§ 7. Перпендикулярность прямой и плоскости

А) Напомним, что *перпендикулярными* называют прямые, угол между которыми равен 90°. Перпендикулярные прямые могут быть пересекающимися и могут быть скрещивающимися. На рисунке 210 перпендикулярные прямые a и p пересекаются, а перпендикулярные прямые a и q скрещиваются.

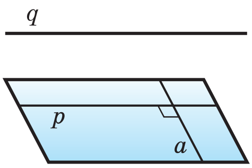

Рис. 210

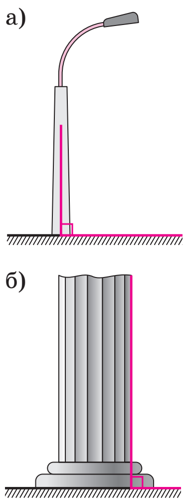

Рис. 211

Прямая называется **перпендикулярной плоскости**, если она перпендикулярна каждой прямой этой плоскости.

Перпендикулярность прямой a плоскости α записывают так: $a \perp \alpha$. Говорят также, что и плоскость α перпендикулярна прямой a, и пишут $\alpha \perp a$.

Прямая l, перпендикулярная плоскости β, обязательно эту плоскость пересекает. Если допустить, что прямая l лежит в плоскости β или параллельна ей, то в плоскости β есть прямые, параллельные прямой l, и угол между l и такими прямыми не равен 90°.

Окружающее пространство даёт много примеров, иллюстрирующих перпендикулярность прямой и плоскости. Столбы с осветительными лампами и колонны устанавливают перпендикулярно горизонтальной поверхности земли (рис. 211).

Из теоремы **6** параграфа **5** следует, что при определении угла между прямыми эти прямые можно заменять параллельными прямыми. Поэтому если одна из параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая также перпендикулярна этой плоскости. Верно и обратное утверждение.

Теорема 1. Если две прямые перпендикулярны плоскости, то они параллельны друг другу.

Доказательство. Пусть прямые x и y обе перпендикулярны плоскости α (рис. 212). Докажем, что прямые x и y параллельны друг другу.

Через какую-либо точку M прямой x проведём прямую x_1, параллельную прямой y. Тогда $x_1 \perp \alpha$. Докажем, что прямая x_1 совпадает с прямой x. Допустим, что это не так. Тогда получается, что в плоскости β, заданной прямыми x и x_1, через точку M проведены две прямые, перпендикулярные прямой a, по которой пересекаются плоскости α и β, что невозможно. Значит, прямые x и x_1 совпадают, тогда x и y параллельны.

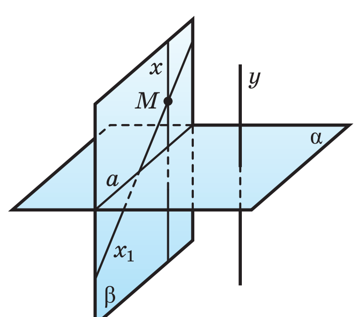

Рис. 212

Пусть имеются плоскость α и прямая l, которая её пересекает и не перпендикулярна α (рис. 213). Основания перпендикуляров, опущенных из точек прямой l на плоскость α, образуют прямую l_1. Эта прямая называется *проекцией прямой* l на плоскость α.

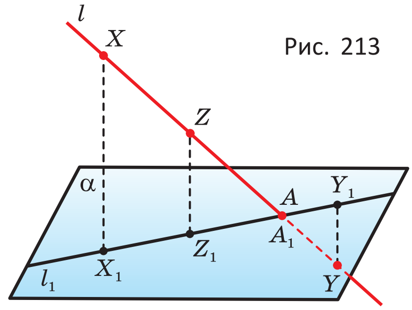

Рис. 213

Следующая теорема устанавливает *признак перпендикулярности прямой и плоскости*.

Теорема 2. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

Доказательство. Пусть прямая p пересекает плоскость α в точке O и перпендикулярна пересекающимся прямым a и b, лежащим в плоскости α (рис. 214). Докажем, что прямая p перпендикулярна плоскости α, т. е. что прямая p перпендикулярна прямой m, произвольно выбранной в плоскости α.

