§ 10. Перпендикулярность плоскостей

А) Два луча на плоскости с общим началом разделяют эту плоскость на две части, каждая из которых называется *углом*.

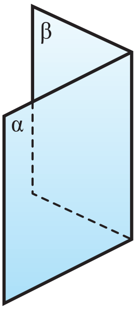


Рис. 290

Аналогично две полуплоскости с общей границей разделяют пространство на две части (рис. 290). Каждую из этих частей вместе с полуплоскостями называют **двугранным углом**. Полуплоскости, ограничивающие двугранный угол, называют **гранями** угла, а общую прямую — **ребром** двугранного угла (рис. 291).

Обычно рассматривают меньший из двугранных углов с данными гранями (рис. 292). Точки угла, не лежащие на его гранях, составляют *внутреннюю область* двугранного угла (рис. 293).

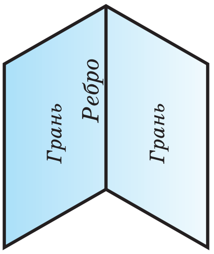


Рис. 291

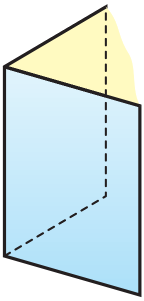


Рис. 292

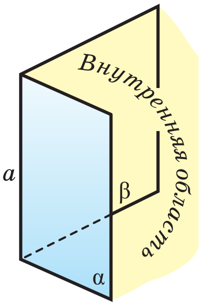


Рис. 293

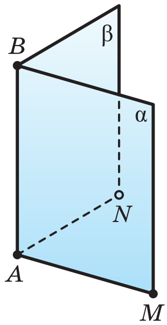


Рис. 294

Двугранный угол обычно обозначают по ребру: $\angle\, a$ (см. рис. 293) или $\angle\, AB$ (рис. 294). При необходимости можно присоединить названия граней или названия точек на гранях: $\angle\, \alpha a \beta$ (см. рис. 293), или $\angle\, \alpha AB\beta$ (см. рис. 294), или $\angle\, MABN$ (см. рис. 294).

Моделью двугранного угла может служить двускатная крыша (рис. 295), стена вместе с открытой дверью (рис. 296), полураскрытая книга (рис. 297).

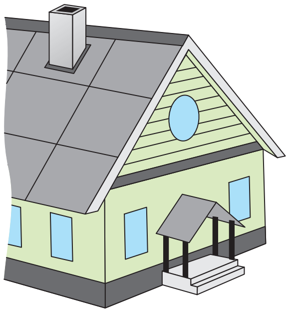


Рис. 295

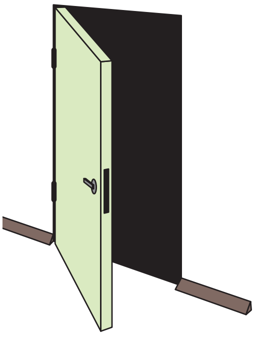


Рис. 296

Рис. 297

Для измерения двугранных углов вводится понятие линейного угла. Выберем на ребре AB двугранного угла $\alpha AB\beta$ точку P, и в его гранях α и β из этой точки проведём лучи PQ и PR, перпендикулярные ребру AB (рис. 298). Полученный угол QPR, стороны которого PQ и PR ограничивают часть плоскости PQR, принадлежащую двугранному углу $\alpha AB\beta$, называют **линейным углом** двугранного угла. Плоскость линейного угла перпендикулярна ребру двугранного угла, так как по построению лучи PQ и PR перпендикулярны ребру AB.

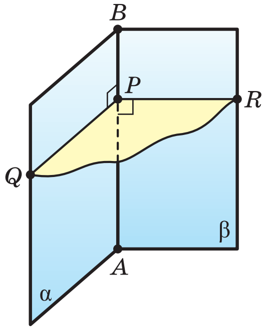


Рис. 298

Понятно, что двугранный угол имеет бесконечно много линейных углов (рис. 299).

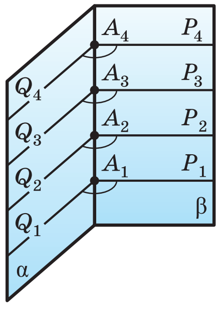


Рис. 299

Теорема 10. Все линейные углы двугранного угла равны друг другу.

Доказательство. Пусть $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ — линейные углы двугранного угла MN (рис. 300). Докажем, что $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_2B_2C_2$.

Отложим на сторонах углов $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равные отрезки B_1P, B_2Q, B_1S, B_2R. Тогда получатся четырёхугольники PQB_2B_1 и SRB_2B_1, у которых противоположные стороны PB_1 и QB_2, а также SB_1 и RB_2 равны по построению и параллельны как перпендикуляры к одной прямой, проведённые в соответствующей плоскости. Поэтому $PQ = B_2B_1 = SR$ и $PQ \parallel B_2B_1 \parallel SR$. А это означает, что четырёхугольник $PQRS$ является параллелограммом, что позволяет сделать вывод о равенстве отрезков PS и QR. Получили, что у треугольников PSB_1 и QRB_2 равны соответственные стороны, поэтому треугольники равны, а значит, равны и их углы $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$.

