275*. В треугольной пирамиде все рёбра равны a. Найдите расстояние между рёбрами, не принадлежащими одной грани.

276*. В четырёхугольной пирамиде все рёбра основания равны a, а все боковые рёбра — b (рис. 265). Найдите расстояние между боковым ребром и ребром основания, не лежащим с ним в одной плоскости.

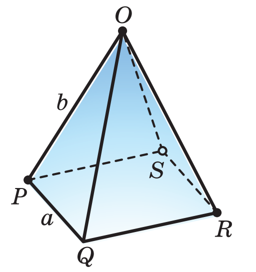

Рис. 265

277*. Стороны AB, AC, BC треугольника ABC соответственно равны 17, 8 и 15, а отрезок BD перпендикулярен плоскости этого треугольника. Найдите расстояние от концов BD до меньшей стороны треугольника, учитывая, что $BD = 36$.

278*. Точка M лежит на прямой, проходящей через вершину B ромба $ABCD$ и перпендикулярной его плоскости. Найдите расстояния от точки M до прямых, содержащих стороны ромба, учитывая, что $AB = 25$ см, $\angle BAD = 60°$, $BM = 12,5$ см.

§ 9. Угол между прямой и плоскостью

А) С помощью чисел, выражающих расстояние между двумя прямыми и величину угла между ними, можно описать взаимное расположение этих прямых в пространстве. Если прямые a и b пересекаются, то их взаимное расположение характеризует угол α между ними, расстояние между такими прямыми считается равным нулю (рис. 266). Если прямые a и b параллельны, то их взаимное расположение характеризует расстояние d между ними, угол между такими прямыми равен нулю (рис. 267). Если прямые a и b скрещиваются, то их взаимное расположение характеризует угол α и расстояние d между ними (рис. 268).

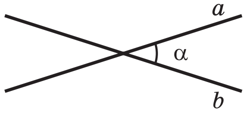

Рис. 266

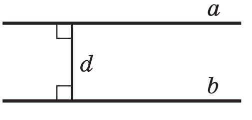

Рис. 267

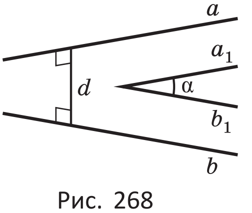

Рис. 268

Т е о р е м а 9. Если прямая плоскости перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость, то она перпендикулярна и самой наклонной, а если прямая плоскости перпендикулярна наклонной к плоскости, то она перпендикулярна и проекции этой наклонной.

Доказательство. Пусть отрезки AB и AC — соответственно перпендикуляр и наклонная к плоскости α, тогда отрезок BC — проекция наклонной AC на эту плоскость (рис. 269).

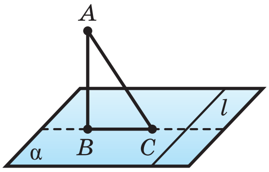

Рис. 269

Пусть прямая l плоскости α перпендикулярна проекции BC. Докажем, что прямая l перпендикулярна самой наклонной AC.

Прямая l перпендикулярна пересекающимся прямым BC и AB плоскости ABC — первой прямой по условию, а второй — так как она лежит в плоскости α, которой перпендикулярна прямая AB. Поэтому прямая l перпендикулярна и прямой AC плоскости ABC.

Пусть прямая l плоскости α перпендикулярна наклонной AC. Докажем, что прямая l перпендикулярна проекции BC этой наклонной.

Прямая l перпендикулярна пересекающимся прямым AC и AB плоскости ABC. Поэтому она перпендикулярна и прямой BC плоскости ABC.

Теорема **9** называется *теоремой о трёх перпендикулярах*, потому что в ней идёт речь об отношении перпендикулярности между тремя прямыми. Приведём примеры использования этой теоремы.

