§ 2. Степенная функция и ее свойства

1.80. Функция задана формулой $f(x) = \sqrt[5]{2x-3}$. Найдите нуль функции.

1.81. Найдите область определения функции $f(x) = \sqrt[6]{1-7x}$.

1.82. Исследуйте функцию $f(x) = x^2 - 3x^4$ на четность.

Рассмотрим задачу. Найдите площадь грани куба, зная, что его объем равен x.

Обозначим через $S(x)$ площадь грани куба. Так как объем куба равен x, то длина ребра куба равна $\sqrt[3]{x}$, тогда $S(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 = x^{\frac{2}{3}}$.

Решение практических задач приводит к зависимостям вида $f(x) = x^{\alpha}$, где $x > 0$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

Так как для любого $\alpha \in \boldsymbol{R}$ и $x > 0$ определено понятие степени x^{α}, то для фиксированного $\alpha \in \boldsymbol{R}$ определяется степенная функция.

> **Определение.** Функция, заданная формулой $f(x) = x^{\alpha}$, называется степенной с показателем α.

Например, функции $y = x^{\frac{2}{3}}$, $y = x^{-0,3}$, $y = x^{\sqrt{2}}$ являются степенными.

Рассмотрим свойства и график степенной функции.

1. Область определения функции. Так как для любого $\alpha \in \boldsymbol{R}$ и $x > 0$ определена степень x^{α}, то $D(f) = (0; +\infty)$.

Если $\alpha > 0$, то в область определения функции включают число нуль.

2. Множество значений функции. Так как для любого $\alpha \in \boldsymbol{R}$ и $x > 0$ значение степени x^{α} является положительным числом и уравнение $x^{\alpha} = a$, где $a > 0$, имеет положительный корень для любого $\alpha \in \boldsymbol{R}$, то $E(f) = (0; +\infty)$.

Если $\alpha > 0$, то во множество значений степенной функции включают число нуль.

3. Нули функции. Уравнение $x^{\alpha} = 0$ не имеет корней при $\alpha < 0$ и имеет корень $x = 0$ при $\alpha > 0$. Значит, при $\alpha < 0$ функция $f(x) = x^{\alpha}$ не имеет нулей, а при $\alpha > 0$ нулем функции является $x = 0$.

4. Промежутки знакопостоянства функции. Поскольку для любого $\alpha \in \boldsymbol{R}$ и $x > 0$ значение степени x^{α} является положительным числом, то $f(x) > 0$ для $x \in (0; +\infty)$.

5. Промежутки монотонности функции. Если $\alpha > 0$, то функция $f(x) = x^{\alpha}$ возрастает на области определения.

Докажем это свойство для рациональных $\alpha > 0$.

Пусть $\alpha = \frac{m}{n}$ и $x_1 > x_2$ $(x_1 \in D(f),\ x_2 \in D(f))$, тогда $x_1^m > x_2^m$ по свойству степени с натуральным показателем.

По свойству корня n-й степени получим: $\sqrt[n]{x_1^m} > \sqrt[n]{x_2^m}$, или $x_1^{\frac{m}{n}} > x_2^{\frac{m}{n}}$.

Если $\alpha < 0$, то функция $f(x) = x^{\alpha}$ убывает на области определения.

Действительно, если $x_1^{\frac{m}{n}} > x_2^{\frac{m}{n}}$, то $\frac{1}{x_1^{\frac{m}{n}}} < \frac{1}{x_2^{\frac{m}{n}}}$, т. е. $x_1^{-\frac{m}{n}} < x_2^{-\frac{m}{n}}$.

6. Четность (нечетность) функции. Функция $f(x) = x^{\alpha}$ не является четной и не является нечетной, так как ее область определения не симметрична относительно нуля.

7. График функции. На рисунке 2 изображены графики степенной функции $f(x) = x^{\alpha}$ для $\alpha > 1$, $0 < \alpha < 1$ и $\alpha < 0$.

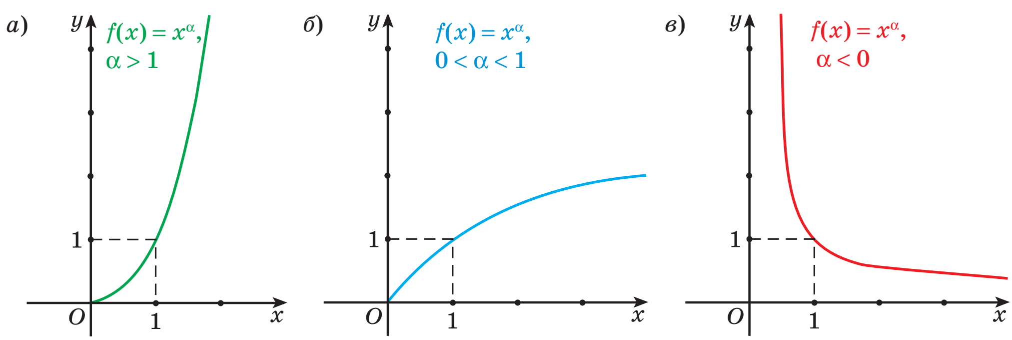

Рис. 2

Графики степенных функций проходят через точку (1; 1), так как $1^{\alpha} = 1$ при любом α.