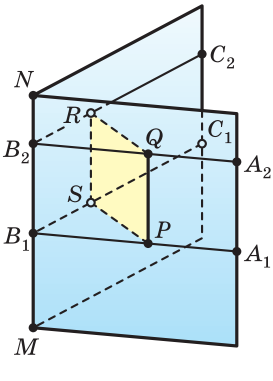


Рис. 300

Измерение двугранных углов связывается с измерением их линейных углов. В зависимости от того, каким — острым, прямым, тупым, развёрнутым — является линейный угол двугранного угла, отличают *острые*, *прямые*, *тупые*, *развёрнутые двугранные углы*. Двугранный угол, изображённый на рисунке 301, — острый, на рисунке 302 — прямой, на рисунке 303 — тупой.

Две пересекающиеся плоскости разделяют пространство на четыре двугранных угла с общим ребром (рис. 304). Если один из них равен α, то ещё один из них также равен α, а два остальных — $180° - \alpha$. Среди этих углов есть не превосходящий $90°$,

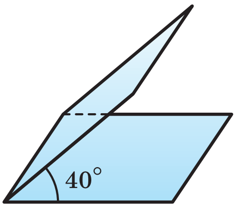


Рис. 301

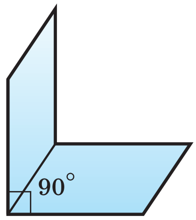


Рис. 302

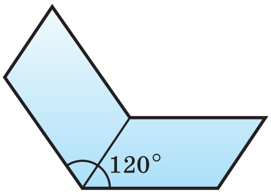


Рис. 303

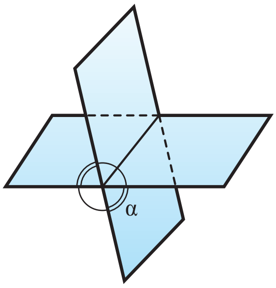


Рис. 304

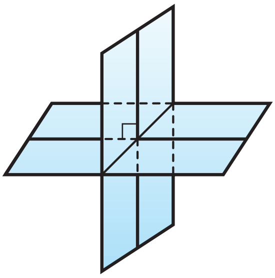


Рис. 305

его величину и принимают за величину угла между пересекающимися плоскостями.

Если один из двугранных углов, образовавшихся при пересечении двух плоскостей, прямой, то три остальных также прямые (рис. 305).

Б) Плоскости, при пересечении которых образуются прямые двугранные углы, называются **перпендикулярными плоскостями**.

Для обозначения перпендикулярности плоскостей, как и для обозначения перпендикулярности прямых, используют знак $\perp$.

Моделями перпендикулярных плоскостей могут служить столешница и боковина стола (рис. 306), пол в комнате и дверь в неё (рис. 307).

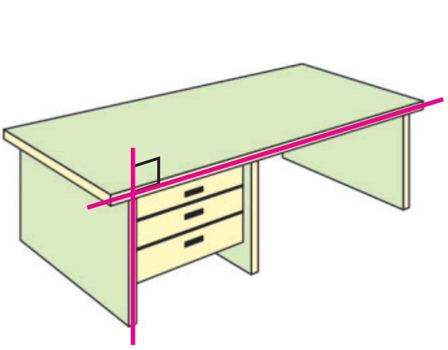


Рис. 306

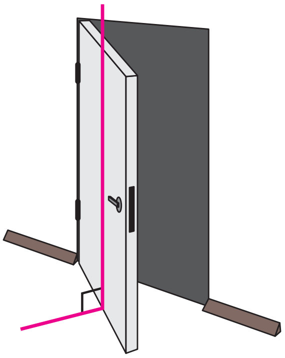


Рис. 307

Теорема 11. Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

Доказательство. Пусть через прямую a, которая перпендикулярна плоскости α и пересекает её в точке M, проходит плоскость β (рис. 308). Докажем, что $\alpha \perp \beta$.

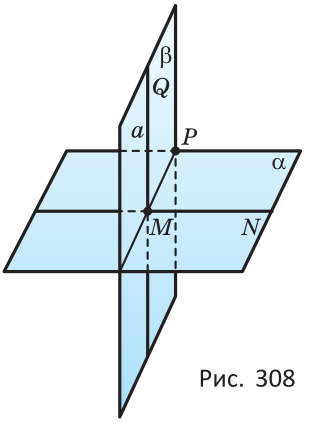


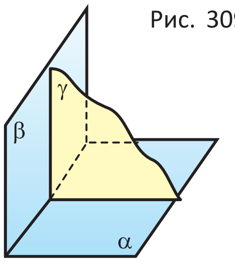
Рис. 308

Плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой MP, перпендикулярной прямой a, так как по условию прямая a и плоскость α перпендикулярны.

В плоскости α проведём прямую MN, перпендикулярную прямой MP. Полученный угол NMQ, где Q — точка прямой a, является линейным углом двугранного угла $\alpha MP\beta$. Поскольку по условию $a \perp \alpha$, то угол NMQ — прямой, и, значит, плоскости α и β перпендикулярны.

Теорема **11** выражает *признак перпендикулярности плоскостей*.

