Глава 1

ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ СТЕПЕНИ

§ 1. Степень с рациональным показателем и ее свойства. Степень с действительным показателем

1.1. Найдите значение выражения:

а) $(-1)^{-5}\cdot(-2)^{-2}$; б) $27^{-1}:\left(\frac{1}{3}\right)^{4}$; в) $\left(0{,}2^{-1}\right)^{3}-0{,}11^{0}$.

1.2. Упростите выражение:

а) $\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{3}$; б) $4\sqrt[7]{128}-2\sqrt[5]{32}$; в) $\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{243}\right)\cdot\sqrt[3]{3}$.

1.3. Избавьтесь от иррациональности: $\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a}\right)\left(\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{a}\right)$.

При изучении физики, математики, химии вы встречались с формулами, которые содержат степени некоторых величин. Например, $E_{\text{к}}=\frac{mv^2}{2}$, где $E_{\text{к}}$ — кинетическая энергия, m — масса тела, v — его скорость.

Количество нераспавшихся атомов радиоактивного вещества $N(t)$ к моменту времени t можно подсчитать по формуле $N(t)=N_0 2^{-\frac{t}{T}}$, где N_0 — первоначальное количество радиоактивных ядер, T — период полураспада вещества. Очевидно, что при некоторых значениях T и t показатель степени $2^{-\frac{t}{T}}$ может оказаться дробным.

В 7-м классе вы изучили понятие степени числа с целым показателем.

При расширении числового множества, на котором рассматривается степень, определение степени дается таким образом, чтобы свойства, рассмотренные ранее, сохранялись. Дадим определение степени числа с дробным показателем.

Рассмотрим степень положительного числа a с показателем $\frac{1}{n}$, где n — натуральное число, большее 1, т. е. $a^{\frac{1}{n}}$. Для степени с этим показателем справедливо свойство возведения степени в степень: $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{n}=a^{\frac{1}{n}\cdot n}=a$.

С другой стороны, неотрицательное число, n-я степень которого равна a, называется арифметическим корнем n-й степени из числа a, т. е. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n}=a$. Таким образом, $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$.

Рассмотрим степень положительного числа a с показателем $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное, большее 1, т. е. $a^{\frac{m}{n}}$.

Представим $a^{\frac{m}{n}}$ в следующем виде: $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$. Таким образом, получили, что $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Определение. Степенью числа $a > 0$ **с рациональным показателем** $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное ($n > 1$), называется число $\sqrt[n]{a^m}$, т. е. корень n-й степени из a в степени m:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Например, $3^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{3}$; $2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$; $7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$; $0{,}2^{-\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{0{,}2^{-2}} = \sqrt[7]{25}$; $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$.

Пример 1. Найдите значение выражения:

а) $27^{\frac{1}{3}}$; б) $64^{\frac{1}{2}}$; в) $8^{\frac{2}{3}}$; г) $16^{-\frac{1}{4}}$; д) $32^{-\frac{2}{5}}$.

Решение. Воспользуемся определением степени с рациональным показателем:

а) $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$;

б) $64^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} = 8$;

в) $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{\left(2^3\right)^2} = \sqrt[3]{\left(2^2\right)^3} = \sqrt[3]{4^3} = 4$;

г) $16^{-\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16^{-1}} = \sqrt[4]{\left(2^4\right)^{-1}} = \sqrt[4]{\left(2^{-1}\right)^4} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{2}$;

д) $32^{-\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{32^{-2}} = \sqrt[5]{\left(2^5\right)^{-2}} = \sqrt[5]{\left(2^{-2}\right)^5} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{4}\right)^5} = \frac{1}{4}$.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Свойства степени с рациональным показателем

Для степени с рациональным показателем справедливы все свойства степени с целым показателем.

Докажем одно из свойств степени с рациональным показателем.

Пусть $a > 0$. Покажем, что $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}$, где m, p — целые числа, n, q — натуральные, большие 1.

По определению степени с рациональным показателем:
$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m};\quad a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$
По свойству корня:
$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nq]{a^{mq}},\quad \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{np}}.$$
По свойству корней:
$$\sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq} \cdot a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}}.$$
По определению степени с рациональным показателем:
$$\sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq}+\frac{np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$
Таким образом, $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$.

Для $a > 0$, рациональных m и n:
$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$
$$a^m : a^n = a^{m-n};$$
$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}.$$
Для $a > 0$ и $b > 0$, рационального n:
$$(ab)^n = a^n \cdot b^n;$$
$$(a : b)^n = a^n : b^n.$$

Степень с иррациональным показателем

Степень с иррациональным показателем определяется через десятичные приближения показателя степени.

Например, для вычисления значения степени $2^{\sqrt{3}}$ рассмотрим неравенства:
$$2 < 2^{\sqrt{3}} < 2^2, \text{ так как } 1 < \sqrt{3} < 2;$$
$$2^{1,7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,8}, \text{ так как } 1,7 < \sqrt{3} < 1,8;$$
$$2^{1,73} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,74}, \text{ так как } 1,73 < \sqrt{3} < 1,74;$$
$$2^{1,732} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,733}, \text{ так как } 1,732 < \sqrt{3} < 1,733 \text{ и т. д.}$$

С помощью калькулятора можно приближенно вычислить значения степеней с рациональным показателем: $2^{1,732} \approx 3,3218801$, $2^{1,733} \approx 3,3241834$.

Получаем приближенное значение степени: $2^{\sqrt{3}} \approx 3,32$.

Более точное значение степени с иррациональным показателем можно получить, продолжив процесс оценки через десятичные приближения, увеличивая точность приближения показателя.

Для любого действительного $a > 0$ и любого действительного числа α определено понятие степени a^{α}.

Для степени с действительным показателем справедливы все свойства степени с рациональным показателем.

Для $a = 0$ определена степень с положительным рациональным показателем: $0^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{0^m} = 0$, где m и n — натуральные числа, $n > 1$.