Для некоторых значений α степенная функция $f(x) = x^{\alpha}$ может рассматриваться и на более широкой области определения. Так, при натуральных значениях α степенная функция определена на множестве всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$. В этом случае функция имеет вид $y = x^n$, где $n \in \boldsymbol{N}$. Известные вам функции $y = x^2$ и $y = x^3$ являются примерами степенных функций такого вида.

При построении графиков $y = x^n$ $(n \in \boldsymbol{N})$ на области определения $\boldsymbol{R}$ рассматриваются два случая.

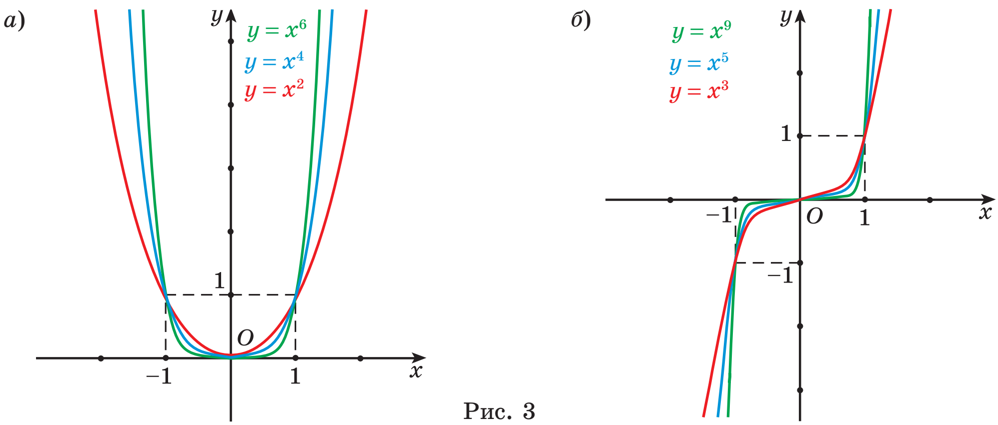

Рис. 3

Если n — четное число, то свойства и график функции $y = x^{2k}$, $k \in N$, аналогичны свойствам и графику функции $y = x^2$ (рис. 3, *а*).

Если n — нечетное число, то свойства и график функции $y = x^{2k+1}$, $k \in N$, аналогичны свойствам и графику функции $y = x^3$ (рис. 3, *б*).

При целых отрицательных значениях α степенная функция определена на множестве $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$. Например, степенная функция $y = x^{-1}$ — известная вам обратная пропорциональность $y = \dfrac{1}{x}$.

Если n — нечетное отрицательное число, то свойства и график функции аналогичны свойствам и графику функции $y = x^{-1}$ (рис. 4, *а*).

Если n — четное отрицательное число, то свойства и график функции аналогичны свойствам и графику функции $y = x^{-2}$ (рис. 4, *б*).

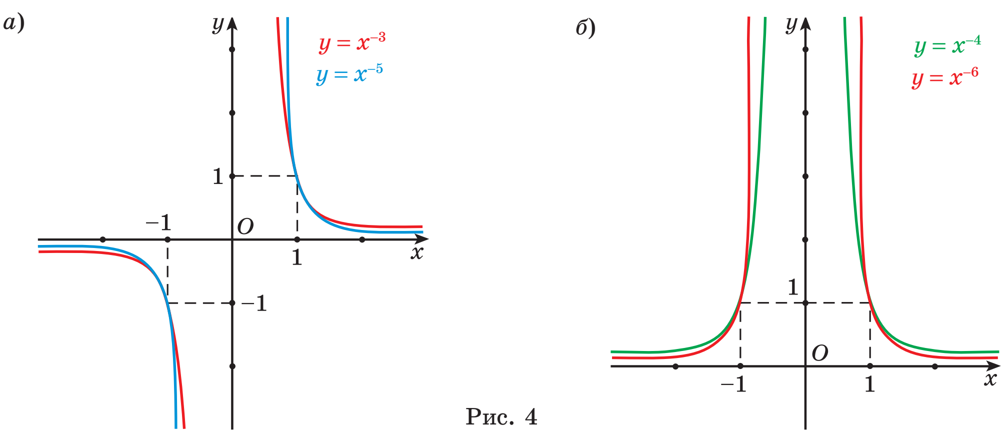

Рис. 4

Примеры основных заданий и их решения

1. Является ли степенной функция:

а) $f(x) = x^5$; б) $g(x) = x^{-3}$; в) $h(x) = x^{\frac{2}{5}}$; г) $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$?