Пример 1. Из вершины A к плоскости треугольника ABC, стороны которого AB, BC, CA равны 13, 20, 11 соответственно, возведён перпендикуляр AD длиной 36 (рис. 270). Найдём расстояние от точки D до прямой BC.

Решение. Искомое расстояние — длина перпендикуляра, опущенного из точки D на прямую BC. Проведение этого перпендикуляра потребует найти его основание на прямой BC. Для этого в плоскости треугольника ABC построим высоту AH этого треугольника. Поскольку прямая BC перпендикулярна высоте AH, которая является проекцией наклонной DH, то по теореме о трёх перпендикулярах прямая BC перпендикулярна наклонной DH, т. е. отрезок DH выражает искомое расстояние.

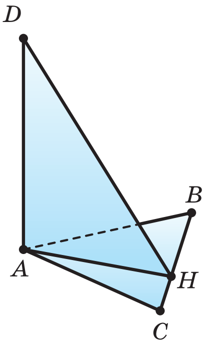

Рис. 270

Найдём сначала высоту AH треугольника ABC. По формуле Герона определим площадь S этого треугольника, что позволит найти и его высоту AH:

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}(20 + 11 + 13) = 22;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{22(22-20)(22-11)(22-13)} = 66;$$

$$AH = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot 66}{20} = 6{,}6.$$

Треугольник DAH — прямоугольный с прямым углом A, по теореме Пифагора найдём DH: $DH = \sqrt{AD^2 + AH^2} = \sqrt{36^2 + 6{,}6^2} = 36{,}6$.

О т в е т: 36,6.

Пример 2. Докажем, что если данная точка пространства равноудалена от сторон многоугольника, то в этот многоугольник можно вписать окружность, центр которой совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость многоугольника.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть точка S равноудалена от сторон A_1A_2, A_2A_3, ... $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 многоугольника $A_1A_2A_3$ ... $A_{n-1}A_n$ и SO — перпендикуляр из точки S на плоскость этого многоугольника. Тогда перпендикуляры SK_1, SK_2, ... SK_{n-1}, SK_n, опущенные из точки S на стороны многоугольника, равны друг другу (рис. 271).

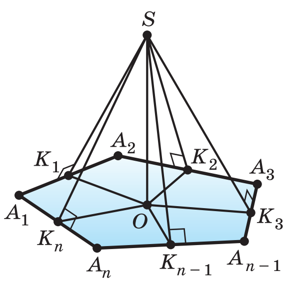

Рис. 271

Соединим точку O с точками K_1, K_2, ... K_{n-1}, K_n. Поскольку отрезки OK_1, OK_2, ... OK_{n-1}, OK_n — проекции отрезков SK_1, SK_2, ... SK_{n-1}, SK_n на плоскость многоугольника, стороны которого A_1A_2, A_2A_3, ... $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 перпендикулярны наклонным SK_1, SK_2, ... SK_{n-1}, SK_n, то эти стороны и, соответственно, отрезки OK_1, OK_2, ... OK_{n-1}, OK_n перпендикулярны.

Треугольники SOK_1, SOK_2, ... SOK_{n-1}, SOK_n прямоугольные, и все они имеют общий катет SO и равные гипотенузы. Значит, эти треугольники равны, соответственно, равны и отрезки OK_1, OK_2, ... OK_{n-1}, OK_n, что означает равноудалённость точки O от сторон многоугольника. Значит, в этот многоугольник можно вписать окружность с центром O.

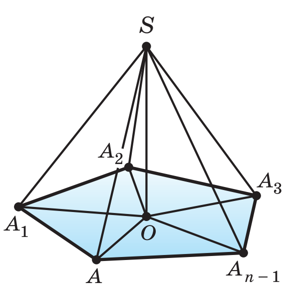

Рис. 272

Пример 3*. Если данная точка пространства равноудалена от вершин многоугольника, то около этого многоугольника можно описать окружность, центр которой совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость многоугольника.

Используя рисунок 272, проведите доказательство этого утверждения самостоятельно.