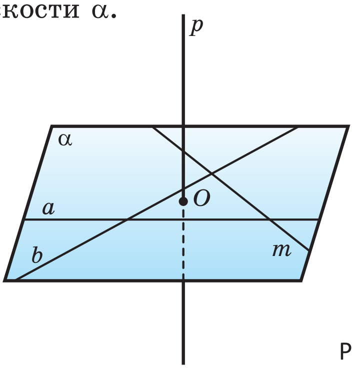

Рис. 214

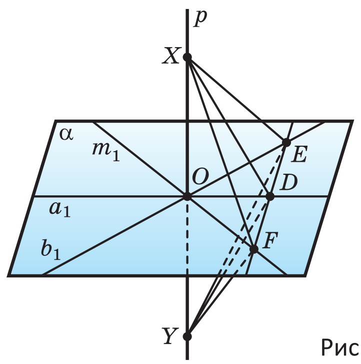

Рис. 215

Проведём через точку O прямые a_1, b_1 и m_1, соответственно параллельные прямым a, b и m. В плоскости α проведём какую-либо прямую так, чтобы она пересекала прямые a_1, b_1 и m_1 в точках D, E, F (рис. 215). На прямой p отметим точки X и Y на равных расстояниях от точки O. Прямые a_1 и b_1 — серединные перпендикуляры к отрезку XY, поэтому $DX = DY$ и $EX = EY$. Значит, треугольники XDE и YDE равны по трём сторонам, поэтому углы XEF и YEF равны. Учитывая это, получим, что треугольники XEF и YEF равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $FX = FY$. Это означает, что треугольник XFY является равнобедренным, поэтому его медиана FO является и высотой, т. е. прямые p_1 и m_1, а также прямые p и m перпендикулярны.

Следствие 1. Если прямая перпендикулярна одной из параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой плоскости.

Пусть плоскости α и β параллельны и прямая l перпендикулярна плоскости α (рис. 216). Докажем, что прямая l перпендикулярна

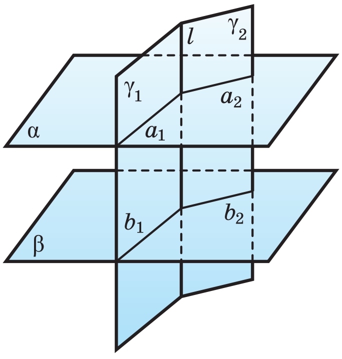

Рис. 216

плоскости β. Для доказательства проведём через прямую l две какие-либо плоскости γ_1 и γ_2. Пусть они пересекают плоскость α по прямым a_1 и a_2, а параллельную ей плоскость β — по прямым b_1 и b_2. Поскольку $a_1 \parallel b_1$ и $a_2 \parallel b_2$, $l \perp a_1$ и $l \perp a_2$, то $l \perp b_1$ и $l \perp b_2$. По теореме **2** получаем, что $l \perp \beta$.

Следствие 2. Если одной прямой перпендикулярны две плоскости, то они параллельны.

Проведите самостоятельно обоснование этого утверждения, используя рисунок 216.

Б) **Теорема 3. Через каждую точку пространства проходит единственная плоскость, перпендикулярная данной прямой.**

Доказательство. Пусть даны прямая l и точка A. В случае, когда точка A не лежит на прямой l (рис. 217), в плоскости, которая определяется точкой A и прямой l, через точку A проведём прямую m, перпендикулярную прямой l, и через точку B пересечения прямых m и l — ещё одну прямую n, перпендикулярную прямой l.

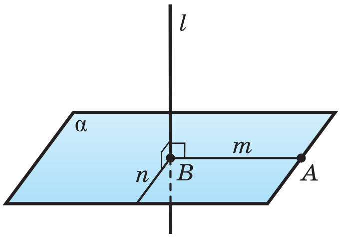

Рис. 217

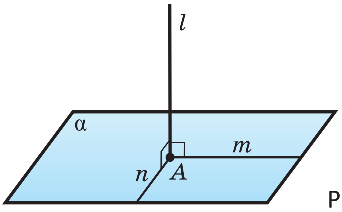

Рис. 218

В случае, когда точка A лежит на прямой l (рис. 218), через точку A проведём прямые m и n, перпендикулярные прямой l. Через прямые m и n проведём плоскость α. Эти плоскости и прямая l перпендикулярны по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