Решение.

а) Функция $f(x) = x^5$ степенная, так как имеет вид $y = x^\alpha$, $\alpha = 5$;
б) функция $g(x) = x^{-3}$ степенная, так как имеет вид $y = x^\alpha$, $\alpha = -3$;
в) функция $h(x) = x^{\frac{2}{5}}$ степенная, так как имеет вид $y = x^\alpha$, $\alpha = \frac{2}{5}$;
г) функция $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ не является степенной, так как основание степени $\frac{2}{3}$ — число, а показатель — переменная.

2. Степенная функция задана формулой $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$. Найдите:

а) $f(1)$; б) $f(4)$; в) $f(25)$; г) $f(7)$.

Решение.

а) $f(1) = 1^{\frac{3}{2}} = 1$; б) $f(4) = 4^{\frac{3}{2}} = \left(2^2\right)^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$;
в) $f(25) = 25^{\frac{3}{2}} = \left(5^2\right)^{\frac{3}{2}} = 5^3 = 125$; г) $f(7) = 7^{\frac{3}{2}} = \left(7^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \left(\sqrt{7}\right)^3 = 7\sqrt{7}$.

3. Определите, возрастающей или убывающей является степенная функция:

а) $f(x) = x^5$; б) $g(x) = x^{-3}$; в) $h(x) = x^{\frac{2}{5}}$; г) $s(x) = x^{-0,3}$.

Решение. а) Степенная функция $f(x) = x^5$ является возрастающей, так как $\alpha = 5 > 0$.

б) Степенная функция $g(x) = x^{-3}$ является убывающей, так как $\alpha = -3 < 0$.

в) Степенная функция $h(x) = x^{\frac{2}{5}}$ является возрастающей, так как $\alpha = \frac{2}{5} > 0$.

г) Степенная функция $s(x) = x^{-0,3}$ является убывающей, так как $\alpha = -0,3 < 0$.

4. Сравните:

а) $2{,}7^{-0{,}1}$ и $4{,}9^{-0{,}1}$; б) $\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{2}{3}}$ и $\left(\sqrt{5}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Решение. а) Функция $f(x) = x^{-0{,}1}$ убывает на множестве действительных чисел, так как $\alpha = -0{,}1 < 0$. Поскольку $2{,}7 < 4{,}9$, то $2{,}7^{-0{,}1} > 4{,}9^{-0{,}1}$.

б) Функция $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ возрастает на множестве действительных чисел, так как $\alpha = \frac{2}{3} > 0$. Поскольку $\sqrt{3} < \sqrt{5}$, то $\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\sqrt{5}\right)^{\frac{2}{3}}$.

5. Найдите область определения функции:

а) $f(x) = (x - 1)^{-0{,}3}$; б) $h(x) = (x + 2)^{\frac{2}{5}}$;

в) $g(x) = (2x - 6)^{-\sqrt{3}}$; г) $f(x) = (x + 7)^{\sqrt{2}}$.

Решение. а) Областью определения степенной функции для $\alpha < 0$ является множество положительных действительных чисел, значит, $x - 1 > 0$; $x > 1$; $D = (1; +\infty)$.

б) Областью определения степенной функции для $\alpha > 0$ является множество неотрицательных действительных чисел, значит, $x + 2 \geqslant 0$, $x \geqslant -2$, $D = [-2; +\infty)$.

в) Областью определения степенной функции для $\alpha < 0$ является множество положительных действительных чисел, значит, $2x - 6 > 0$, $x > 3$, $D = (3; +\infty)$.

г) Областью определения степенной функции для $\alpha > 0$ является множество неотрицательных действительных чисел, значит, $x + 7 \geqslant 0$, $x \geqslant -7$, $D = [-7; +\infty)$.

6. Изобразите схематически график функции:

а) $f(x) = x^{5{,}2}$; б) $g(x) = x^{-1{,}6}$;

в) $h(x) = x^{\frac{2}{5}}$; г) $s(x) = x^{-0{,}3}$.

Решение. Графики указанных функций изображены на рисунках 5, *а—г*.

