AB = MP : AC = NP : BC = 1 : 2$. Следовательно,

$$S_{MNP} = \left(\frac{MN}{AB}\right)^2 \cdot S_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot 48 = 12 \ \ (\text{см}^2).$$

Ответ: 12 см^2.

Задача 2. Докажите, что в параллелепипеде $FGHIF_1G_1H_1I_1$ (рис. 198) плоскость F_1IG параллельна плоскости I_1HG_1.

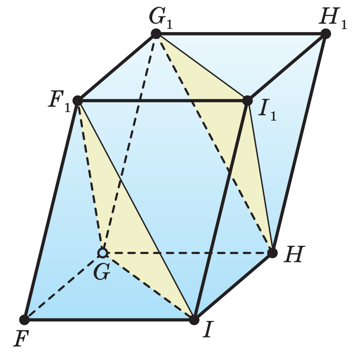

Рис. 198

Доказательство. В четырёхугольнике GII_1G_1 стороны GG_1 и II_1 параллельны и равны. Следовательно, GII_1G_1 — параллелограмм. Значит, $GI \parallel G_1I_1$ и $GI \parallel (G_1I_1H)$.

В четырёхугольнике HIF_1G_1 стороны HI и G_1F_1 параллельны и равны. Следовательно, HIF_1G_1 — параллелограмм. Значит, $IF_1 \parallel HG_1$ и $IF_1 \parallel (G_1I_1H)$.

Поскольку обе прямые GI и IF_1 параллельны плоскости G_1I_1H, лежат в плоскости GIF_1 и пересекаются, то $(F_1IG) \parallel (I_1HG_1)$ (теорема **9**).

Задача 3. В параллелепипеде $MNKLM_1N_1K_1L_1$ точка R — середина ребра KK_1 (рис. 199). Постройте сечения параллелепипеда плоскостями MM_1K_1 и MLR и отрезок, по которому пересекаются эти сечения.

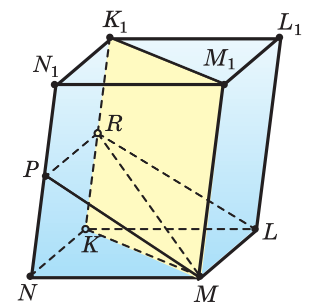

Рис. 199

Решение. $MNKLM_1N_1K_1L_1$ — параллелепипед, следовательно, $MM_1 \parallel KK_1$ и $MM_1 = KK_1$. А поскольку $MM_1 \subset (KMM_1)$ и $K \in (KMM_1)$, то $KK_1 \subset (KMM_1)$. Значит, (MM_1K_1) пересекает параллелепипед $MNKLM_1N_1K_1L_1$ по параллелограмму MM_1K_1K.

Грани LMM_1L_1 и NKK_1N_1 параллельны. А поскольку $NK \parallel ML$ и $NK \subset (NKK_1)$, то $(NKK_1) \cap (MLR) = RP$ и $RP \parallel NK$.

$NKRP$ и $NKLM$ — параллелограммы, следовательно, $RP = KN = ML$.

P — середина ребра NN_1, так как R — середина ребра KK_1 и $RP \parallel NK$.

(MLR) пересекает параллелепипед $MNKLM_1N_1K_1L_1$ по параллелограмму $MLRP$.

Точки M и R принадлежат как плоскости KMM_1, так и плоскости MLR. Следовательно, $(KMM_1) \cap (MLR) = MR$.

Ответ: $(MM_1K_1) \cap (MLR) = MR$.

155. Две стороны треугольника параллельны плоскости β. Определите, параллельна ли и третья сторона этого треугольника плоскости β.

156. Три отрезка P_1P_2, Q_1Q_2, и R_1R_2, не лежащие в одной плоскости, имеют общую середину. Определите, параллельны ли плоскости $P_1Q_1R_1$ и $P_2Q_2R_2$.

157. $MNKLM_1N_1K_1L_1$ — четырёхугольная призма. Определите, лежат ли в параллельных плоскостях основания $MNKL$ и $M_1N_1K_1L_1$ призмы.

159. Для проверки горизонтальности установки диска угломерных инструментов пользуются двумя уровнями, расположенными в плоскости диска на пересекающихся прямых (рис. 200). Почему уровни нельзя располагать на параллельных прямых?