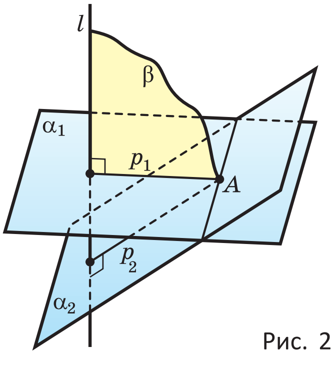

Рис. 219

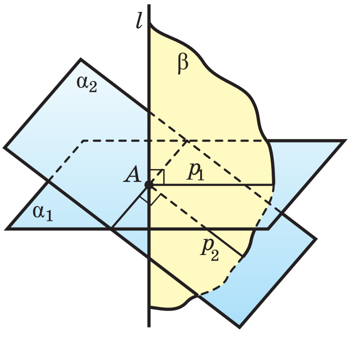

Рис. 220

Докажем теперь, что построенная плоскость α единственная. Допустим, что это не так. Пусть через точку A проведены две плоскости α_1 и α_2, перпендикулярные прямой l (рис. 219 и 220). Через прямую l и точку A проведём какую-либо плоскость β. Она пересекает плоскости α_1 и α_2 по некоторым прямым p_1 и p_2, так как плоскость β имеет с плоскостями α_1 и α_2 общую точку A. Поскольку $l \perp \alpha_1$ и $l \perp \alpha_2$, то $l \perp p_1$ и $l \perp p_2$. Получается, что в плоскости β через точку A проведены две прямые p_1 и p_2, перпендикулярные прямой l, что невозможно.

Теорема 4. Через каждую точку пространства проходит единственная прямая, перпендикулярная данной плоскости.

Доказательство. Пусть даны точка A и плоскость α. Пусть a — прямая в плоскости α, а β — плоскость, которая проходит через точку A и перпендикулярна прямой a. Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой b (рис. 221). В плоскости β через точку A проведём прямую l, перпендикулярную прямой b. Прямая l — искомая, так как она перпендикулярна пересекающимся прямым a и b: $l \perp b$ по построению; $l \perp a$, так как $a \perp \beta$ и l принадлежит β.

Прямая l — единственная. Допустим, что это не так. Пусть через точку A проходит ещё одна прямая l_1, перпендикулярная плоскости α (рис. 222 и 223). Тогда по теореме **1** прямые l и l_1 параллельны друг другу. Но такое невозможно, так как прямые l и l_1 пересекаются в точке A.

Следствие 3. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений.

Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед (рис. 224). Поскольку ребро CC_1 перпендикулярно плоскости $ABCD$, то треугольник ACC_1 прямоугольный с прямым углом C. Поэтому $AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2$. А поскольку треугольник ABC также прямоугольный с прямым углом B, то $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Учитывая, что $CC_1 = AA_1$ и $BC = AD$, получаем, что

$$AC_1^2 = AB^2 + BC^2 + CC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$

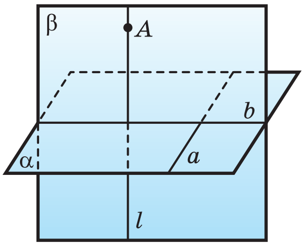

Рис. 221

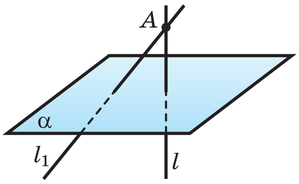

Рис. 222

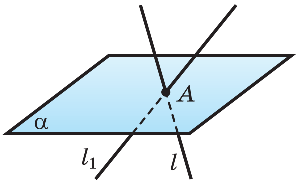

Рис. 223

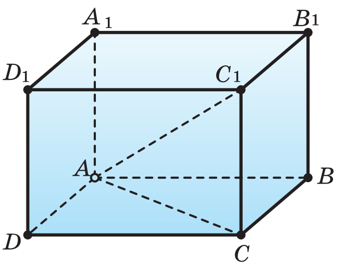

Рис. 224

1. Какие прямые пространства называются перпендикулярными? Могут ли скрещивающиеся прямые быть перпендикулярными?

2. Какую прямую называют перпендикулярной плоскости?

3. Сформулируйте свойство прямых, перпендикулярных одной плоскости.