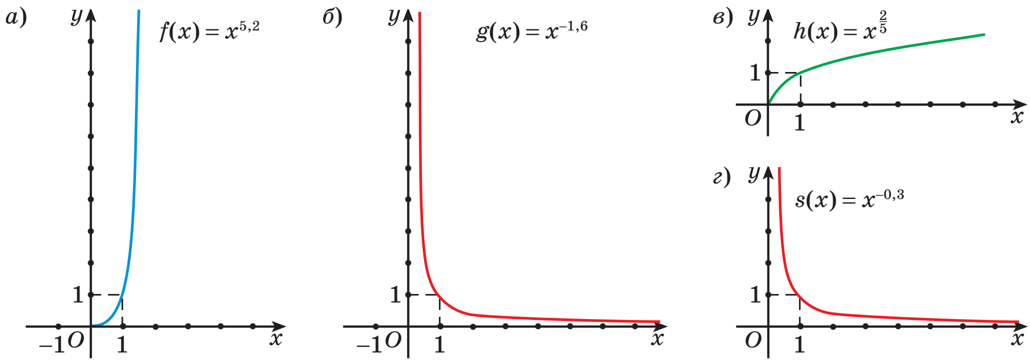

Рис. 5

7. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $h(x) = x^{\frac{2}{5}}$ на промежутке $[1; 32]$;

б) $f(x) = x^{-\frac{4}{3}}$ на промежутке $\left[\frac{1}{8}; 27\right]$.

Решение.

а) Так как функция $h(x) = x^{\frac{2}{5}}$ возрастает на области определения, то наименьшее значение она принимает на левом конце промежутка $h(1) = 1^{\frac{2}{5}} = 1$, а наибольшее значение — на правом конце промежутка $h(32) = 32^{\frac{2}{5}} = 4$.

б) Так как функция $f(x) = x^{-\frac{4}{3}}$ убывает на области определения, то наименьшее значение она принимает на правом конце промежутка $h(27) = (27)^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{81}$, а наибольшее значение — на левом конце промежутка $h\left(\frac{1}{8}\right) = \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}} = 16$.

Верно ли, что график любой степенной функции проходит через точку $A(1; 1)$?

1.83. Какие из данных функций являются степенными:

а) $f(x) = x^7$; б) $g(x) = x^{-0,4}$; в) $p(x) = 5^x$; г) $h(x) = x^{\frac{3}{7}}$?

1.84. Степенная функция задана формулой $f(x) = x^{-\frac{3}{4}}$. Найдите:

а) $f(1)$; б) $f(16)$; в) $f\left(\frac{1}{81}\right)$; г) $f\left(\sqrt[3]{2}\right)$.

1.85. Найдите значение функции $g(x)$ в точке x_0, если:

а) $g(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $x_0 = 9$; б) $g(x) = x^{-\frac{2}{3}}$, $x_0 = 8$;

в) $g(x) = x^{\frac{5}{3}}$, $x_0 = 0{,}001$; г) $g(x) = x^{-\frac{4}{3}}$, $x_0 = \frac{1}{27}$.

1.86. Верно ли, что точка $F(81;\ 27)$ принадлежит графику функции $y = x^{0,75}$?

1.87. Выберите точки, через которые проходит график функции $y = x^{\frac{1}{4}}$:

а) $A(1;\ 1)$; б) $B(16;\ 2)$; в) $C\left(25;\ \sqrt{5}\right)$; г) $D(4;\ 1)$.

1.88. Определите, какие из данных степенных функций являются возрастающими:

а) $f(x) = x^7$; б) $g(x) = x^{-9}$; в) $h(x) = x^{0,8}$; г) $p(x) = x^{\sqrt{5}}$.

1.89. Сравните:

а) $f(7{,}1)$ и $f(8{,}9)$, если $f(x) = x^{-7,2}$;

б) $g(3{,}2)$ и $g(6{,}7)$, если $g(x) = x^{\sqrt{6}}$.

1.90. Расположите в порядке возрастания значения выражений, используя свойство монотонности степенной функции:

а) $5{,}9^{\sqrt{2}}$, $1{,}8^{\sqrt{2}}$ и $3{,}7^{\sqrt{2}}$; б) $\left(\sqrt{3}\right)^{-5,1}$, $\left(\sqrt{2}\right)^{-5,1}$ и $\left(\sqrt{5}\right)^{-5,1}$.