Следствие. Плоскость, перпендикулярная линии пересечения двух данных плоскостей, перпендикулярна каждой из них (рис. 309).

Рис. 309


Докажем теперь утверждение, обратное утверждению теоремы **11**.

Теорема 12. Если через точку одной из перпендикулярных плоскостей провести прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эта прямая принадлежит первой плоскости.

Доказательство. Пусть две перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой MN, и через точку K плоскости α проведена прямая a, перпендикулярная плоскости β. Докажем, что эта прямая принадлежит плоскости α.

Через точку K в плоскости α проведём прямую b, перпендикулярную MN, и через точку L их пересечения в плоскости β — прямую c, также перпендикулярную MN (рис. 310). Угол между прямыми b и c прямой как линейный угол прямого двугранного угла. Получили, что прямая b проходит через точку K и перпендикулярна плоскости β, так как она перпендикулярна пересекающимся прямым MN и c этой плоскости. А поскольку через эту точку к данной плоскости можно провести только одну перпендикулярную прямую, то прямые b и a совпадают. Значит, прямая a принадлежит плоскости α.

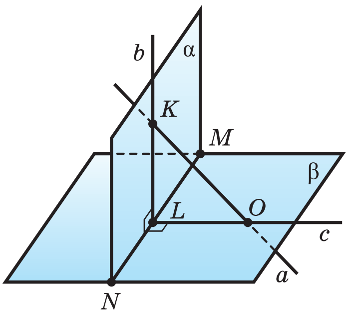


Рис. 310

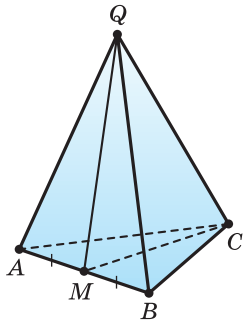


Рис. 311

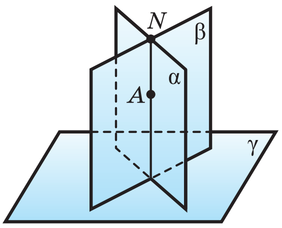


Рис. 312

Пример 1. Точка M — середина ребра AB при основании правильной пирамиды $QABC$ (рис. 311). Докажем, что плоскость QCM перпендикулярна плоскости основания ABC.

Р е ш е н и е. Прямая AB является основанием равнобедренных треугольников AQB и ACB. Поэтому она перпендикулярна медианам QM и CM этих треугольников и вместе с этим плоскости QCM. Из теоремы **12** следует, что плоскость ABC, проходящая через перпендикуляр AB к плоскости QCM, ей перпендикулярна.

Следствие. Если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей плоскости, то их линия пересечения перпендикулярна той же плоскости (рис. 312).

Пример 2. В правильной треугольной пирамиде $QABC$ плоский угол AQB при вершине равен α. Найдём величину двугранного угла при боковом ребре.

Р е ш е н и е. Пусть N — середина ребра AC, AK — перпендикуляр к ребру BQ, проведённый из точки A (рис. 313).

Из равенства треугольников ABQ и CBQ следует, что $CK \perp BQ$. Поэтому угол AKC — линейный угол двугранного угла BQ.

Из прямоугольных треугольников AKQ и ANQ получаем: $AK = AQ \sin\alpha$, $AN = AQ \sin\frac{\alpha}{2}$. Из прямоугольного треугольника AKN находим, что

$$\sin\left(\frac{\angle AKC}{2}\right) = \frac{AN}{AK} = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Поэтому $\angle AKC = 2\arcsin\frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

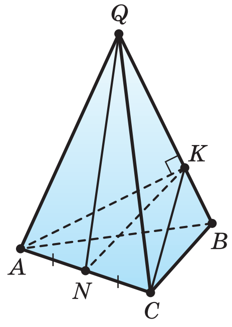


Рис. 313

О т в е т: $2\arcsin\frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

В) При вычислениях бывает полезной *теорема о трёх синусах*.

Теорема 13. Линейный угол α двугранного угла, угол β между ребром этого двугранного угла и прямой, лежащей в одной из его граней, и угол γ между этой прямой и плоскостью другой грани связаны равенством $\sin\alpha\ \sin\beta = \sin\gamma$.

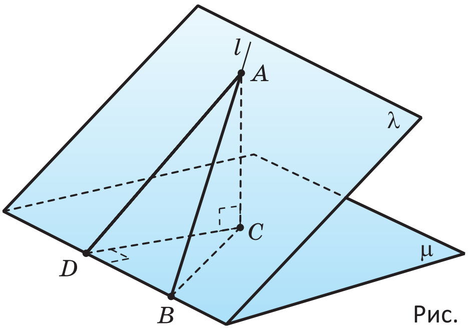


Рис. 314

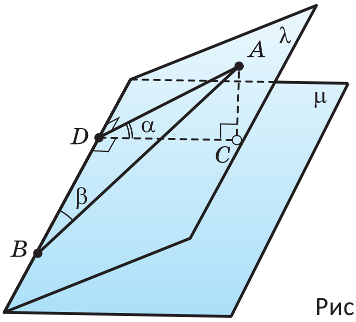


Рис. 315

Доказательство. Пусть прямая l лежит в плоскости λ, точка A принадлежит прямой l, B — точка пересечения прямой l с ребром двугранного угла $\lambda\mu$, C — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на грань μ, D — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на ребро угла (рис. 314). Пусть $AB = a$ и $\angle ADC = \alpha$, $\angle ABD = \beta$, $\angle ABC = \gamma$. Поскольку DC — проекция AD и $AD \perp BD$, то $DC \perp BD$. Тогда из прямоугольных треугольников ADB, ACD и ACB будем иметь: $AD = a\sin\beta$, $AC = AD\sin\alpha = a\sin\beta\sin\alpha$ и $\sin\gamma = AC : AB = \sin\alpha\sin\beta$.