4. Сформулируйте признак перпендикулярности прямой и плоскости.

5. Сформулируйте свойство прямой, перпендикулярной одной из параллельных плоскостей.

6. Сформулируйте свойство плоскостей, перпендикулярных одной прямой.

7. Сформулируйте утверждение о плоскости, которая перпендикулярна данной прямой и проходит через данную точку.

8. Сформулируйте утверждение о прямой, которая перпендикулярна данной прямой и проходит через данную точку.

9. Назовите в своём классе модели прямых, перпендикулярных плоскости.

10. В правильной треугольной призме выбирают грань. Сколько рёбер этой призмы перпендикулярны выбранной грани?

11. Прямая FA перпендикулярна плоскости BCF, и точка F — середина отрезка AD. Верно ли, что:
а) $AB = DB$;
б) если $BF = FC$, то $AB = AC$;
в) если $AB = DC$, то $BF = FC$?

12. Есть параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Верно ли, что:
а) если $\angle BAD = 90°$, то $CD \perp B_1C_1$ и $AB \perp A_1D_1$;
б) если $AB \perp DD_1$, то $AB \perp CC_1$ и $DD_1 \perp A_1B_1$?

Задача 1. Докажите, что если рёбра PQ и PS, а также PR и PT четырёхугольной пирамиды $PQRST$, основанием которой является параллелограмм, равны между собой (рис. 225), то отрезок, соединяющий вершину P с точкой O пересечения диагоналей этого параллелограмма, перпендикулярен основанию $QRST$.

Решение. $QRST$ — параллелограмм и $QS \cap RT = O$, поэтому $OQ = OS$ и $OR = OT$.

Поскольку $\triangle PQS$ равнобедренный и $OQ = OS$, то $PO \perp QS$.

Поскольку $\triangle PRT$ равнобедренный и $OR = OT$, то $PO \perp RT$.

$PO \perp QS$ и $QS \subset (QRS)$, $PO \perp RT$ и $RT \subset (QRS)$, поэтому $PO \perp (QRS)$ (теорема **2**).

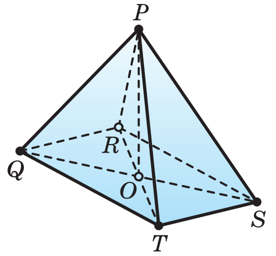

Рис. 225

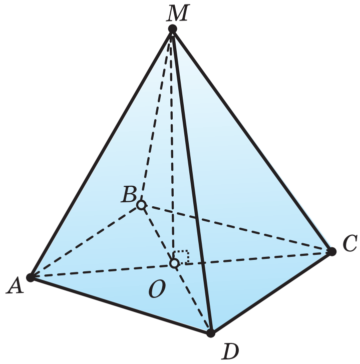

Рис. 226

Используя рисунок 226, докажите самостоятельно обратное утверждение: «Если отрезки MA и MC, а также MB и MD соединяют точку M перпендикуляра, проведённого из центра O параллелограмма $ABCD$, с противоположными его вершинами, то эти отрезки попарно равны».

Задача 2. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ точка M — середина ребра BC (рис. 227). Докажите, что прямая BC перпендикулярна плоскости ADM.

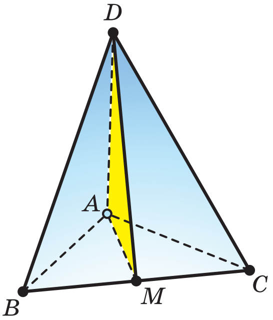

Рис. 227

Р е ш е н и е. $DABC$ — правильная треугольная пирамида, поэтому $\triangle ABC$ — равносторонний и $\triangle DBC$ — равнобедренный.

$\triangle ABC$ — равносторонний, и M — середина BC, поэтому $BC \perp AM$.

$\triangle DBC$ — равнобедренный, и M — середина BC, поэтому $BC \perp DM$.

$BC \perp AM$ и $BC \perp DM$, поэтому $BC \perp (ADM)$.

Задача 3*. Докажите, что диагональ BD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярна плоскости треугольника AB_1C (рис. 228).

Р е ш е н и е. $ABCD$ — квадрат, поэтому $AC \perp BD$.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, поэтому $AC \perp BB_1$.