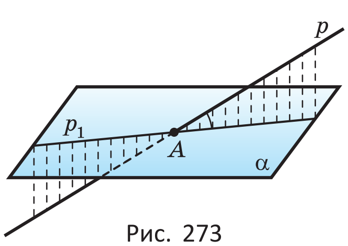

Рис. 273

Б) Теперь введём понятие угла между прямой и плоскостью. Пусть дана плоскость α и прямая p, которая её пересекает и не перпендикулярна α (рис. 273). Основания перпендикуляров, опущенных из точек прямой p на плоскость α, образуют прямую p_1. Эта прямая называется *проекцией прямой p* на плоскость α.

Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной ей, называется угол между прямой и её проекцией на плоскость.

Угол между прямой и плоскостью — наименьший из углов, которые образует эта прямая со всеми прямыми плоскости. Докажите утверждение самостоятельно.

Если прямая l перпендикулярна плоскости α, то её проекцией на эту плоскость является точка A пересечения прямой с плоскостью (рис. 274). В этом случае прямая l образует со всеми прямыми плоскости углы, равные $90°$. Этот угол и принимается в качестве угла между прямой и перпендикулярной ей плоскостью.

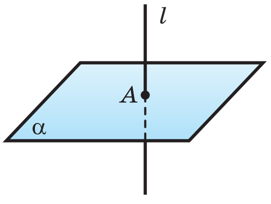

Рис. 274

Если прямая l параллельна плоскости α, то её проекцией на плоскость является прямая l_1, параллельная l. Угол между параллельными прямыми считается равным $0°$. Поэтому угол между параллельными прямой и плоскостью принимается равным $0°$.

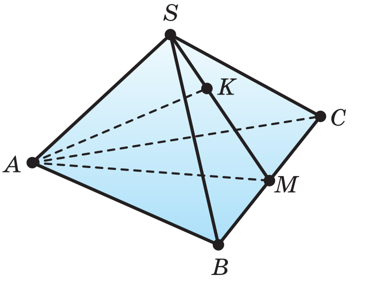

Рис. 275

Пример 4. В треугольной пирамиде $SABC$ рёбра основания ABC равны 6, а боковые рёбра — 5. Найдём угол между медианой AM основания и плоскостью SBC.

Решение. Пусть AK — перпендикуляр, опущенный из точки A на плоскость SBC. Поскольку наклонная AM перпендикулярна прямой BC, то и её проекция KM перпендикулярна прямой BC. Значит, точка K находится на серединном перпендикуляре к отрезку BC (рис. 275).

Искомый угол между медианой AM основания и плоскостью SBC — это угол AMK. Его можно найти через теорему косинусов, если знать стороны треугольника SAM. Находим: $AM = 3\sqrt{3}$, $SM = \sqrt{SB^2 - BM^2} = 4$, тогда

$$\cos SMA = \frac{SM^2 + AM^2 - SA^2}{2SM \cdot AM} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Значит, $\angle SMA = \arccos\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{3}}{4}$.

При вычислении угла между скрещивающимися прямыми бывает полезной следующая *теорема о трёх косинусах*.

Угол α между прямой l и плоскостью λ, угол β между другой прямой m этой плоскости и проекцией на неё прямой l и угол γ между прямыми l и m связаны равенством $\cos\alpha\cos\beta = \cos\gamma$.

Доказательство. Пусть точка A принадлежит прямой l, B — точка пересечения прямой l с плоскостью λ, прямая m лежит в плоскости λ и проходит через точку B, C — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую m, O — проекция точки A на плоскость λ (рис. 276).