Следствие 1. Если точка A лежит в грани λ двугранного угла величиной α, то расстояние от неё до плоскости другой грани μ угла равно $AB\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta$, где B — точка на ребре двугранного угла, а β — угол между прямой AB и ребром двугранного угла (рис. 315).

Пример 3. Стороны AB и AC правильного треугольника ABC лежат соответственно в гранях λ и μ острого двугранного угла величиной α. Сторона AB образует угол β с ребром двугранного угла. Найдём величину угла между плоскостью ABC и плоскостью μ.

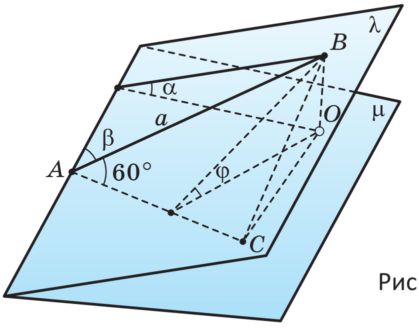


Рис. 316

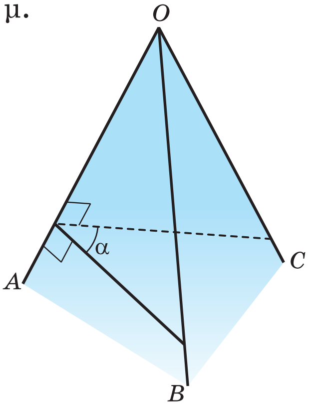


Рис. 317

Р е ш е н и е. Пусть искомый угол равен φ, сторона треугольника имеет длину a. Тогда расстояние BO от точки A до плоскости μ можно найти двумя способами (рис. 316): $BO = a\sin\alpha\sin\beta$ и $BO = a\sin\varphi\sin 60°$.

Поэтому
$$\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\alpha\sin\beta \text{ и } \varphi = \arcsin\left(\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{3}}\right).$$

О т в е т: $\arcsin\left(\dfrac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{3}}\right)$.

Следствие 2. Пусть рёбра OA, OB и OC — грани двугранных углов величиной α, β и γ соответственно. Тогда $\dfrac{\sin\alpha}{\sin BOC} = \dfrac{\sin\beta}{\sin AOC} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin AOB}$ (рис. 317).

?

1. Что называют углом? Что называют двугранным углом?
2. Что называют гранью двугранного угла; ребром двугранного угла? Как обозначают двугранный угол?
3. Как построить линейный угол двугранного угла? Какое свойство имеют линейные углы двугранного угла?
4. Какой двугранный угол называют острым; прямым; тупым; развёрнутым?
5. Какие плоскости называются перпендикулярными?
6. Сформулируйте признак перпендикулярности плоскостей.
7. Сформулируйте свойство плоскости, перпендикулярной линии пересечения двух плоскостей.
8. Сформулируйте свойство прямой, проведённой через точку одной из перпендикулярных плоскостей перпендикулярно другой плоскости.
9. Сформулируйте свойство линии пересечения двух плоскостей, перпендикулярных третьей.

10*. Сформулируйте теорему о трёх синусах.

11*. Следствие 2 называют ещё теоремой синусов для трёхгранного угла. Объясните почему.

12. Сколько двугранных углов имеет:

а) треугольная пирамида; б) параллелепипед?

13. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назовите линейный угол двугранного угла:

а) DD_1; б) A_1B_1.

14. Учитывая, что $STUVS_1T_1U_1V_1$ — куб (рис. 318), определите:

а) является ли угол TVT_1 линейным углом двугранного угла T_1SVT;

б) является ли угол T_1ST линейным углом двугранного угла T_1SVT;

в) величину двугранного угла V_1UTS.

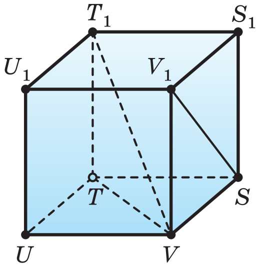


Рис. 318

Задача 1. Плоскости правильных треугольника KMD и четырёхугольника $KMNP$ перпендикулярны (рис. 319). Найдите DN, учитывая, что $KM = a$.

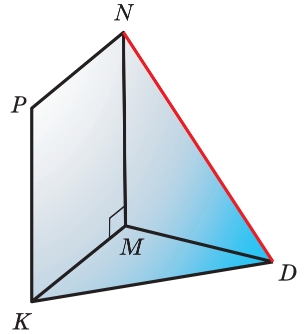


Рис. 319

Решение. $(KDM) \perp (KMN)$ и $MN \perp MK$, тогда по теореме **12** $MN \perp (KDM)$.