$AC \perp BD$ и $AC \perp BB_1$, поэтому $AC \perp (BB_1D)$.

$AC \perp (BB_1D)$ и $BD_1 \subset (BB_1D)$, поэтому $AC \perp BD_1$.

BB_1C_1C — квадрат, поэтому $B_1C \perp BC_1$.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, поэтому $AB \perp B_1C$.

$B_1C \perp BC_1$ и $AB \perp B_1C$, поэтому $B_1C \perp (ABC_1)$.

$B_1C \perp (ABC_1)$ и $BD_1 \subset (ABC_1)$, поэтому $B_1C \perp BD_1$.

$AC \perp BD_1$ и $B_1C \perp BD_1$, поэтому $BD_1 \perp (AB_1C)$.

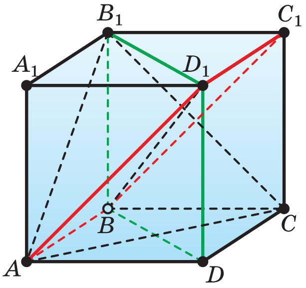

Рис. 228

Используя рисунок 228, установите, в какой точке прямая BD_1 пересекает плоскость AB_1C.

212. Определите, перпендикулярна ли прямая l плоскости α, учитывая, что на рисунке:

а) 229 параллельные прямые a и b лежат в плоскости α и прямая l перпендикулярна им обеим;

б) 230 пересекающиеся прямые c и d лежат в плоскости α и прямая l перпендикулярна им обеим;

в) 231 пересекающиеся прямые m и n лежат в плоскости α и прямая l перпендикулярна им обеим;

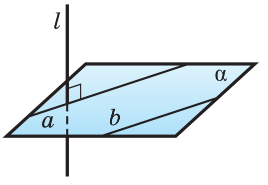

Рис. 229

г) 232 прямая r перпендикулярна пересекающимся прямым p и q плоскости α и прямая l параллельна прямой r.

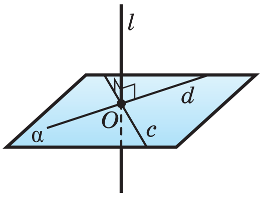

Рис. 230

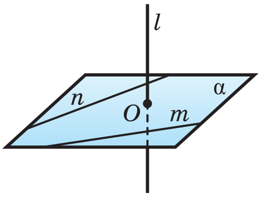

Рис. 231

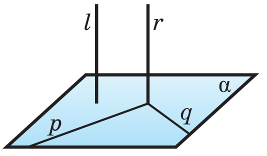

Рис. 232

213. На рёбрах F_1G_1 и FF_1 прямоугольного параллелепипеда $EFGHE_1F_1G_1H_1$ выбраны точки A и B (рис. 233). Определите, перпендикулярны ли:

а) прямая FG и плоскость EE_1F_1;

б) прямые AB и GH;

в) прямые F_1G и EF.

214. Точки L, M и O лежат на прямой, перпендикулярной плоскости α, а точки O, B, C и D лежат в этой плоскости (рис. 234). Определите, является ли прямым угол:

а) LOB; б) MOC; в) DLM; г) DOL; д) BMO.

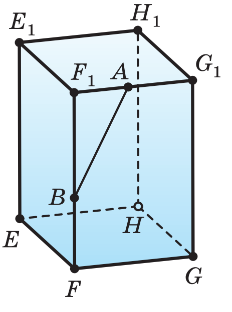

Рис. 233

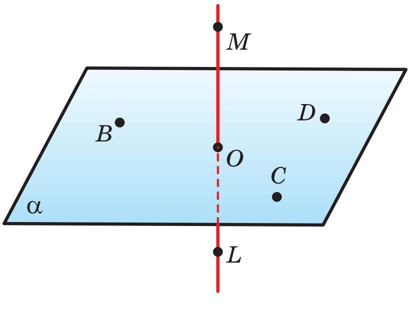

Рис. 234

215. Через концы P и Q отрезка PQ, параллельного плоскости γ, проведены прямые, перпендикулярные этой плоскости и пересекающие её в точках P_1 и Q_1. Докажите, что $PQ = P_1Q_1$.