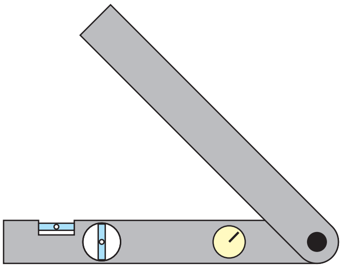

Рис. 200

160. Параллельные плоскости α и β пересекают сторону CB угла BCD в точках B_1 и B_2, а сторону CD — в точках D_1 и D_2 соответственно. Найдите:

а) CB_2 и CD_2, учитывая, что $B_2D_2 = 3B_1D_1$, $B_1B_2 = 12$ см, $CD_1 = 5$ см;

б) B_2D_2 и CB_2, учитывая, что $B_1D_1 = 18$ см, $CB_1 = 24$ см, $CB_2 = \frac{3}{2}B_1B_2$.

161. Три прямые, проходящие через одну точку и не лежащие в одной плоскости, пересекают одну из параллельных плоскостей в точках I_1, J_1 и K_1, а другую — в точках I_2, J_2 и K_2. Докажите, что треугольники $I_1J_1K_1$ и $I_2J_2K_2$ подобны.

162. Учитывая, что через точку пересечения медиан грани JKL треугольной пирамиды $IJKL$ проведена плоскость, параллельная грани IJK:
а) докажите, что сечением пирамиды этой плоскостью является треугольник, подобный треугольнику IJK;
б) найдите отношение площади сечения к площади треугольника IJK.

163. Начертите треугольную пирамиду $KLMN$ и:
а) постройте её сечение плоскостью, проходящей через ребро KL и середину A ребра MN;
б) докажите, что плоскость, проходящая через середины E, O и F отрезков LM, MA и MK, параллельна плоскости LKA;
в) найдите площадь треугольника EOF, учитывая, что площадь треугольника LKA равна 24 см^2.

164. Начертите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение:
а) плоскостью ABC_1; б) плоскостью ACC_1.
Докажите, что построенные сечения являются параллелограммами.

165. Начертите параллелепипед $IJKLI_1J_1K_1L_1$ и отметьте внутреннюю точку M грани II_1J_1J. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M параллельно:
а) плоскости основания $IJKL$; б) грани JJ_1K_1K.

166. Начертите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через:
а) ребро CC_1 и точку пересечения диагоналей грани AA_1D_1D;
б) точку пересечения диагоналей грани $ABCD$ параллельно плоскости AB_1C_1.

167. Начертите параллелепипед $EFGHE_1F_1G_1H_1$ и постройте его сечение плоскостью, которое проходит через точки F_1, H_1 и середину ребра GH. Докажите, что построенное сечение — трапеция.

168. Начертите параллелепипед $EFGHE_1F_1G_1H_1$ и постройте его сечение плоскостью FKL, где K — середина ребра EE_1, а L — середина ребра GG_1. Докажите, что построенное сечение — параллелограмм.

169. Учитывая, что диагонали NL и MK грани $KLMN$ параллелепипеда $MNKLM_1N_1K_1L_1$ пересекаются в точке Q, серединой ребра NN_1 является точка R, а четырёхугольник N_1ALB является сечением параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку N_1 и параллельной плоскости MRK (рис. 201):

а) установите, является ли параллелограммом четырёхугольник N_1ALB;

б) докажите, что прямые RQ и N_1L параллельны.

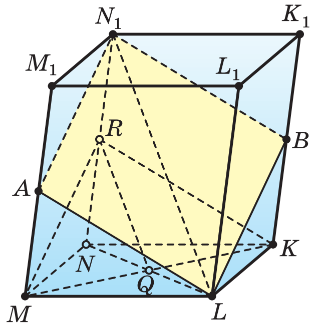

Рис. 201

170. Начертите параллелепипед $OPQRO_1P_1Q_1R_1$ и постройте его сечение плоскостью MNK, где точки M, N и K лежат соответственно на рёбрах:

а) PP_1, OO_1, OR; б) QQ_1, OR, PP_1.

171. Начертите треугольную пирамиду $ABCD$ и отметьте точку M на ребре AB. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку M параллельно грани BDC.

172. Учитывая, что точки I, J, K и L не лежат в одной плоскости, а медианы треугольников IJK и KJL пересекаются соответственно в точках M_1 и M_2:

а) докажите, что отрезки IL и M_1M_2 параллельны;

б) найдите M_1M_2, учитывая, что $IL = 12$ см.

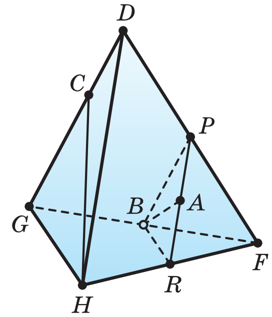

Рис. 202

173. На рёбрах QA, QB и QC треугольной пирамиды $QABC$ отмечены такие точки M, N, P, что $QM : MA = QN : NB = QP : PC$. Докажите, что плоскости MNP и ABC параллельны. Найдите площадь треугольника MNP, учитывая, что площадь треугольника ABC равна 18 см^2 и $QM : MA = 2 : 1$.