Например, $0^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{0^2} = 0$.

Пример 2. Упростите выражение:

а) $\left(a^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}}$; б) $a^{\sqrt{7}} \cdot a^{3-\sqrt{7}}$; в) $a^{\sqrt{3}-1} : a^{\sqrt{3}}$.

Решение. Воспользуемся свойствами степени:

а) $\left(a^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}} = a^{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = a^5$;

б) $a^{\sqrt{7}} \cdot a^{3-\sqrt{7}} = a^{\sqrt{7}+3-\sqrt{7}} = a^3$;

в) $a^{\sqrt{3}-1} : a^{\sqrt{3}} = a^{\sqrt{3}-1-\sqrt{3}} = a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Примеры основных заданий и их решения

1. Представьте в виде корня степень с рациональным показателем:

$3^{\frac{1}{6}}$; $2^{\frac{3}{4}}$; $5^{\frac{1}{2}}$; $10^{\frac{7}{2}}$; $2^{-\frac{3}{5}}$; $4^{-0,3}$; $a^{\frac{2}{5}}$; $(x-y)^{\frac{3}{7}}$.

Решение.

$3^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{3}$; $2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$;

$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$; $10^{\frac{7}{2}} = \sqrt{10^7} = \sqrt{10\,000\,000}$;

$2^{-\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^{-3}} = \sqrt[5]{\frac{1}{8}}$; $4^{-0,3} = 4^{-\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{4^{-3}} = \sqrt[10]{\frac{1}{64}}$;

$a^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{a^2}$; $(x-y)^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{(x-y)^3}$.

2. Представьте корень $\sqrt[4]{7}$; $\sqrt[7]{2^3}$; $\sqrt{11}$; $\sqrt{5^3}$; $\sqrt{3^{-3}}$; $\sqrt[5]{a^4}$; $\sqrt[3]{m+n}$ в виде степени с рациональным показателем.

Решение.

$\sqrt[4]{7} = 7^{\frac{1}{4}}$; $\sqrt[7]{2^3} = 2^{\frac{3}{7}}$; $\sqrt{11} = 11^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{5^3} = 5^{\frac{3}{2}}$;

$\sqrt{3^{-3}} = 3^{-\frac{3}{2}}$; $\sqrt[5]{a^4} = a^{\frac{4}{5}}$; $\sqrt[3]{m+n} = (m+n)^{\frac{1}{3}}$.

3. Вычислите значение выражения, используя определение степени с рациональным показателем: $8^{\frac{1}{3}}$; $8^{-\frac{1}{3}}$; $16^{\frac{3}{4}}$; $16^{-\frac{3}{4}}$.

Решение.

$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2;$ $\quad 8^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8^{-1}} = \sqrt[3]{\left(2^3\right)^{-1}} = \sqrt[3]{\left(2^{-1}\right)^3} = \frac{1}{2};$

$16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{\left(2^4\right)^3} = \sqrt[4]{\left(2^3\right)^4} = 8;$ $\quad 16^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^{-3}} = \sqrt[4]{\left(2^4\right)^{-3}} = \sqrt[4]{\left(2^{-3}\right)^4} = \frac{1}{8}.$

4. Представьте выражение в виде степени:

а) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{4}{5}}$; б) $a^{\frac{1}{3}} : a^{\frac{4}{9}}$; в) $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{0,3}$; г) $\left(a^{3,5}\right)^{\frac{4}{7}}$.

Решение.

а) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{4}{5}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{4}{5}} = a^{\frac{10}{15}+\frac{12}{15}} = a^{\frac{22}{15}};$ $\quad$ б) $a^{\frac{1}{3}} : a^{\frac{4}{9}} = a^{\frac{1}{3}-\frac{4}{9}} = a^{\frac{3}{9}-\frac{4}{9}} = a^{-\frac{1}{9}};$

в) $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{0,3} = a^{\frac{1}{3}\cdot 0,3} = a^{0,1};$ $\quad$ г) $\left(a^{3,5}\right)^{\frac{4}{7}} = a^{3,5\cdot\frac{4}{7}} = a^{\frac{7}{2}\cdot\frac{4}{7}} = a^2.$

5. Найдите значение выражения:

а) $\left(12,3^{\frac{1}{3}}\right)^3$; б) $7^{-\frac{1}{3}} : 49^{-\frac{2}{3}}$;

в) $4^{\frac{1}{3}} : 2^{\frac{4}{9}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{7}{9}}$; г) $\left(1\frac{11}{25}\right)^{-0,25} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-0,5}$.

Решение.

а) $\left(12,3^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 12,3^{\frac{1}{3}\cdot 3} = 12,3^1 = 12,3;$

б) $7^{-\frac{1}{3}} : 49^{-\frac{2}{3}} = 7^{-\frac{1}{3}} : \left(7^2\right)^{-\frac{2}{3}} = 7^{-\frac{1}{3}} : 7^{-\frac{4}{3}} = 7^{-\frac{1}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)} = 7^{-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}} = 7^1 = 7;$

в) $4^{\frac{1}{3}} : 2^{\frac{4}{9}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{7}{9}} = \left(2^2\right)^{\frac{1}{3}} : 2^{\frac{4}{9}} \cdot \left(2^{-1}\right)^{-\frac{7}{9}} = 2^{\frac{2}{3}} : 2^{\frac{4}{9}} \cdot 2^{\frac{7}{9}} = 2^{\frac{2}{3}-\frac{4}{9}+\frac{7}{9}} = 2^1 = 2;$

г) $\left(1\frac{11}{25}\right)^{-0,25} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-0,5} = \left(\frac{36}{25}\right)^{-0,25} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-0,5} = \left(\left(\frac{6}{5}\right)^2\right)^{-0,25} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{0,5} = \left(\frac{6}{5}\right)^{-0,5} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{0,5} =$

$= \left(\frac{6}{5}\right)^{-0,5+0,5} = \left(\frac{6}{5}\right)^0 = 1.$

6. Упростите выражение:

а) $\left(2a^{0,3}\right)^3 + 2a^{0,9}$; б) $4x^{3,2} \cdot 1,5x^{-1,2}$.