Пусть $AB = a$ и $\angle\ ABO = \alpha$, $\angle\ OBC = \beta$, $\angle\ ABC = \gamma$. Поскольку OC — проекция AC и $AC \perp m$, то $OC \perp m$. Тогда из прямоугольных треугольников AOB, OCB и ACB имеем:

$$BO = a\cos\alpha,$$
$$BC = BO\cos\beta = a\cos\alpha\cos\beta \text{ и}$$
$$\cos\gamma = BC : AB = \cos\alpha\cos\beta.$$

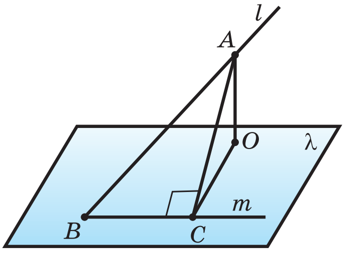

Рис. 276

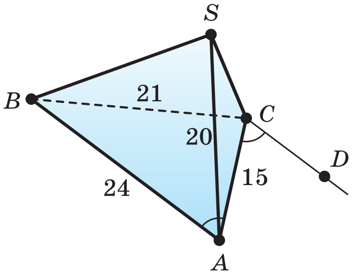

Рис. 277

Пример 5. В треугольной пирамиде $SABC$ ребро SA перпендикулярно плоскости ABC и равно 20. Найдём угол между прямыми SC и AB, учитывая, что $AB = 24$, $BC = 21$ и $AC = 15$.

Решение. Используем теорему о трёх косинусах, учитывая, что угол γ между прямыми SC и AB равен углу между прямой SC и прямой CD, которая проходит через точку C параллельно AB (рис. 277), поэтому $\cos\gamma = \cos\angle\ SCA\cos\angle\ ACD = \cos\angle\ SCA\cos\angle\ BAC$.

Поскольку $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 25$ и $\cos\angle\ BAC = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB\cdot AC} = \dfrac{1}{2}$, то $\cos\angle\ SCA = \dfrac{3}{5}$ и $\cos\gamma = 0{,}3$. Значит, $\gamma = \arccos 0{,}3$.

Ответ: $\arccos 0{,}3$.

?

1. Сформулируйте теорему о трёх перпендикулярах.

2. Какое свойство имеет многоугольник, все стороны которого равноудалены от данной точки пространства?

3. Какое свойство имеет многоугольник, все вершины которого равноудалены от данной точки пространства?

4. Что называется проекцией прямой на плоскость?

5. Что называется углом между прямой и плоскостью?

6. Связь между какими углами выражает теорема о трёх косинусах?

7. Углы BAC и ACB треугольника ABC соответственно равны 41° и 49°, а отрезок AD перпендикулярен плоскости этого треугольника. Верно ли утверждение, что прямые BC и BD перпендикулярны?

8. Точка X принадлежит прямой, проходящей через центр O правильного треугольника ABC перпендикулярно его плоскости. Верно ли, что:

а) расстояния от точки X до вершин треугольника равны;
б) расстояния от точки X до сторон треугольника равны;
в) $\angle AXO = \angle BXO = \angle CXO$;
г) $\angle XAO = \angle XBO = \angle XCO$?

9. Дан прямоугольный параллелепипед $KLMNK_1L_1M_1N_1$ (рис. 278). Назовите угол между прямой:

а) KL и плоскостью NN_1M;
б) KM_1 и плоскостью KL_1L;
в) KL и плоскостью LL_1M_1;
г) KM_1 и плоскостью LMN;
д) KL_1 и плоскостью KLM;
е) KM_1 и плоскостью LMM_1.

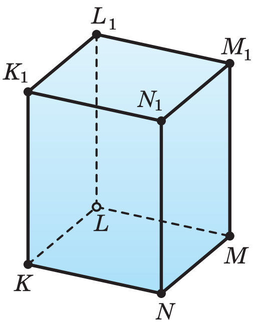

Рис. 278

Задача 1. Основанием треугольной пирамиды $DFGH$ является прямоугольный треугольник FHG с гипотенузой FG и углом HFG в 30° (рис. 279). Найдите высоту DK грани FDG, проведённую из вершины D, учитывая, что боковое ребро DH перпендикулярно плоскости основания и равно 4 см, а катет FH равен 6 см.