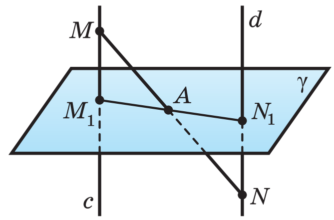

Рис. 235

216. На ребре HE четырёхугольной пирамиды $REFGH$, у которой боковое ребро FR перпендикулярно плоскости основания, выбрана точка A и на отрезках AF и AR отмечены их середины B и C. Докажите, что прямая BC перпендикулярна плоскости основания $EFGH$, и найдите угол между прямыми BC и GH.

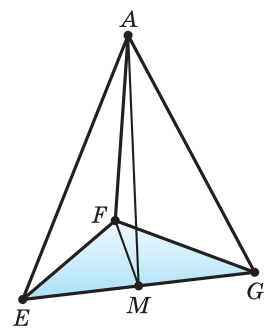

Рис. 236

217. Через концы M и N отрезка, пересекающего плоскость γ в точке A, проведены прямые c и d. Эти прямые перпендикулярны плоскости γ и пересекают её в точках M_1 и N_1 соответственно (рис. 235). Докажите, что точки M_1, N_1 и A лежат на одной прямой, и найдите отрезок MN, учитывая, что $MM_1 = 24$ см, $NN_1 = 8$ см, $AN_1 = 6$ см.

218. Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные плоскости α и пересекающие её в точках C и D соответственно. Найдите расстояние между точками A и B, учитывая, что $AC = 9$ м, $BD = 6$ м, $CD = 7{,}2$ м и отрезок AB не пересекает плоскость α.

219. Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные плоскости α и пересекающие её в точках A_1 и B_1 соответственно. Найдите A_1B_1, учитывая, что $AB = 30$ см, $AA_1 = 43$ см, $BB_1 = 67$ см.

220*. Через вершину C правильного треугольника ABC со стороной $16\sqrt{3}$ см проведена прямая k, перпендикулярная плоскости ABC, а через ортоцентр O этого треугольника — прямая l, параллельная прямой k. На прямых k и l выбраны точки D и E, отстоящие от точек C и O на 16 см и 12 см соответственно. Найдите расстояние DE и расстояния от точек D и E до вершин треугольника.

221*. Через центр O симметрии квадрата со стороной a проведена прямая l, перпендикулярная плоскости квадрата. Найдите расстояние от вершин квадрата до точки K прямой l, учитывая, что $OK = d$.

222. Дан прямоугольный треугольник EFG с прямым углом F и катетами FE и FG, равными 6 см и 8 см соответственно. От вершины F на луче, перпендикулярном плоскости треугольника, отложен отрезок FA, равный 12 см, а на гипотенузе EG отмечена её середина M (рис. 236). Найдите радиус окружности, описанной около треугольника AFM.

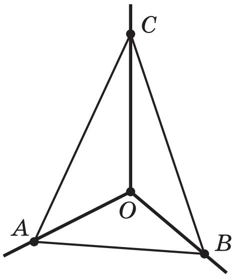

Рис. 237

223. На рисунке 237 прямые OA, OB и OC попарно перпендикулярны. Найдите отрезок BC, учитывая, что:

а) $OA = 6$ см, $AB = 14$ см, $OC = 3$ см;
б) $AC = 18$ см, $AB = 32$ см, $OC = 10$ см;
в*) $OA = p$, $AB = q$, $OC = r$;
г*) $AC = k$, $AB = l$, $OC = m$.

224. Из вершины B треугольника ABC проведён отрезок BD, перпендикулярный плоскости треугольника. Найдите длину этого отрезка, учитывая, что $DA = 13$ см, $DC = 15$ см, а сторона BC длиннее стороны BA на 4 см.

225. На прямой, перпендикулярной плоскости α и пересекающей её в точке O, выбраны две точки A и B, а на плоскости α — такая точка X, что $XA = 3$, $XB = 4$. Найдите XO, учитывая, что:

а) $AB = 5$; б) $AB = 6$; в) $AB = 7$.

226*. Боковое ребро OY треугольной пирамиды $OXYZ$ перпендикулярно плоскости её основания XYZ. Найдите это ребро, учитывая, что рёбра YX и YZ равны 27 см и 48 см соответственно и рёбра OZ и OX относятся как $4 : 3$.