Решение.

а) $\left(2a^{0,3}\right)^3 + 2a^{0,9} = 2^3 \cdot \left(a^{0,3}\right)^3 + 2a^{0,9} = 8a^{0,9} + 2a^{0,9} = 10a^{0,9}$;

б) $4x^{3,2} \cdot 1,5x^{-1,2} = 4 \cdot 1,5 \cdot x^{3,2} \cdot x^{-1,2} = 6 \cdot x^{3,2+(-1,2)} = 6x^2$.

7. Представьте в виде степени с основанием a выражение:

а) $a^{2,4} : \sqrt[5]{a^2}$; б) $\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^3 \cdot \sqrt[8]{a}$.

Решение.

а) $a^{2,4} : \sqrt[5]{a^2} = a^{2,4} : a^{\frac{2}{5}} = a^{2,4} : a^{0,4} = a^{2,4-0,4} = a^2$;

б) $\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^3 \cdot \sqrt[8]{a} = a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{8}} = a^{\frac{3}{4}+\frac{1}{8}} = a^{\frac{6}{8}+\frac{1}{8}} = a^{\frac{7}{8}}$.

8. Запишите в виде степени с показателем $\frac{1}{2}$ и в виде степени с показателем 2 число: а) 1; б) 3; в) 0,8; г) 2,5.

Решение.

а) $1 = 1^{\frac{1}{2}}$; $1 = 1^2$;

б) $3 = (3^2)^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}}$; $3 = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2$;

в) $0,8 = (0,8^2)^{\frac{1}{2}} = 0,64^{\frac{1}{2}}$; $0,8 = \left(0,8^{\frac{1}{2}}\right)^2$;

г) $2,5 = \left(2,5^2\right)^{\frac{1}{2}} = 6,25^{\frac{1}{2}}$; $2,5 = \left(2,5^{\frac{1}{2}}\right)^2$.

9. Представьте в виде степени с показателем 2 выражение:

а) a; б) $a^{\frac{1}{2}}$; в) $a^{\frac{1}{3}}$; г) $a^{\frac{2}{5}}$.

Решение.

а) $a = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2$; б) $a^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2$; в) $a^{\frac{1}{3}} = \left(a^{\frac{1}{6}}\right)^2$; г) $a^{\frac{2}{5}} = \left(a^{\frac{1}{5}}\right)^2$.

10. Разложите на множители выражение:

а) $a - a^{\frac{1}{2}}$; б) $2b + 3b^{\frac{1}{4}}$; в) $b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{2}}$.

Решение.

а) $a - a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\left(a^{1-\frac{1}{2}} - 1\right) = a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} - 1\right)$;

б) $2b + 3b^{\frac{1}{4}} = b^{\frac{1}{4}}\left(2b^{1-\frac{1}{4}} + 3\right) = b^{\frac{1}{4}}\left(2b^{\frac{3}{4}} + 3\right)$;

в) $b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{1}{3}}\left(1 + b^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\right) = b^{\frac{1}{3}}\left(1 + b^{\frac{1}{6}}\right)$.

11. Сократите дробь:

а) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}$; б) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}} + b^{0,25}}$.

Решение.

а) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{6}} + 1\right)}{a^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{1}{6}} + 1$;

б) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}} + b^{0,25}} = \dfrac{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2 - \left(b^{\frac{1}{4}}\right)^2}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{4}}} = \dfrac{\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{4}}\right)}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{4}}} = a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{4}}$.

12. Упростите выражение:

а) $\dfrac{a^2 - a^{\frac{3}{2}}}{a - a^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{a^{0,25}}{a^{-0,75}}$; б) $\left(\dfrac{x^2 + y^2}{xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{x + y}{y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot xy^{-1}$.

Решение.

а) $\dfrac{a^2 - a^{\frac{3}{2}}}{a - a^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{a^{0,25}}{a^{-0,75}} = \dfrac{a^{\frac{3}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} - 1\right)}{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} - 1\right)} - a^{0,25-(-0,75)} = \dfrac{a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} - a = a^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} - a = a - a = 0$;

б) $\left(\dfrac{x^2 + y^2}{xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{x + y}{y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot xy^{-1} = \left(\dfrac{x^2 + y^2}{x\left(y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right)} - \dfrac{x + y}{y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot xy^{-1} =$

$$= \frac{x^2 + y^2 - x(x+y)}{x\left(y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right)} \cdot xy^{-1} = \frac{y^2 - xy}{x\left(y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right)} \cdot \frac{x}{y} = \frac{y \cdot (y - x) \cdot x}{x \cdot \left(y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right) \cdot y} =$$

$$= \frac{\left(y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)\left(y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right)} = y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}.$$

13. Найдите значение выражения:

а) $\left(2^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$; б) $8^{\sqrt{2}} : 2^{1+3\sqrt{2}}$; в)* $\frac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{1+\sqrt{5}}}$; г)* $\frac{\left(\sqrt{343}\right)^{\sqrt{20}}}{7^{\sqrt{45}-2}}$.

Решение.