Решение. $DH \perp (FGH)$, поэтому KH — проекция наклонной DK на (FGH).

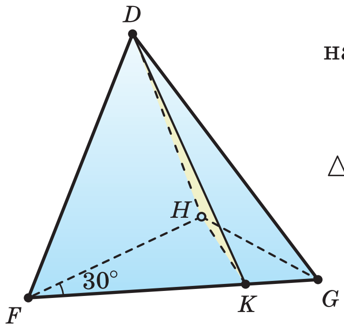

Рис. 279

DK — высота грани FDG, KH — проекция наклонной DK на (FGH), поэтому $KH \perp FG$.

$KH \perp FG$, $FH = 6$ см и $\angle HFK = 30°$, поэтому

$\triangle FHK$ прямоугольный, $KH = \dfrac{1}{2}FH = \dfrac{1}{2} \cdot 6 = 3$ (см).

$\triangle DHK$ — прямоугольный, поэтому

$$DK = \sqrt{DH^2 + KH^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ (см)}.$$

Ответ: 5 см.

Задача 2. Докажите, что если луч KA не лежит в плоскости неразвёрнутого угла LKM и острые углы AKL и AKM равны, то проекция луча KA на плоскость LKM является биссектрисой угла LKM (рис. 280).

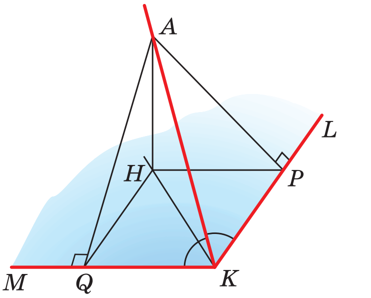

Рис. 280

Решение. Пусть $AH \perp (LKM)$, $AQ \perp KM$, $AP \perp KL$ и $\angle AKM = \angle AKL$.

$\triangle AQK = \triangle APK$ (по гипотенузе и острому углу), поэтому $AQ = AP$.

$HQ \perp KM$ (HQ — проекция AQ на (LKM) и $AQ \perp KM$).

$HP \perp KL$ (HP — проекция AL на (LKM) и $AP \perp KL$).

$HQ = HP$ (проекции равных наклонных).

KH — биссектриса угла LKM (точка H равноудалена от сторон угла LKM).

279. Укажите взаимное расположение прямых a и b на рисунке:

а) 281, учитывая, что $ABCD$ — квадрат и $BF \perp ABC$;

б) 282, учитывая, что $ABCD$ — квадрат и $BG \perp ABC$;

в) 283, учитывая, что $ABCD$ — ромб и $AE \perp ABC$;

г) 284, учитывая, что $ABCD$ — квадрат и $BK \perp ABC$.

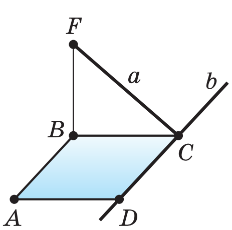

Рис. 281

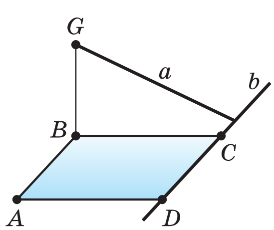

Рис. 282

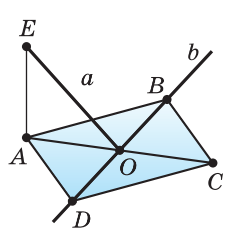

Рис. 283

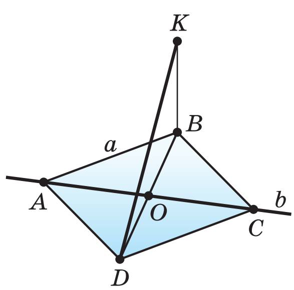

Рис. 284

280. Точка F лежит на прямой, проходящей через вершину B квадрата $ABCD$ перпендикулярно его плоскости. Учитывая, что $BF = 8$ дм, $AB = 15$ дм, найдите расстояние от точки F до прямых, которым принадлежат:
а) стороны квадрата;
б) диагонали квадрата.