227. Основанием прямоугольного параллелепипеда является прямоугольник с измерениями 9 см и 12 см, а диагональ параллелепипеда равна $15\sqrt{2}$ см. Найдите третье измерение параллелепипеда.

228. Углы A и B треугольника ABC вместе составляют 90°, а прямая BD перпендикулярна плоскости ABC. Докажите, что прямые CD и AC перпендикулярны.

229. Прямая AM перпендикулярна плоскости квадрата $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Докажите, что прямая BD перпендикулярна:

а) плоскости AMO; б) прямой MO.

230. Рёбра AB и AC, а также DB и DC треугольной пирамиды $ABCD$ равны, а точка M — середина ребра BC. Докажите, что плоскость треугольника ADM перпендикулярна прямой BC.

231. Есть прямоугольный параллелепипед $CDEFC_1D_1E_1F_1$, грань $CDEF$ которого является квадратом. Найдите площадь боковой поверхности четырёхугольной пирамиды C_1CDEF, учитывая, что $CD = 20$ мм, $CE_1 = 20\sqrt{6}$ мм.

232. Рёбра прямоугольного параллелепипеда равны 12 см, 16 см и 28 см соответственно. Определите площадь сечения, проведённого через концы трёх рёбер, выходящих из одной вершины.

233*. Измерения AB, AD и диагональ AC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны 6, 12 и 18 соответственно. Точки K и K_1 выбраны на рёбрах AD и A_1D_1 так, что $AK : KD = A_1K_1 : K_1D_1 = 1 : 3$. Докажите, что плоскость BKK_1 перпендикулярна прямой AC, и найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью BKK_1.

234. Через центр O описанной около треугольника ABC окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника (рис. 238). Докажите, что каждая точка X этой прямой равноудалена от вершин треугольника.

235. Докажите, что все прямые, проходящие через данную точку M прямой a перпендикулярно ей, лежат в плоскости, которая перпендикулярна прямой a и проходит через точку M.

236. Докажите, что если точка X равноудалена от концов данного отрезка AB, то он лежит в плоскости, проходящей через середину отрезка AB и перпендикулярной прямой AB.

237. Через вершины A и B треугольника ABC проведены прямые k и l, перпендикулярные его плоскости, а через медиану CD — плоскость, пересекающая прямые k и l в точках E и F соответственно (рис. 239). Установите:

а) чем является отрезок CD в треугольнике CEF;

б) что если $CA = CB$, то треугольник CEF является равнобедренным.

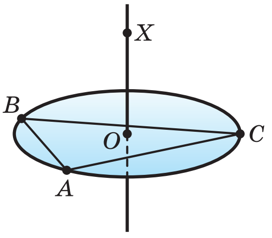

Рис. 238

238. На прямой, перпендикулярной плоскости треугольника PQR и проходящей через вершину P, выбрана точка A. На отрезке, соединяющем середину стороны QR с точкой A, отмечена такая точка T, что $AT : TP = 2 : 1$. Учитывая, что G — центр тяжести треугольника PQR, найдите угол между прямыми:

а) GT и QR;   б) GT и PQ.

239. Точка Q является центром квадратного основания $ABCD$, а точка K — серединой ребра PA четырёхугольной пирамиды $PABCD$, все рёбра которой равны 100. Начертите сечение пирамиды и найдите его площадь, учитывая, что плоскость сечения проходит через точку K и перпендикулярна прямой:

а) AC;   в) PQ;

б) PA;   г) BD.

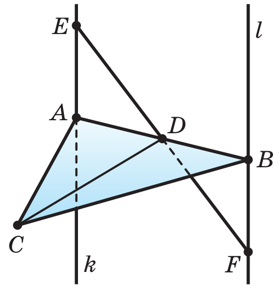

Рис. 239

240. Все грани треугольной пирамиды $IJKL$ — правильные треугольники со стороной 6 см. Постройте сечение этой пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра KL и перпендикулярной ему, и найдите площадь этого сечения.

241. Точка Q — середина ребра KK_1 прямоугольного параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$, точка H ребра MM_1 такова, что $MH : HM_1 = 4 : 1$. Найдите длину отрезка HQ, учитывая, что диагональ параллелепипеда равна 41 см, а диагональ его основания — 9 см.