а) $\left(2^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = 2^{(\sqrt{2})^2} = 2^2 = 4;$

б) $8^{\sqrt{2}} : 2^{1+3\sqrt{2}} = \left(2^3\right)^{\sqrt{2}} : 2^{1+3\sqrt{2}} = 2^{3\sqrt{2}} : 2^{1+3\sqrt{2}} = 2^{3\sqrt{2}-\left(1+3\sqrt{2}\right)} =$

$= 2^{3\sqrt{2}-1-3\sqrt{2}} = 2^{-1} = \frac{1}{2};$

в)* $\frac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{1+\sqrt{5}}} = \frac{6^3 \cdot 6^{\sqrt{5}}}{2^2 \cdot 2^{\sqrt{5}} \cdot 3^1 \cdot 3^{\sqrt{5}}} = \frac{6^3 \cdot 6^{\sqrt{5}}}{2^2 \cdot 3^1 \cdot (2\cdot 3)^{\sqrt{5}}} = \frac{6^3 \cdot 6^{\sqrt{5}}}{2^2 \cdot 3^1 \cdot 6^{\sqrt{5}}} = \frac{6^3}{4\cdot 3} = 18;$

г)* $\frac{\left(\sqrt{343}\right)^{\sqrt{20}}}{7^{\sqrt{45}-2}} = \frac{\left(\sqrt{7^3}\right)^{2\sqrt{5}}}{7^{3\sqrt{5}-2}} = \frac{\left(7^{\frac{3}{2}}\right)^{2\sqrt{5}}}{7^{3\sqrt{5}-2}} = \frac{7^{3\sqrt{5}}}{7^{3\sqrt{5}-2}} = 7^{3\sqrt{5}-\left(3\sqrt{5}-2\right)} = 7^2 = 49.$

14. Упростите выражение $\left(a^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} - a^{2\sqrt{3}} : a^{2\sqrt{3}-1}$.

Решение.

$$\left(a^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} - a^{2\sqrt{3}} : a^{2\sqrt{3}-1} = a^{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} - a^{2\sqrt{3}-\left(2\sqrt{3}-1\right)} = a^{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} - a^{2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+1} = a^3 - a.$$

15. Сократите дробь $\frac{a^{2\sqrt{5}} - b^{2\sqrt{5}}}{a^{\sqrt{5}} - b^{\sqrt{5}}}$.

Решение.

$$\frac{a^{2\sqrt{5}} - b^{2\sqrt{5}}}{a^{\sqrt{5}} - b^{\sqrt{5}}} = \frac{\left(a^{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(b^{\sqrt{5}}\right)^2}{a^{\sqrt{5}} - b^{\sqrt{5}}} = \frac{\left(a^{\sqrt{5}} - b^{\sqrt{5}}\right)\left(a^{\sqrt{5}} + b^{\sqrt{5}}\right)}{a^{\sqrt{5}} - b^{\sqrt{5}}} = a^{\sqrt{5}} + b^{\sqrt{5}}.$$

1. Используя определение степени с рациональным показателем, выберите верное равенство:

а) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt{5^3}$; б) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$; в) $5^{\frac{2}{3}} = 5 \cdot \frac{2}{3}$; г) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[6]{5}$.

2. Представьте выражение a в виде степени с показателем:

а) 2; б) $\frac{1}{2}$; в) 3; г) $\frac{1}{3}$.

1.4. Воспользуйтесь определением степени с рациональным показателем и представьте в виде корня выражение:

а) $2^{\frac{5}{6}}$; б) $5^{\frac{1}{4}}$; в) $3^{\frac{1}{2}}$; г) $7^{-\frac{4}{9}}$;

д) $10^{-\frac{1}{5}}$; е) $3^{-0,6}$; ж) $a^{\frac{2}{5}}$; з) $b^{\frac{1}{7}}$;

и) $c^{-0,75}$; к) $d^{-0,2}$; л) $(2a+b)^{1,2}$; м) $(m-3n)^{-\frac{3}{5}}$.

1.5. Представьте корень в виде степени с рациональным показателем:

а) $\sqrt[10]{2}$; б) $\sqrt[5]{3^4}$; в) $\sqrt{13}$; г) $\sqrt{7^5}$;

д) $\sqrt[3]{5^{-2}}$; е) $\sqrt{11^{-3}}$; ж) $\sqrt[5]{d}$; з) $\sqrt[7]{a^3}$;

и) $\sqrt[8]{b^{-5}}$; к) $\sqrt{m}$; л) $\sqrt{a-b}$; м) $\sqrt[7]{(x+6y)^{-3}}$.

1.6. Вычислите значение выражения, используя определение степени с рациональным показателем:

а) $64^{\frac{1}{3}}$; б) $16^{-\frac{1}{4}}$; в) $32^{\frac{2}{5}}$; г) $125^{-\frac{2}{3}}$;

д) $64^{\frac{2}{3}}$; е) $625^{-\frac{3}{4}}$; ж) $0,09^{\frac{1}{2}}$; з) $0,001^{-\frac{1}{3}}$;

и) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$; к) $\left(2\frac{10}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$; л) $\left(5\frac{1}{16}\right)^{-0,75}$; м) $\left(7\frac{19}{32}\right)^{-0,4}$.

1.7. Сравните значения выражений:

а) $32^{\frac{3}{5}}$ и $27^{\frac{2}{3}}$; б) $0,125^{-\frac{1}{3}}$ и $0,000064^{-\frac{1}{6}}$.

1.8. Представьте выражение в виде степени:

а) $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}}$; б) $x^{0,25} \cdot x^{\frac{1}{7}} \cdot x^{-\frac{1}{14}}$; в) $c^{\frac{1}{6}} \cdot c^{-\frac{5}{9}} : c^{-\frac{3}{4}}$;

г) $\left(y^{\frac{4}{7}}\right)^{0,7} \cdot y$; д) $\left(b^{-0,3}\right)^{1\frac{2}{3}} : b^2$; е) $b^{-2,5} : b^{3,5} \cdot \left(b^{\frac{1}{4}}\right)^{-8}$.