$MN \perp MD$, поэтому $\triangle DMN$ — прямоугольный.

$MD = a$, так как $\triangle KDM$ правильный и $KM = a$.

$MN = a$, так как четырёхугольник $KMNP$ правильный и $KM = a$.

Тогда по теореме Пифагора

$$DN = \sqrt{MD^2 + MN^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$$

Ответ: $a\sqrt{2}$.

Задача 2. Из точек M и N ребра двугранного угла в разных его гранях возведены перпендикуляры MK и NL (рис. 320). Определите величину двугранного угла, учитывая, что $MN = 48$ см, $MK = 16$ см, $NL = 10$ см и расстояние между точками K и L равно 50 см.

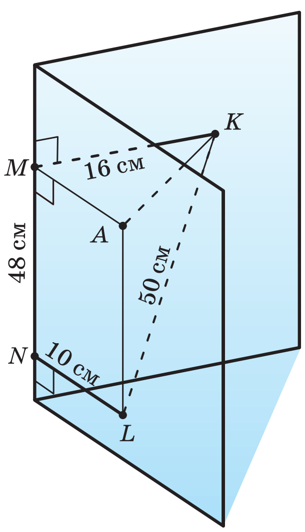


Рис. 320

Решение. Пусть $NL \parallel MA$ и $NM \parallel LA$. Тогда $MNLA$ — параллелограмм и $MA = NL = 10$ см, $AL = MN = 48$ см.

$MA \parallel NL$ и $NL \perp MN$, поэтому $MA \perp MN$.

$\angle KMA$ — линейный угол двугранного угла $KMNL$ ($MK \perp MN$ и $MA \perp MN$).

$MN \perp MK$ и $MN \perp MA$, тогда $MN \perp (KMA)$.

$AL \parallel MN$ и $MN \perp (KMA)$, тогда $AL \perp (KMA)$.

$AL \perp (KMA)$ и $AK \subset (KMA)$, тогда $AL \perp AK$.

$AL \perp AK$, поэтому $\triangle KAL$ — прямоугольный.

Тогда по теореме Пифагора

$$AK = \sqrt{KL^2 - AL^2} = \sqrt{50^2 - 48^2} = 14 \text{ (см).}$$

Из треугольника MKA:

$$\cos \angle KMA = \frac{MK^2 + MA^2 - AK^2}{2MK \cdot MA} = \frac{16^2 + 10^2 - 14^2}{2 \cdot 16 \cdot 10} = \frac{1}{2}.$$

Поэтому $\angle KMA = 60°$.

Ответ: $60°$.

309. Дан прямой параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 321). Назовите его:
а) прямые двугранные углы;
б) перпендикулярные грани.

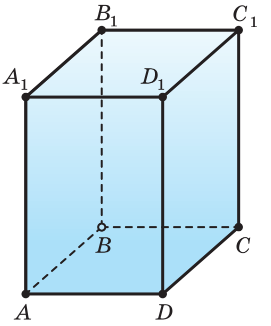


Рис. 321

310. Учитывая, что точка T — середина ребра QR треугольной пирамиды $OPQR$, у которой основанием является правильный треугольник PQR, а боковые рёбра равны друг другу, определите, является ли угол:
а) PRO линейным углом двугранного угла $PRQO$;
б) PTO линейным углом двугранного угла $PRQO$.

311. Верно ли, что если двугранный угол $\alpha AB\beta$ разбить на два двугранных угла $\alpha AB\gamma$ и $\gamma AB\beta$ (рис. 322), то линейный угол двугранного угла $\alpha AB\beta$ равен сумме линейных углов двугранных углов $\alpha AB\gamma$ и $\gamma AB\beta$?

312. Из вершины X треугольника XYZ, сторона YZ которого лежит в плоскости β, проведена высота XA и перпендикуляр XP к плоскости β (рис. 323). Докажите, что угол XAP — линейный угол двугранного угла $XYZP$.

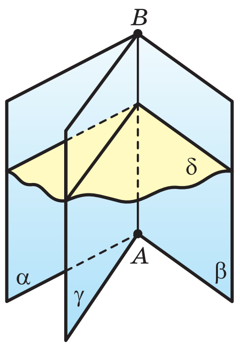


Рис. 322

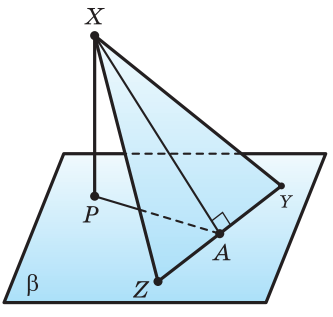


Рис. 323

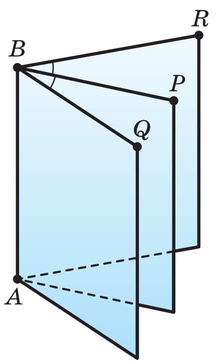


Рис. 324

313. На рисунке 324 двугранные углы $RABP$ и $PABQ$ равны. Докажите, что каждая точка плоскости ABP равноудалена от плоскостей ABR и ABQ.