174. Учитывая, что точки B, P, R — середины рёбер FG, FD, FH пирамиды $DFGH$, отрезок AB — медиана треугольника BPR, а точка C принадлежит ребру DG (рис. 202):

а) докажите, что прямая AB параллельна плоскости DGH;

б) установите, пересекается ли прямая HC с плоскостью BPR.

175. Начертите параллелепипед $MNKLM_1N_1K_1L_1$ и отметьте середины A и B рёбер NN_1 и LL_1. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку B и параллельной плоскости MAK. Постройте отрезок, по которому это сечение пересекает диагональное сечение NLL_1N_1.

176. На рёбрах N_1K_1, LK, MM_1 параллелепипеда $MNKLM_1N_1K_1L_1$ выбраны точки Q, T, R соответственно. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью QTR.

177. Точки Q, B и R — соответственно середины рёбер SY, XX_1 и S_1T_1 параллелепипеда $STXYS_1T_1X_1Y_1$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью QBR.

178. Учитывая, что четырёхугольник $EFGH$ — сечение параллелепипеда $STUVS_1T_1U_1V_1$ плоскостью, проходящей через точку Q пересечения диагоналей грани UVV_1U_1 и параллельной плоскости TVV_1 (рис. 203):

а) объясните, почему прямые FE и GH параллельны;
б) определите, параллельны ли прямые GF и HE;
в) объясните, почему прямая SS_1 параллельна плоскости сечения.

179. Учитывая, что четырёхугольник $LNAB$ — сечение параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$ плоскостью, проходящей через прямую LN и середину A ребра N_1K_1 (рис. 204), установите, является ли трапецией четырёхугольник $LNAB$.

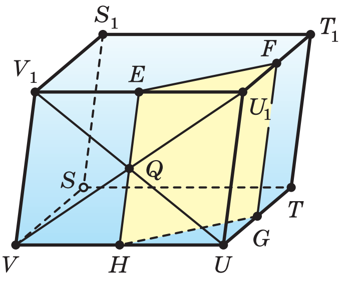

Рис. 203

180. Начертите параллелепипед $KLMNK_1L_1M_1N_1$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку пересечения диагоналей грани $KLMN$ и параллельной плоскости MLK_1. Докажите, что прямая LN_1 параллельна плоскости сечения.

181. Сечение треугольной пирамиды $TXYZ$, параллельное плоскости XYZ, делит боковое ребро в отношении 1 : 3, если считать от вершины. Найдите площадь сечения, учитывая, что площадь треугольника XYZ равна q.

182. Сечение пирамиды, параллельное основанию, делит боковое ребро в отношении 2 : 3, если считать от вершины. Найдите площадь сечения, учитывая, что его площадь на 336 см^2 меньше площади основания.

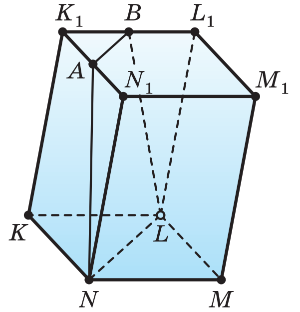

Рис. 204

183. Учитывая, что треугольник PRQ — сечение правильной треугольной пирамиды $HEFG$ плоскостью, проходящей через такую точку Q ребра FE, что $FQ : QE = 1 : 2$, и параллельной плоскости HFG (рис. 205):

а) докажите, что треугольники PRQ и GHF подобны;

б) найдите периметр треугольника PRQ, учитывая, что сторона основания пирамиды равна 30 см, а боковое ребро — 90 см.

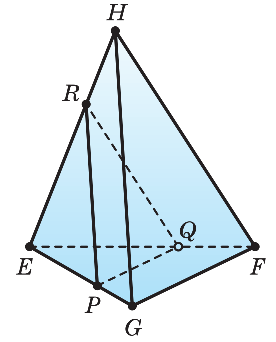

Рис. 205

184. В прямоугольном параллелепипеде $CDEFC_1D_1E_1F_1$ основание $CDEF$ — квадрат. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через середину ребра CC_1 и параллельной плоскости CFE_1. Найдите периметр сечения, учитывая, что измерения параллелепипеда равны 10, 10 и 24 см.