1.9. Воспользуйтесь свойствами степени с рациональным показателем и найдите значение выражения:

а) $2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{4}{3}}$; б) $5 \cdot 125^{-\frac{1}{3}}$; в) $\left(9^{0,7}\right)^5 \cdot 27^{-1\frac{1}{3}}$;

г) $3^{-\frac{1}{4}} : 3^{-\frac{5}{4}}$; д) $5^{-\frac{1}{7}} : 25^{-\frac{4}{7}}$; е) $\left(7^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{9}{4}} : 7^{-0,75}$;

ж) $\left(\frac{5}{7}\right)^{3,2} \cdot 1,4^{3,2}$; з) $\left(4^{-\frac{1}{5}}\right)^{-30} : 0,2^6$; и) $(27 \cdot 64)^{\frac{1}{3}}$;

к) $\left(\frac{0,0625}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$; л) $\left(\frac{64}{0,027}\right)^{-\frac{2}{3}}$; м) $\left(\frac{32}{0,00243}\right)^{-0,6}$.

1.10. Упростите выражение:

а) $m^{-4,3} \cdot 5m^{1,3}$; б) $-2a^{0,7} : \left(8a^{-2,3}\right)$; в) $3b^{\frac{3}{8}} + \left(2b^{\frac{1}{8}}\right)^3$.

1.11. Выполните действия:

а) $b^{3,6} : \sqrt[5]{b^3}$; б) $\left(3\sqrt[5]{b^2}\right)^2 + 3b^{0,8}$; в) $b^{2,5} \cdot \left(-2\sqrt{b}\right)^5$.

1.12. Вычислите значение выражения:

а) $8^{\frac{4}{3}} \cdot 0,125^{-\frac{2}{3}}$; б) $81^{\frac{3}{4}} : 0,00001^{\frac{4}{5}}$;

в) $\left(\frac{1}{25}\right)^{-0,5} - 4 \cdot 27^{\frac{2}{3}}$; г) $-5 \cdot 81^{-0,75} + 1000^{\frac{4}{3}}$;

д) $0,008^{-\frac{1}{3}} - 0,064^{-\frac{2}{3}} + 0,125^{-\frac{4}{3}}$; е) $12^{\frac{5}{6}} : 2^{1\frac{2}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}}$.

1.13. Упростите выражение:

а) $(16x)^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{1}{8}x^{\frac{3}{8}}\right)^{-\frac{1}{3}}$; б) $(1000x)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(0,01x^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

1.14. Упростите выражение $\left(\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{9}}}\right)^{-9}\right)^{\frac{1}{4}}$ и найдите его значение при $a = 0,25$.

1.15. Определите порядок действий и вычислите:

а) $100^{0,5}+0,00032^{-0,8}-0,5^{-4}$;

б) $8^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}+\left(\frac{1}{9}\right)^{1,5}$;

в) $\dfrac{64^{-\frac{2}{3}}+16^{-\frac{3}{2}}}{3\cdot 8^{-\frac{1}{3}}-256^{-\frac{1}{2}}}$;

г) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}+810\,000^{0,25}-\left(7\frac{19}{32}\right)^{\frac{1}{5}}+(0,63)^{0}$.

1.16. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\left(a^{-\frac{3}{7}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[7]{a^{5}}\cdot b^{-0,2}}{\left(a^{-0,5}\cdot b^{\frac{3}{5}}\right)^{-2}}$; б) $\left(\dfrac{a^{\frac{5}{2}}}{\sqrt[4]{a}\cdot b^{2}}:\dfrac{a^{-\frac{7}{4}}b^{\frac{5}{2}}}{b^{-1,5}}\right)^{3}$.

1.17. Разложите на множители выражение:

а) $a+a^{\frac{1}{2}}$; б) $b-5b^{\frac{1}{3}}$; в) $x^{\frac{2}{3}}-x$;

г) $a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}$; д) $7m^{\frac{3}{4}}+m^{\frac{1}{2}}$; е) $2n^{\frac{5}{6}}-5n^{\frac{1}{3}}$.

1.18. Разложите на множители числитель и знаменатель дроби, если это необходимо, и сократите дробь:

а) $\dfrac{b^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{6}}}{b^{\frac{1}{6}}}$; б) $\dfrac{a^{0,25}}{a-a^{\frac{1}{4}}}$; в) $\dfrac{x+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}}{y+x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}}$; г) $\dfrac{a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{b-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}$.

1.19. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{x^{\frac{7}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}{5x^{\frac{4}{3}}}$ при $x=4$; б) $\dfrac{7\sqrt[5]{a^{4}}}{a^{2,8}-3a^{-\frac{1}{5}}}$ при $a=2$.

1.20. Сократите дробь $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{1}{2}}b^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}b^{-1}-a}$ и вычислите ее значение при $a=0,25$ и $b=\frac{1}{3}$.

1.21. Примените формулы сокращенного умножения и упростите выражение:

а) $\left(2a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(2a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)+b;$ б) $\left(a^{\frac{1}{4}}+3a^{\frac{3}{2}}\right)^2-\sqrt{a}-9a^3.$

1.22. Сократите дробь:

а) $\dfrac{a-36}{a^{\frac{1}{2}}+6};$ б) $\dfrac{a^{\frac{1}{14}}-b^{\frac{1}{14}}}{a^{\frac{1}{7}}-b^{\frac{1}{7}}};$ в) $\dfrac{a+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}{ab^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b};$

г) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-25}{a^{\frac{1}{3}}+10a^{\frac{1}{6}}+25};$ д) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-2a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}}{a-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}};$ е) $\dfrac{16b^{\frac{1}{8}}-a^{\frac{1}{8}}}{a^{\frac{1}{8}}-8a^{\frac{1}{16}}b^{\frac{1}{16}}+16b^{\frac{1}{8}}}.$

1.23. Выберите рациональный способ и найдите значение выражения $\dfrac{9x-y}{3x+x^{0,5}y^{0,5}}$ при $x=100$, $y=576$.

1.24. Найдите значение выражения $\left(a^{-\frac{1}{5}}-a^{\frac{4}{5}}\right)\left(a^{\frac{1}{5}}-a^{-\frac{4}{5}}\right)$ при $a=10$.