314. Есть два двугранных угла, у которых одна грань общая, а две другие грани вместе составляют плоскость. Докажите, что сумма этих двугранных углов равна $180°$.

315. Все рёбра треугольной пирамиды $ABCD$ равны друг другу, а точка M — середина ребра AC. Докажите, что угол DMB является линейным углом двугранного угла $BACD$.

316. Две точки одной грани двугранного угла отстоят от его ребра на 51 см и 34 см, а первая из них отстоит от второй грани на 15 см. Найдите расстояние до этой грани от другой точки.

317. На одной грани двугранного угла выбрана точка X, отстоящая на 36 см от ребра угла и на 24 см от другой его грани. На второй грани этого угла выбрана точка Y, отстоящая от первой грани на 18 см. Найдите расстояние от точки Y до ребра угла.

318. Плоскость прямоугольного треугольника ABC наклонена к плоскости α под углом в $45°$ (рис. 325). Найдите расстояние вершины прямого угла C от плоскости α, учитывая, что $\angle ABC = 60°$, $BC = a$.

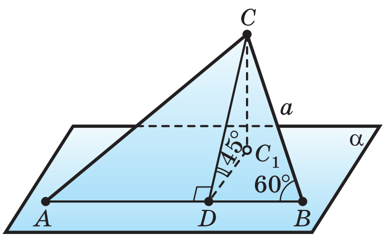


Рис. 325

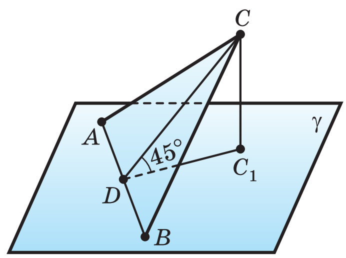


Рис. 326

319. Через гипотенузу AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC под углом в $45°$ к его плоскости проведена плоскость γ, отстоящая от вершины прямого угла C на l (рис. 326). Найдите площадь треугольника ABC.

320. Больший катет прямоугольного треугольника с острым углом и гипотенузой, соответственно равными $30°$ и c, лежит в плоскости γ, составляющей с плоскостью треугольника угол в $60°$. Найдите:

а) расстояние от вершины большего острого угла треугольника до плоскости γ;

б) угол между гипотенузой и плоскостью γ.

321. Найдите расстояние от вершины прямого угла прямоугольного треугольника с катетами, равными 7 см и 24 см, до плоскости, которая проходит через гипотенузу и составляет с плоскостью треугольника угол в $30°$.

322. Основанием прямой призмы является треугольник MNK, в котором $MN = NK = 25$ см, $MK = 14$ см. Через сторону MK проведена плоскость под углом $30°$ к плоскости основания, пересекающая противоположное боковое ребро в точке L. Найдите:

а) отрезок NL бокового ребра;

б) площадь полученного сечения.

323. Через сторону CE треугольника CDE, у которого $CD = 9$ м, $DE = 6$ м и $CE = 5$ м, проходит плоскость ρ, составляющая с плоскостью треугольника угол, равный 45°. Найдите расстояние до плоскости ρ от вершины D.

324. Ребро CD треугольной пирамиды $ABCD$ перпендикулярно плоскости ABC, $AB = BC = AC = 6$ и $BD = 3\sqrt{7}$. Найдите двугранные углы $DACB$, $DABC$, $BDCA$.

325. Найдите двугранный угол $ABCD$ треугольной пирамиды $ABCD$, учитывая, что углы DAB, DAC и ACB прямые, $AC = CB = 5$ и $DB = 5\sqrt{5}$.

326*. Проекцией прямоугольника $ABCD$ на плоскость ω является квадрат ABC_1D_1. Найдите угол между плоскостью ω и плоскостью прямоугольника $ABCD$, учитывая, что $AB : BC = 1 : 2$.

327*. Параллельные прямые AB и CD лежат в разных гранях двугранного угла, равного 60°, а их точки A и D отстоят от ребра этого угла соответственно на 16 см и 13 см. Найдите расстояние между прямыми AB и CD.

328. Из точек A и B ребра двугранного угла, равного 120°, в разных его гранях возведены перпендикуляры AC и BD к ребру. Найдите отрезок CD, учитывая, что $AB = AC = BD = a$.

329. Боковые рёбра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, а их длина равна l. Найдите косинус угла, образованного плоскостью боковой грани с плоскостью основания.

330. Из точек C и D ребра двугранного угла, равного 120°, в разных его гранях возведены перпендикуляры CK и DL. Найдите длину отрезка KL, учитывая, что $CK = 3$ см, $DL = 5$ см, $CD = 24$ см.

331. В разных гранях двугранного угла из точек M и N его ребра к этому ребру возведены перпендикуляры MA и NB. Определите расстояние AB, учитывая, что:

а) двугранный угол прямой, $MN = 36$ см, $MA = 18$ см и $NB = 12$ см;
б) двугранный угол равен 120°, $MN = 12$, $MA = 8$, $NB = 4$;
в) двугранный угол равен 120°, $MN = MA = NB = x$.