281. Учитывая, что точка K лежит на прямой, проходящей через центр O симметрии ромба $ABCD$ перпендикулярно его плоскости:
а) докажите равенство расстояний от точки K до всех прямых, которым принадлежат стороны ромба;
б) найдите это расстояние, учитывая, что $OK = 45$ дм, $AC = 60$ дм, $BD = 80$ дм;
*в) найдите это расстояние, учитывая, что $AC = 2a$, $BD = 2b$, $KO = h$.

282. В равнобедренном треугольнике XYZ с основанием XY боковая сторона равна 20, а угол при основании составляет 30°. Из его вершины Y к плоскости XYZ возведён перпендикуляр QY. Учитывая, что $QY = 10$, найдите расстояния:
а) от точки Q до прямой XZ;
б) от точки Y до плоскости XQZ.

283. Есть прямоугольный треугольник XYZ с гипотенузой YZ и катетом XY, соответственно равными 13 см и 12 см. К плоскости треугольника из центра Q вписанного в него круга возведён перпендикуляр QG длиной 1,5 см. Найдите расстояния от точки G до сторон треугольника и от его вершин.

284. Основанием четырёхугольной пирамиды $QABCD$ является ромб $ABCD$ с углом ABC и стороной AB, соответственно равными 60° и a. Её боковое ребро AQ перпендикулярно плоскости основания. Найдите это ребро и расстояние от точки A до плоскости QDC, учитывая, что площадь грани QDC равна a^2.

285. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке Q, прямая HQ перпендикулярна плоскости данного параллелограмма. Найдите высоты параллелограмма, учитывая, что его стороны равны 20 см и 50 см, а расстояния от точки H до сторон параллелограмма равны 17 см и 25 см.

286. Точка A, лежащая вне плоскости прямого угла UVW, отстоит от его вершины V на x, а от каждой из сторон — на y (рис. 285). Найдите расстояние AO от точки A до плоскости прямого угла.

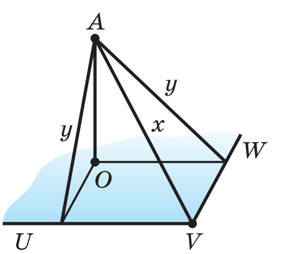

Рис. 285

287. Вершина пирамиды, в основании которой лежит прямоугольная трапеция с периметром 32, находится на расстоянии $\sqrt{17}$ от рёбер основания. Найдите полную поверхность пирамиды, учитывая, что её наибольшее и наименьшее боковые рёбра равны $7\sqrt{2}$ и $3\sqrt{2}$.

288*. Из вершины M треугольника MNK вне его плоскости проведена прямая ML, образующая со сторонами MN и MK равные острые углы. Определите, на какие части проекция прямой ML на плоскость треугольника разделяет сторону NK, учитывая, что $MN = 51$ м, $MK = 34$ м и $NK = 30$ м.

289. Имеется куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми:
а) AC и BB_1; б) AB_1 и CD_1; в) A_1D и C_1A.

290. Из вершины B прямоугольника $ABCD$, у которого $AB = 6$ см и $AD = 6\sqrt{2}$ см, к его плоскости возведён перпендикуляр BQ. Найдите расстояние от точки Q до плоскости прямоугольника, учитывая, что угол между прямой QD и плоскостью ABC равен 30°.

291. Найдите проекцию на плоскость наклонной длиной m, учитывая, что наклонная образует с плоскостью угол, равный:
а) 45°; б) 60°; в) 30°.

292. Отрезок длиной 10 см пересекает плоскость: концы его находятся на расстоянии 3 см и 2 см от плоскости. Найдите угол между данным отрезком и плоскостью.