1.25. Упростите выражение $\left(\dfrac{3x^{\frac{1}{2}}}{3-x^{\frac{1}{2}}}+3\right)\left(9-6x^{\frac{1}{2}}+x\right).$

1.26. Упростите выражение $\left(\dfrac{a^{\frac{5}{6}}-a^{\frac{1}{3}}}{a-1}\right)^{-1}-a^{\frac{1}{6}}$ и найдите его значение при $a=64$.

1.27. Упростите выражение $\left(\dfrac{a^2-b^2}{a^{\frac{3}{2}}+ab^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}\right):\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1}.$

1.28. Выполните действия, используя свойства степени с действительным показателем:

а) $a^{\sqrt{2}}\cdot a^{1-\sqrt{2}};$ б) $x^{2\sqrt{3}}:x^{\sqrt{12}};$ в) $\left(c^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}};$ г) $a^{2+\sqrt{2}}:a^{1+\sqrt{2}}.$

1.29. Вычислите значение выражения:

а) $\left(2^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}};$ б) $\left(7^{-\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}};$ в) $\left(\left(\sqrt{5}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{2\sqrt{2}};$

г) $3^{2+\sqrt{3}}\cdot 3^{2-\sqrt{3}};$ д) $27^{\sqrt{5}}:3^{3\sqrt{5}};$ е) $2^{3-2\sqrt{7}}\cdot 4^{1+\sqrt{7}};$

ж) $9^{\sqrt{3}}:3^{1+2\sqrt{3}};$ з) $\left(5^{4-\sqrt{15}}\right)^{4+\sqrt{15}};$ и) $\left(3^{1+\sqrt{5}}\right)^{1-\sqrt{5}}.$

1.30. Сократите дробь:

а) $\dfrac{a^{2\sqrt{2}}-49}{a^{\sqrt{2}}-7}$; б) $\dfrac{a^{\sqrt{5}}+b^{\sqrt{7}}}{a^{2\sqrt{5}}-b^{2\sqrt{7}}}$; в) $\dfrac{a^{2\sqrt{3}}-2a^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+a^{2\sqrt{2}}}{a^{2\sqrt{2}}-a^{2\sqrt{3}}}$.

1.31. Сравните числа:

а) $2^{\sqrt{3}}$ и 4; б) $3^{\sqrt{10}}$ и 27; в) 125 и $5^{2\sqrt{2}}$.

1.32*. Определите, является ли значение выражения натуральным числом:

а) $2^{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}:4^{\sqrt{2}}$; б) $\dfrac{\left(\sqrt{125}\right)^{\sqrt{28}}}{5^{\sqrt{63}-2}}$; в) $3^{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}:3^{\sqrt{3}}$.

1.33*. Найдите значение выражения $\dfrac{15^{4+\sqrt{7}}}{3^{3+\sqrt{7}}\cdot 5^{2+\sqrt{7}}}$.

1.34*. Упростите выражение

$$\left(\frac{a^{\frac{\sqrt{7}}{2}}-b^{\frac{\sqrt{7}}{2}}}{a^{\frac{\sqrt{7}}{4}}\cdot b+b^{\frac{\sqrt{7}}{4}+1}}+\frac{b^{\frac{\sqrt{7}}{2}-1}}{b^{0,25\sqrt{7}}+a^{0,25\sqrt{7}}}\right):\left(\frac{a^{\frac{\sqrt{7}}{4}}+b^{\frac{\sqrt{7}}{4}}}{a^{-0,5\sqrt{7}}}\right)^{-1}.$$

1.35. Представьте в виде корня выражение, используя определение степени с рациональным показателем:

а) $3^{\frac{2}{7}}$; б) $6^{\frac{1}{3}}$; в) $7^{\frac{1}{2}}$; г) $5^{-\frac{2}{3}}$;

д) $10^{-\frac{1}{6}}$; е) $2^{-0,4}$; ж) $a^{\frac{3}{5}}$; з) $b^{\frac{1}{8}}$;

и) $c^{-\frac{5}{9}}$; к) $d^{-0,1}$; л) $(x+5y)^{\frac{4}{7}}$; м) $(5a-b)^{-0,3}$.

1.36. Представьте корень в виде степени с рациональным показателем:

а) $\sqrt[6]{2^5}$; б) $\sqrt{5^3}$; в) $\sqrt[4]{3^{-3}}$; г) $\sqrt{7^{-5}}$;

д) $\sqrt[9]{a^4}$; е) $\sqrt[10]{b^{-7}}$; ж) $\sqrt[5]{(7a+b)^4}$; з) $\sqrt{(m+9n)^{-1}}$.

1.37. Вычислите значение выражения, используя определение степени с рациональным показателем:

а) $125^{\frac{1}{3}}$; б) $25^{-\frac{1}{2}}$; в) $32^{\frac{3}{5}}$; г) $81^{-\frac{3}{4}}$; д) $27^{\frac{2}{3}}$;

е) $125^{-\frac{2}{3}}$; ж) $0{,}008^{\frac{1}{3}}$; з) $0{,}0001^{-\frac{3}{4}}$; и) $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}$; к) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$.

1.38. Представьте выражение в виде степени:

а) $x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{-\frac{1}{5}}$; б) $a^{0,5} \cdot a^{-\frac{1}{6}} \cdot a^{\frac{1}{3}}$; в) $c^{0,7} \cdot c^{-0,2} : c^{-\frac{4}{15}}$;

г) $b^2 \cdot \left(b^{\frac{4}{9}}\right)^{1,8}$; д) $\left(y^{-0,6}\right)^{1\frac{1}{6}} : y$; е) $m \cdot \left(m^{4,5}\right)^{\frac{2}{9}}$.

1.39. Используйте свойства степени с рациональным показателем и найдите значение выражения:

а) $5^{\frac{1}{6}} \cdot 5^{-1\frac{1}{6}}$; б) $2 \cdot \left(4^2\right)^{-0,25}$; в) $10^{-\frac{4}{5}} : 10^{-2,8}$;

г) $\left(2^{1,5}\right)^{-2} : 16^{-1,25}$; д) $5^{-4,8} : \left(5^{-1,4}\right)^2$; е) $1{,}8^{6,7} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{6,7}$;

ж) $12^5 : \left(6^{-\frac{1}{3}}\right)^{-15}$; з) $(81 \cdot 0{,}0016)^{\frac{1}{4}}$; и) $(100\,000 : 243)^{\frac{2}{5}}$.