332. Сторона IJ треугольника IJK, у которого $IJ = JK = 9$ см, $IK = 12$ см, лежит в плоскости ρ, а проекции двух других сторон треугольника на эту плоскость относятся как $1 : 2$. Определите величину двугранного угла, образованного плоскостями ρ и IJK.

333. Найдите двугранный угол, образованный двумя боковыми гранями четырёхугольной пирамиды, основанием которой является квадрат со стороной $20\sqrt{3}$ см, а боковые рёбра равны 30 см каждое.

334*. Правильные треугольники ABC и DBC расположены так, что вершина D проектируется в центр треугольника ABC. Найдите угол между плоскостями этих треугольников.

335*. Отрезок EL, соединяющий вершину E треугольника CDE с вершиной L треугольника CDL, перпендикулярен плоскости этого треугольника. Докажите, что площадь треугольника CDE равна $S \cdot \cos \varphi$, где S — площадь треугольника CDL, φ — угол между плоскостями CDL и CDE.

336*. В треугольной пирамиде все рёбра равны. Найдите двугранные углы этой пирамиды.

337*. В треугольной пирамиде все рёбра основания равны a, а все боковые рёбра — b. Найдите двугранные углы этой пирамиды.

338*. В четырёхугольной пирамиде все рёбра равны. Найдите двугранные углы этой пирамиды.

339*. В четырёхугольной пирамиде все рёбра основания равны a, а все боковые рёбра — b. Найдите двугранные углы этой пирамиды.

340. Верно ли утверждение, что через данную точку можно провести плоскость, перпендикулярную данной плоскости. Сколько существует таких плоскостей?

341. Верно ли утверждение, что плоскость линейного угла двугранного угла перпендикулярна каждой его грани?

342. Прямая a не перпендикулярна плоскости α. Докажите, что существует плоскость, которая содержит прямую a и перпендикулярна плоскости α.

343. Общая сторона AB треугольников ABC и ABD равна 10 см. Плоскости этих треугольников взаимно перпендикулярны. Найдите CD, учитывая, что треугольники:

а) равносторонние;

б) прямоугольные равнобедренные с гипотенузой AB.

344. Отрезок длиной a с концами на двух перпендикулярных плоскостях образует с одной из них угол в 45°, а с другой — угол в 30° (рис. 327). Найдите часть линии пересечения плоскостей, заключённую между перпендикулярами, опущенными на неё из концов отрезка.

345. Есть пирамида, в основании которой лежит правильный шестиугольник со стороной 12 дм, а все боковые рёбра равны 24 дм. Через середины двух смежных сторон основания проведена плоскость, перпендикулярная к нему. Найдите площадь сечения.

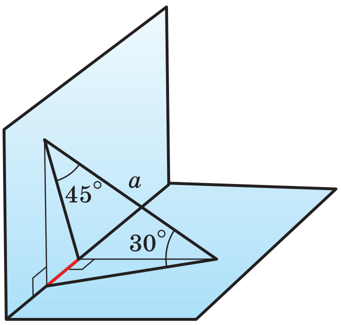


Рис. 327

Пространственное моделирование

Отдельным видом параллельного проектирования, применяемого в геометрии для изображения пространственных фигур, является ортогональное проектирование.

Ортогональной проекцией точки на плоскость α называется точка пересечения с этой плоскостью прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно α.

Ортогональной проекцией фигуры на плоскость называется множество ортогональных проекций всех точек этой фигуры на плоскость.

а) Найдите площадь ортогональной проекции треугольника с площадью S на плоскость α, учитывая, что одна из его сторон лежит в плоскости α, а угол наклона плоскости треугольника к плоскости α равен β ($0° < \beta < 90°$) (рис. 328).

б) Решите предыдущую задачу, учитывая, что треугольник не имеет с плоскостью α общих точек и одна из сторон треугольника параллельна плоскости α (рис. 329).

в*) Найдите площадь ортогональной проекции многоугольника с площадью S на плоскость α, учитывая, что угол наклона плоскости многоугольника к плоскости α равен β ($0° < \beta < 90°$).

г*) Используя результаты решения задач *а–в*, докажите *пространственную теорему Пифагора*: «Если все плоские углы при одной вершине тетраэдра прямые, то квадрат площади грани, противоположной этой вершине, равен сумме квадратов площадей остальных граней» (рис. 330).

Если $AJIK$ — треугольная пирамида, $AJ \perp IJ$, $AJ \perp JK$ и $JI \perp KJ$, то