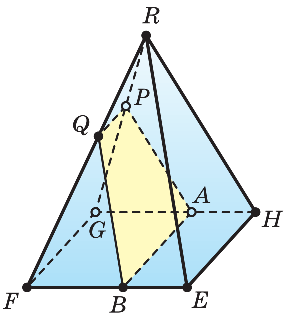

Рис. 206

185. Имеется прямая четырёхугольная призма $AJCDA_1J_1C_1D_1$, основанием которой является ромб со стороной 18 см и острым углом 60°. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через меньшую диагональ J_1D_1 ромба и середину ребра AD. Найдите периметр сечения, учитывая, что длина бокового ребра призмы равна 40 см.

186. Все рёбра прямой призмы $BDFB_1D_1F_1$ равны друг другу. Найдите площадь боковой поверхности призмы, учитывая, что площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины B, D и середину ребра FF_1, равна S.

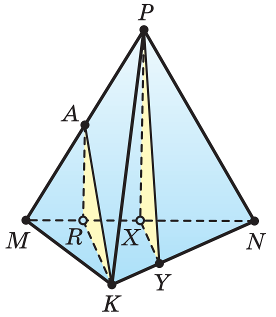

Рис. 207

187. Плоскость, которая параллельна плоскости RHE и проходит через такую точку Q ребра RF правильной четырёхугольной пирамиды $REFGH$, что $FQ : QR = 3 : 2$, пересекает пирамиду по четырёхугольнику $QPAB$ (рис. 206). Найдите периметр сечения, учитывая, что $EH = 30$ см, $ER = 25$ см.

188*. Точки X и A — соответственно середины рёбер MN и MP правильной треугольной пирамиды $PMNK$, а треугольники ARK и PXY — параллельные сечения, проходящие через прямые KA и PX соответственно (рис. 207). Найдите площадь треугольника PXY, учитывая, что площадь треугольника ARK равна S.

189*. Боковое ребро четырёхугольной пирамиды разделено на три доли, и через точки деления проведены плоскости, параллельные плоскости основания. Найдите площади полученных сечений, учитывая, что площадь основания равна S.

190*. Площадь сечения пирамиды плоскостью α, проходящей через точку на боковом ребре и параллельной основанию, равна 5 см^2. Определите, в каком отношении плоскость α делит боковое ребро пирамиды, учитывая, что площадь основания равна 80 см^2.

191*. Точка M делит боковое ребро CX треугольной пирамиды $CXYZ$ в отношении $2 : 3$, если считать от вершины. Треугольник MBP — сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку M и параллельной плоскости XYZ. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды $CMBP$, учитывая, что площадь боковой поверхности пирамиды $CXYZ$ равна q.

192*. Сторона основания и боковое ребро правильной треугольной пирамиды соответственно равны m и n. Через точку, делящую боковое ребро в отношении $1 : 3$, если считать от вершины пирамиды, проведено сечение, параллельное боковой грани. Найдите его площадь.

193*. На ребре M_1L_1 прямоугольного параллелепипеда $MNKLM_1N_1K_1L_1$ выбрана такая точка Q, что $M_1Q : QL_1 = 3 : 2$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку Q и параллельной плоскости MN_1K, и найдите его площадь, учитывая, что площадь треугольника MN_1K равна 200 см^2.

Пространственное моделирование

При изображении на плоскости (на бумаге) фигур, размещённых в пространстве, используют параллельное проектирование.

Рассмотрим плоскость β и прямую b, которая пересекает эту плоскость.

Возьмём произвольную точку A, проведём через неё прямую b_1 так, что $b_1 \parallel b$ (рис. 208*а*). Прямая b_1 пересекает плоскость β в некоторой точке A_1. Точка A_1 называется проекцией на плоскость β точки A при проектировании параллельно прямой b. Плоскость β — плоскость проекций, прямая b задаёт направление проектирования.

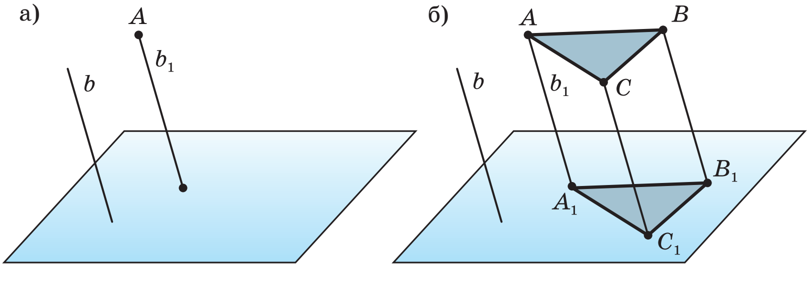

Рис. 208

Рис. 209

Параллельной проекцией фигуры F называют множество F_1 проекций всех её точек на заданную плоскость β (рис. 208*б*). Фигура F_1 называется параллельной проекцией фигуры F.