242*. Основанием треугольной пирамиды $SXYZ$ является правильный треугольник, а рёбра SZ, SX, SY взаимно перпендикулярны. Через точку Q, выбранную на ребре XZ, проведена плоскость, перпендикулярная прямой SZ. Найдите ребро SX пирамиды, учитывая, что площадь сечения равна 32 см^2, а $SQ = 17$ см.

243*. Есть треугольная пирамида $QABC$, основание которой — правильный треугольник ABC, а боковые рёбра QA, QB, QC равны друг другу. Из вершины C и из такой точки X ребра AC, что $AX = 45$ см и $XC = 30$ см, проведены перпендикуляры к грани QAB. Найдите длину этих перпендикуляров, учитывая, что расстояние между их основаниями равно 18 см.

244*. Есть правильная треугольная призма $MNKM_1N_1K_1$. Точки A и B — середины рёбер MK и KK_1 соответственно. Через эти точки проведены прямые, перпендикулярные грани MM_1N_1N и пересекающие её в точках P и Q соответственно. Найдите сторону основания и боковое ребро призмы, учитывая, что $AB = 2\sqrt{61}$ см, а $PQ = 13$ см.

245*. В треугольной пирамиде $QFGH$ основание FGH — правильный треугольник, а боковые рёбра QF, QG, QH равны друг другу. Одно сечение пирамиды перпендикулярно ребру QH и проходит через вершину F, другое — параллельно ребру QH и содержит вершину G и такую точку B ребра FH, что $FB = 8$ см и $BH = 7$ см. Найдите отрезок, по которому пересекаются эти сечения, учитывая, что $QF = 12$ см.

246*. Есть треугольная пирамида $PABC$, все рёбра которой равны друг другу. В ней отмечены центр Q её основания ABC и внутренняя точка K ребра PB. Сделайте соответствующий рисунок в тетради и начертите сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку K и перпендикулярной прямой:

а) BC; б) BP; в) BQ.

247*. Точка K — середина ребра A_1B_1 единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение куба и найдите его периметр и площадь, учитывая, что плоскость проходит через точку K и перпендикулярна прямой:

а) DD_1; б) CD; в) C_1D; г) CD_1; д) BD.

Пространственное моделирование

При выполнении задания на определение вертикальности столба для забора (рис. 240) ученик проверил вертикальность первого из столбов, а дальше, измерив высоту первого и второго столбов и расстояние между ними снизу и сверху, сделал вывод о том, что и второй столб тоже вертикальный. Определите, обеспечивают ли полученные учеником сведения правильность его вывода. Ответ обоснуйте.

Рис. 240

§ 8. Расстояния

А) Пусть даны плоскость α и точка M вне её (рис. 241). Через точку M проведём прямую l, перпендикулярную плоскости α, и пусть A — точка пересечения прямой l с плоскостью α. Отрезок MA называется *перпендикуляром к плоскости*, проведённым из точки M, а точка A — *основанием перпендикуляра*.

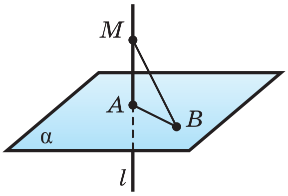

Рис. 241

Соединим точку M ещё с какой-либо точкой B плоскости α. Отрезок MB называется *наклонной к плоскости*, проведённой из точки M, а точка B — *основанием наклонной*. Отрезок AB называется *проекцией наклонной* на плоскость α.

Свойства перпендикуляра и наклонных

Если из одной точки вне плоскости проведены к этой плоскости две наклонные (рис. 242), то:

а) наклонные, имеющие равные проекции, равны между собой;

б) та наклонная больше, проекция которой больше;

в) равные наклонные имеют равные проекции;

г) бо́льшая наклонная имеет бо́льшую проекцию.

Свойства перпендикуляров и наклонных докажите самостоятельно, используя рисунок.

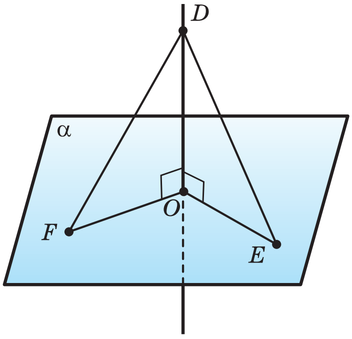

Рис. 242