$$S^2_{AIK} = S^2_{AIJ} + S^2_{AKJ} + S^2_{IJK}.$$

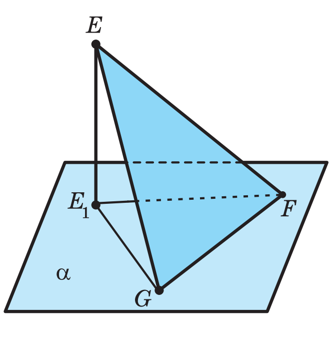


Рис. 328

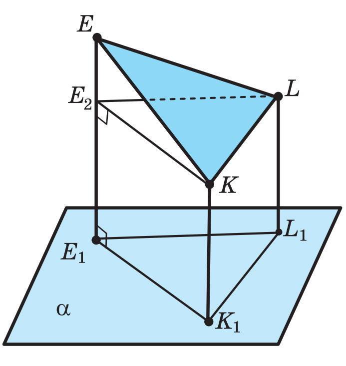


Рис. 329

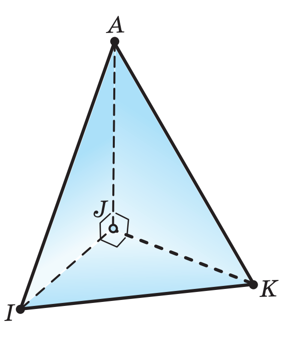


Рис. 330

Дополнительные задания к разделу 3

346. Есть треугольная пирамида $SABC$, все рёбра которой равны друг другу. На рёбрах SC, SB, CB отмечены середины U, V, Y соответственно, а на ребре SA — произвольная точка X. Определите:

а) перпендикулярны ли прямые UV и YX;

б) угол между прямыми UV и AY.

347. Отрезки AE и CF — высоты треугольника ABC, а отрезок DK — перпендикуляр к плоскости ABC. Докажите, что прямые KD и AC перпендикулярны.

348. Рёбра BC и AD треугольной пирамиды $ABCD$ перпендикулярны. Докажите, что ребро AD перпендикулярно одной из средних линий грани ABC.

349. Два равных круга имеют единственную общую точку A, через которую проходят диаметры AB и AC этих кругов, причём эти диаметры не лежат на одной прямой. Определите, перпендикулярна ли плоскости ABC линия пересечения плоскостей, в которых лежат данные круги. Изменится ли вывод, если круги не будут равными?

350. В каком случае через одну из двух скрещивающихся прямых можно провести плоскость, перпендикулярную другой прямой?

351. Точки A, B, C, D являются серединами рёбер TZ, XY, YZ, Y_1Z_1 прямоугольного параллелепипеда $TXYZT_1X_1Y_1Z_1$, в основании которого лежит квадрат. Определите:

а) перпендикулярна ли прямая YA плоскости сечения XX_1DC;

б) перпендикулярна ли прямая TB плоскости XX_1D;

в) угол между прямыми AY и XD.

352. Есть прямоугольный треугольник ABC, один катет которого и прилежащий к нему острый угол равны m и β. Из вершины прямого угла C возведён перпендикуляр CD, равный n. Найдите расстояние от точки D до прямой AB.

353. Концы A и B отрезков AA_1 и BB_1 принадлежат плоскости α, а сами отрезки ей перпендикулярны и расположены по одну сторону от плоскости. Найдите углы четырёхугольника AA_1B_1B, учитывая, что:

а) $AA_1 = BB_1$;

б) $A_1B_1 = 2\ AB$;

в) $A_1B_1 : AB = 3 : 2$.

354. Измерения AB, BC и CC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны a, b и c соответственно. Найдите угол между прямыми:

а) AC и BB_1; б) A_1D и C_1A.

355. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны a. Найдите угол между прямой AB и прямой:

а) B_1C_1; в) A_1D_1; д) F_1E_1;
б) B_1D_1; г) C_1D_1; е) D_1F_1.

356. Из вершины A треугольника ABC возведён перпендикуляр AM, и точка M соединена с серединой D стороны BC. Докажите, что:

а) прямые MD и BC перпендикулярны, если стороны AB и AC равны;

б) стороны AB и AC равны, если прямые MD и BC перпендикулярны.

357. Катет AB прямоугольного треугольника ABC лежит в плоскости γ. Докажите, что плоскость, которая проходит через другой катет и его проекцию на плоскость γ, перпендикулярна прямой AB.

358. Докажите, что угол между прямой и плоскостью является наименьшим из углов, которые образует эта прямая со всеми прямыми плоскости, проходящими через точку пересечения прямой с плоскостью.

359. Прямоугольные треугольники ABC и ACD, лежащие в перпендикулярных плоскостях, имеют общий катет AC, равный $2\sqrt{3}$. Найдите длину отрезка BD, учитывая, что углы ACB и CAD равны $30°$.

360. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны a. Найдите расстояние между прямой AB и прямой:

а) CD; в) A_1B_1; д) FC;
б) DE; г) D_1E_1; е) F_1C_1.

361. Основанием прямоугольного параллелепипеда является прямоугольник с измерениями 5 см и 12 см, а диагональ параллелепипеда равна 13 см. Найдите третье измерение параллелепипеда.

362. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны a. Найдите расстояние между прямой AB и прямой:

а) B_1C_1; в) A_1D_1; д) F_1E_1;
б) B_1D_1; г) C_1D_1; е) D_1F_1.

363. В правильной треугольной пирамиде $QABC$ плоский угол AQB при вершине равен $30°$. Найдите двугранный угол при боковом ребре.

364. Плоскости квадрата $KMNP$ и ромба $KMDF$ перпендикулярны. Найдите FN, учитывая, что сторона ромба и угол KMD соответственно равны a и $60°$.

365. Есть пирамида, в основании которой лежит правильный шестиугольник со стороной 6 см, а все боковые рёбра равны 12 см. Через середины двух смежных сторон основания проведена плоскость, перпендикулярная к нему. Найдите площадь сечения.