1.40. Упростите выражение:

а) $a^{-5,7} \cdot 6a^{3,7}$; б) $6b^{1,9} : \left(18b^{-2,1}\right)$; в) $(3b^{0,4})^2 + 3b^{0,8}$.

1.41. Выполните действия:

а) $d^{2,2} \cdot \sqrt[5]{d^4}$; б) $\left(2\sqrt[3]{d}\right)^2 - 2d^{\frac{2}{3}}$; в) $\left(-2\sqrt[4]{d}\right)^3 + 8d^{\frac{3}{4}}$.

1.42. Вычислите значение выражения:

а) $27^{\frac{1}{3}} \cdot 0{,}064^{-\frac{2}{3}}$; б) $8^{\frac{5}{3}} : 0{,}0001^{-\frac{1}{4}}$;

в) $\left(\frac{1}{49}\right)^{-0,5} + 6 \cdot 32^{\frac{3}{5}}$; г) $3^{\frac{5}{6}} : 2^{-\frac{1}{6}} \cdot 18^{-\frac{5}{12}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}$.

1.43. Упростите выражение $\left(0{,}36a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{125}a\right)^{-\frac{1}{3}}$.

1.44. Определите порядок действий и вычислите:

а) $100^{-\frac{1}{2}}+(0{,}001)^{-\frac{2}{3}}$; б) $\dfrac{25^{\frac{1}{2}}-64^{\frac{2}{3}}}{0{,}0081^{-\frac{3}{4}}}$; в) $64^{\frac{2}{3}}-\dfrac{25^{0{,}5}}{0{,}0016^{0{,}25}}+13^0-\left(\dfrac{1}{7}\right)^{-2}$.

1.45. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\left(a^{-\frac{3}{8}}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot a\cdot b^{-1{,}5}}{\left(a^{0{,}25}\cdot\sqrt[3]{b^{-1}}\right)^{-3}}$; б) $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{5}{6}}}:\dfrac{\sqrt{a}\cdot b^{-\frac{4}{3}}}{b^{\frac{1}{4}}}\right)^3$.

1.46. Разложите на множители выражение:

а) $x^{\frac{1}{2}}-x$; б) $m+m^{\frac{3}{4}}$; в) $b^{\frac{1}{4}}-3b^{\frac{1}{2}}$; г) $7a^{\frac{1}{6}}-4a^{\frac{2}{3}}$.

1.47. Сократите дробь:

а) $\dfrac{b^{\frac{1}{4}}+b}{b^{\frac{1}{4}}}$; б) $\dfrac{x^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}}{y^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}$; в) $\dfrac{a-a^{\frac{7}{8}}b}{b-a^{\frac{1}{8}}}$.

1.48. Сократите дробь $\dfrac{b^{-3}-a^{\frac{1}{2}}b^{-2}}{ab^{-1}-a^{\frac{1}{2}}b^{-2}}$ и найдите ее значение при $a=0{,}25$ и $b=0{,}2$.

1.49. Упростите выражение, используя формулы сокращенного умножения:

а) $\left(a^{\frac{1}{2}}-3b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+3b^{\frac{1}{2}}\right)-a$; б) $\left(3a^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{3}{4}}\right)^2-6a$.

1.50. Разложите на множители числитель и знаменатель дроби и сократите дробь:

а) $\dfrac{b^{\frac{1}{2}}-7}{b-49}$; б) $\dfrac{a^{\frac{1}{4}}+2a^{\frac{1}{8}}b^{\frac{1}{8}}+b^{\frac{1}{4}}}{ab^{\frac{7}{8}}+a^{\frac{7}{8}}b}$; в) $\dfrac{a^{\frac{1}{6}}-9b^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{6}}-6a^{\frac{1}{12}}b^{\frac{1}{12}}+9b^{\frac{1}{6}}}$.

1.51. Упростите выражение $\left(\dfrac{x}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y}-\dfrac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}\right):\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}$.

1.52. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{a}-16\sqrt{b}}{\left(a^{\frac{1}{8}}+2b^{\frac{1}{8}}\right)^2+\left(a^{\frac{1}{8}}-2b^{\frac{1}{8}}\right)^2}$ и найдите его значение при $a=\dfrac{1}{16}$, $b=81$.

1.53. Выполните действия со степенью с действительным показателем:

а) $a^{2+\sqrt{2}} : a^{\sqrt{2}}$; б) $x^{2\sqrt{2}} \cdot x^{-\sqrt{8}}$; в) $\left(b^{\sqrt{5}}\right)^{2\sqrt{5}}$.

1.54. Найдите значение выражения, используя свойства степени с действительным показателем:

а) $\left(5^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$; б) $\left(\left(\sqrt{7}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{2\sqrt{3}}$; в) $5^{1+\sqrt{3}} \cdot 5^{2-\sqrt{3}}$;

г) $16^{\sqrt{11}} : 2^{4\sqrt{11}}$; д) $\left(3^{\sqrt{11}-3}\right)^{\sqrt{11}+3}$; е) $\left(\left(\sqrt{10}\right)^{3-\sqrt{13}}\right)^{3+\sqrt{13}}$.

1.55. Сократите дробь:

а) $\dfrac{b^{2\sqrt{5}} - c^{2\sqrt{7}}}{b^{\sqrt{5}} - c^{\sqrt{7}}}$; б) $\dfrac{a^{2\sqrt{3}} + 2a^{\sqrt{3}}b^{\sqrt{2}} + b^{2\sqrt{2}}}{a^{2\sqrt{3}} - b^{2\sqrt{2}}}$.