293. Докажите, что если в правильной треугольной пирамиде сторона основания равна расстоянию от вершины до плоскости основания, то боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углом 60°.

294. Вершина правильной четырёхугольной пирамиды отстоит от плоскости основания на h, а её боковые рёбра образуют с плоскостью основания углы в 60°. Найдите боковую поверхность пирамиды.

295. Из точки, отстоящей от плоскости на d, проведены две наклонные, которые образуют между собой угол φ, а с плоскостью — углы α и β. Найдите расстояние между их концами, учитывая, что:
а) $\alpha = \beta = 45°$, $\varphi = 60°$; б) $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$, $\varphi = 90°$.

296. Из точки, отстоящей от плоскости на d, проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы α и β, а угол между их проекциями равен φ. Найдите расстояние между их концами, учитывая, что:
а) $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$, $\varphi = 150°$; б) $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$, $\varphi = 90°$.

297. Из точки A, отстоящей на d от плоскости α, проведены наклонные AB и AC под углом 30° к плоскости. Их проекции на плоскость α образуют угол в 120°. Найдите длину отрезка BC.

298. Точка P отстоит на a от каждой вершины квадрата $ABCD$ со стороной a. Найдите угол, который образует с плоскостью квадрата прямая AP.

299. Боковое ребро RA четырёхугольной пирамиды, основанием которой является прямоугольник $ABCD$, перпендикулярно плоскости основания (рис. 286). Найдите радиус окружности, описанной около треугольника RAC, учитывая, что ребро RB равно 20 мм, боковые рёбра RB и RD наклонены к плоскости основания под углами $30°$ и $45°$ соответственно.

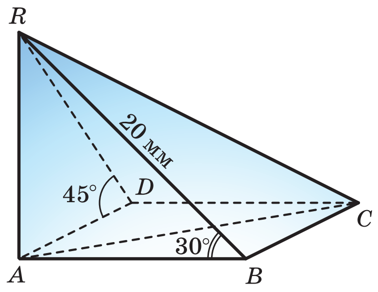

Рис. 286

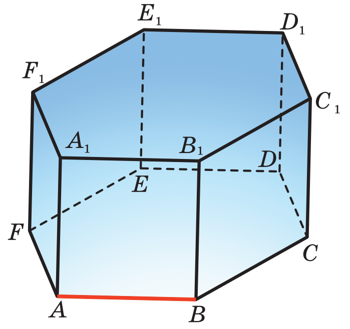

Рис. 287

300. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны a. Найдите угол между прямой AB (рис. 287) и прямой:

а) FF_1; б) CD; в) DE; г) A_1B_1; д) B_1E_1; е) A_1C_1.

301. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны a. Найдите угол между прямой BC_1 и прямой:

а) B_1E; б) F_1C; в) B_1D; г) AC_1; д) A_1E; е) F_1D.

302. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ боковое ребро в $\sqrt{3}$ раз больше ребра основания. Найдите угол между прямыми AB_1 и BD_1.

303. Через середину K ребра AD треугольной пирамиды $ABCD$ проведена плоскость, параллельная рёбрам AB и CD. Она пересекает ребро BC в точке M. Учитывая, что $AB = 8$, $CD = 6$, $KM = 5$, найдите угол между прямыми AB и CD.

304. В треугольной пирамиде расстояние между серединами двух скрещивающихся рёбер равно 13. Найдите угол между второй парой скрещивающихся рёбер, учитывая, что их длины 10 и 24.

305*. Докажите, что:

а) если один катет равнобедренного прямоугольного треугольника принадлежит плоскости, а второй образует с ней угол в $45°$, то гипотенуза образует с плоскостью угол в $30°$;

б) если наклонная a образует с плоскостью α угол в $45°$, а прямая b плоскости — угол в $45°$ с проекцией наклонной, то угол между прямыми a и b равен $60°$.