Параллельной проекцией реальной фигуры является её тень, которая падает на плоскую поверхность при солнечном свете, так как солнечные лучи можно считать параллельными (рис. 209).

Когда вы посмотрите на свою тень на земле или на стене, то увидите собственную параллельную проекцию.

Дополнительные задания к разделу 2

194. Параллелограммы $MNLK$ и $MNXY$ не лежат в одной плоскости. Докажите, что четырёхугольник $KLXY$ является параллелограммом.

195. Отрезок PE — общая медиана треугольников QPS и TPA, а точки K, L, M, N — середины отрезков PS, PA, ET, EQ. Докажите, что прямые KL и MN параллельны.

196. Определите, может ли каждая из двух скрещивающихся прямых быть параллельной третьей прямой.

197. Докажите, что прямая c, пересекающая в разных точках прямые a и b одной плоскости, также лежит в этой плоскости.

198. Докажите, что если стороны AB и BC параллелограмма $ABCD$ пересекают плоскость, то прямые AD и DC также пересекают эту плоскость.

199. Средняя линия трапеции лежит в плоскости β. Определите, какие стороны трапеции пересекают плоскость β.

200. Докажите, что если три плоскости, не проходящие через одну прямую, попарно пересекаются, то линии их пересечения или параллельны, или имеют общую точку.

201. Нарисуйте параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, постройте его сечения плоскостями ABC_1 и DCB_1, а также общий отрезок этих сечений.

202. Прямая a параллельна плоскости α. Определите, существуют ли плоскости, которые проходят через прямую a и параллельны плоскости α, и если существуют, то сколько таких плоскостей.

203. Прямая a параллельна одной из двух параллельных плоскостей. Докажите, что прямая a или параллельна другой из этих плоскостей, или лежит в ней.

204. Вне плоскости трапеции $ABCD$ с основанием AD выбрана точка T. Докажите, что прямая AD параллельна плоскости BTC.

205. Точка D не лежит в плоскости параллелограмма $IJKL$. Докажите, что прямая KL параллельна плоскости IDJ.

206. Плоскость α проходит через середину стороны AB треугольника ABC параллельно стороне BC. Докажите, что плоскости α принадлежит середина стороны AC.

207. Дана прямая a, параллельная плоскости α, и точка T, принадлежащая этой плоскости. Докажите, что прямая, которая проходит через точку T и параллельна прямой a, лежит в плоскости α.

208. Докажите, что если прямая a пересекает плоскость β, то она пересекает и любую плоскость, параллельную β.

209. Определите, какие многоугольники могут получиться при пересечении плоскости и:
а) треугольной призмы;
б) параллелепипеда.

210. Точка A — середина ребра PY треугольной пирамиды $PXYZ$, все рёбра которой равны a. Постройте точку пересечения с поверхностью пирамиды прямой b, которая проходит через точку A и параллельна медиане YR грани XYZ. Найдите длину отрезка этой прямой, размещённого внутри пирамиды.

211. Дана правильная четырёхугольная пирамида $FGHIJ$ с углом грани HFI при вершине F, равным $60°$. Через некоторую точку Q ребра GJ проведено сечение плоскостью, параллельной грани FJI. Найдите периметр этого сечения, учитывая, что длина его диагонали равна 14 см, а $GQ = 6$ см.

Проверьте свои знания

1. Определите, какие многоугольники могут получиться при пересечении плоскости и:

а) треугольной пирамиды; б) четырёхугольной пирамиды.

2. Вне плоскости трапеции $ABCD$ с основанием AD выбрана точка T. Докажите, что прямая AD параллельна плоскости BTC.

3. Точка P лежит на продолжении ребра MN параллелепипеда $LKMNL_1K_1M_1N_1$. Найдите расстояние от точки N до точки пересечения прямой M_1P с плоскостью LL_1N, учитывая, что $MM_1 = 24$ м, $NM = 12$ м, $PM = 18$ м.

4. Точки N и M — середины диагоналей BC_1 и BD соответствующих граней прямоугольного параллелепипеда $BCDEB_1C_1D_1E_1$. Найдите длину отрезка MN, учитывая, что $BE = 6$ см, $EE_1 = 8$ см.

5. Точка A — середина ребра PY треугольной пирамиды $PXYZ$, все рёбра которой равны $12\sqrt{3}$. Постройте точку пересечения с поверхностью пирамиды прямой b, которая проходит через точку A и параллельна медиане YR грани XYZ. Найдите длину отрезка этой прямой, размещённого внутри пирамиды.