1.56. Сравните числа $5^{\sqrt{3}}$ и 25.

1.57. Найдите значение выражения $3^{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} : \left(\dfrac{1}{9}\right)^{\sqrt{3}}$.

1.58*. Упростите выражение

$$\left(\frac{n^{\frac{\sqrt{2}}{4}} - m^{\frac{\sqrt{2}}{4}}}{m^{-0{,}5\sqrt{2}}}\right)^{-1} : \left(\frac{m^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - n^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}{n \cdot m^{\frac{\sqrt{2}}{4}} - n^{\frac{\sqrt{2}}{4}+1}} - \frac{n^{\frac{\sqrt{2}}{2}-1}}{n^{0{,}25\sqrt{2}} - m^{0{,}25\sqrt{2}}}\right).$$

1.59. Выберите все верные утверждения:

а) выражение $\sqrt[4]{a}$ имеет смысл при $a \geqslant 0$;

б) выражение $\sqrt[7]{a}$ имеет смысл при $a \in \boldsymbol{R}$;

в) выражение $\dfrac{1}{\sqrt[10]{a}}$ имеет смысл при $a \neq 0$;

г) выражение $\dfrac{1}{\sqrt[5]{a}}$ имеет смысл при $a \neq 0$.

1.60. Найдите область определения функции $f(x) = \sqrt[6]{x-8} + \dfrac{3}{\sqrt[4]{10-x}}$.

1.61. Выразите в радианной мере величины углов 72°; 140°.

1.62. Можно ли определить знак выражения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что α — угол четвертой четверти?

Определите знак выражения:

а) $\dfrac{\cos 200° \cdot \operatorname{tg} 300°}{\sin 400°}$; б) $\cos 2 \cdot \operatorname{tg} 4$.

1.63. Воспользуйтесь свойствами корней n-й степени и найдите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{125 \cdot 216}$; б) $\dfrac{\sqrt[4]{405}}{\sqrt[4]{5}}$;

в) $\left(-2\sqrt[5]{5}\right)^5$; г) $\sqrt[6]{12 - 4\sqrt{5}} \cdot \sqrt[6]{12 + 4\sqrt{5}}$.

1.64. Готовясь к новому учебному году, одиннадцатиклассник планировал приобрести некоторое количество тетрадей на определенную сумму. Придя в магазин, он узнал, что проводится сезонная акция и цена на тетради снижена на 20 %. На сколько процентов больше можно купить тетрадей по сниженной цене на отведенную для покупки сумму?

1.65. Представьте периодическую дробь в виде обыкновенной, используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

а) 0,(4); б) 0,(17); в) 0,1(5); г) 0,23(7).

1.66. Решите неравенство с помощью метода интервалов:

а) $x(x^2 - 1)(2x + 7) < 0$; б) $(x - 6)^2(x - 9)(x + 8) \leqslant 0$;

в) $\dfrac{x^2 - 5x}{x^2 - x - 2} > 0$; г) $\dfrac{\left(x^2 - 4\right)^2}{x^2 - 3x - 28} \geqslant 0$.

1.67. В арифметической прогрессии -63; -58; ... найдите сумму всех ее отрицательных членов.

1.68. Найдите $f'(2)$, если:

а) $f(x) = 3x^2 - 4x$; б) $f(x) = \dfrac{x^5}{5} + 3x^2$;

в) $f(x) = \dfrac{5x - 1}{3x + 2}$; г) $f(x) = (7x^2 - 4)(x + 2)$.

1.69. Решите иррациональное уравнение:

а) $\sqrt{4 - x^2} = x - 2$; б) $x^2 = 5 + \sqrt{x^2 - 3}$.

1.70. Упростите выражение $\sqrt[5]{243m^5} + \sqrt[4]{16m^4} - \sqrt{36m^2}$ и найдите его значение при $m = -\dfrac{1}{7}$.

1.71. Для квадратичной функции $y = f(x)$ известно, что $f(-2) = f(4)$. Найдите абсциссу вершины параболы.

1.72. Упростите выражение с помощью формул преобразования тригонометрических функций одного аргумента:

а) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x - \sin^2 x$; б) $(\sin x + \cos x)^2 - 1$.

1.73. Расположите в порядке убывания числа $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[5]{5}$.

1.74. Найдите, при каком значении числа k график обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку $A\left(-\sqrt{18}; \sqrt{2}\right)$. Постройте этот график. Как называется график обратной пропорциональности? Верно ли, что точка $B\left(48; -0{,}125\right)$ принадлежит графику этой функции?

1.75. Решите тригонометрическое уравнение:

а) $\cos 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$; б) $\sin \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = 0$; в) $\operatorname{tg} 0{,}3x - \sqrt{3} = 0$.

Найдите наименьший положительный корень каждого уравнения.

1.76. С помощью преобразований графика функции $y = \sin x$ постройте график функции $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$. Верно ли, что функция $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$: а) не имеет нулей; б) при значении аргумента, равном $\frac{\pi}{6}$, принимает значение, равное 1,5; в) не пересекает ось ординат?

1.77. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{6}{\sqrt[3]{2}}$; б) $\frac{1}{\sqrt[4]{125}}$.

1.78. На рисунке 1 изображена часть графика функции $y = f(x)$, областью определения которой является отрезок $[-7; 7]$. Изобразите в тетради график этой функции для $x \in [-7; 7]$, если известно, что она является:

а) четной; б) нечетной.

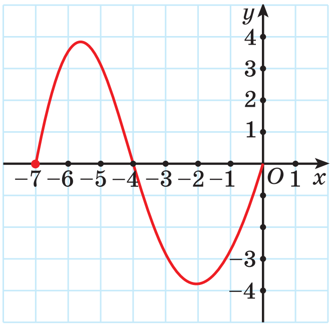

Рис. 1

1.79*. Найдите область определения функции $y = \frac{x^3 - 8x^2 + 7x}{x}$ и постройте ее график.