1.91. Найдите область определения функции:

а) $y = (x-5)^{-7,2}$; б) $y = (3-2x)^{\frac{1}{3}}$; в) $y = \left(7 + \frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{5}}$;

г) $y = \left(x^2 - 5x + 4\right)^{1,7}$; д) $y = \left(4x^2 - 9\right)^{-\sqrt{3}}$; е) $y = \left(5 - x^2\right)^{\sqrt{6}}$;

ж) $y = \left(\frac{5x-1}{x}\right)^{-\frac{3}{4}}$; з) $y = \left(\frac{3x^2 - 10x + 3}{x-2}\right)^{0,9}$; и) $y = \left(\frac{9-x^2}{x+1}\right)^{-\sqrt{5}}$.

1.92. Установите соответствие между графиком степенной функции (рис. 6) и ее формулой:

а) $y = x^{\frac{2}{5}}$; б) $y = x^{\frac{5}{2}}$; в) $y = x^{-5}$.

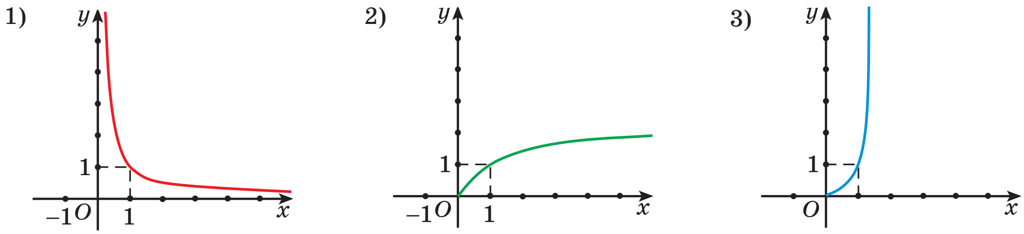

Рис. 6

1.93. Изобразите схематически график функции:

а) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$; б) $g(x) = x^{1,5}$; в) $h(x) = x^{-\frac{3}{4}}$; г) $p(x) = x^{-\frac{5}{3}}$.

1.94. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $h(x) = x^{\frac{1}{3}}$ на промежутке $[1;\ 27]$;

б) $f(x) = x^{-\frac{3}{4}}$ на промежутке $\left[\frac{1}{16};\ 81\right]$.

1.95. Найдите наибольшее и наименьшее значения функций $f(x) = x^{\frac{5}{3}}$ и $g(x) = x^{-\frac{5}{3}}$ на промежутке $[0{,}125;\ 64]$.

1.96*. Даны функции $f(x) = x^{\frac{2}{5}}$ и $g(x) = \frac{5x+7}{x-4}$. Найдите $f(g(5))$.

1.97. Степенная функция задана формулой $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$. Найдите:

а) $f(1)$; б) $f(9)$; в) $f(0{,}16)$; г) $f\left(\frac{4}{49}\right)$.

1.98. Выберите точки, через которые проходит график функции $y = x^{\frac{1}{3}}$:

а) $A(1;\ 1)$; б) $B(27;\ 3)$; в) $C(0{,}008;\ 0{,}2)$; г) $D(3;\ 1)$.

1.99. Возрастающей или убывающей является степенная функция:

а) $f(x) = x^{1,2}$; б) $g(x) = x^{-\frac{6}{7}}$; в) $p(x) = x^{\sqrt{2}}$; г) $h(x) = x^{-2,5}$?

1.100. Сравните:

а) $3{,}7^{-0{,}4}$ и $7{,}4^{-0{,}4}$; б) $\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{5}{7}}$ и $\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{5}{7}}$.

1.101. Найдите область определения функции:

а) $y = (x + 4)^{0{,}2}$; б) $y = (5 - x)^{-\frac{2}{7}}$; в) $y = \left(16 - x^2\right)^{-0{,}7}$;

г) $y = \left(x^2 - x - 2\right)^{\sqrt{3}}$; д) $y = \left(\dfrac{x-9}{x}\right)^{-\sqrt{7}}$; е) $y = \left(\dfrac{4x^2 - x}{x+7}\right)^{3{,}8}$.

1.102. Изобразите схематически график функции:

а) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$; б) $g(x) = x^{-\frac{1}{2}}$; в) $h(x) = x^{\frac{2}{9}}$; г) $p(x) = x^{2{,}5}$.

1.103. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $h(x) = x^{\frac{1}{4}}$ на промежутке $[1;\ 16]$;

б) $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$ на промежутке $\left[\frac{1}{8};\ 125\right]$.

1.104. Выразите в градусной мере углы $\frac{11\pi}{12}$, $\frac{23\pi}{8}$.

1.105. Воспользуйтесь свойствами степени с рациональным показателем и найдите значение выражения $16^{\frac{1}{2}} + 27^{-\frac{1}{3}} + 81^{\frac{3}{4}} + 8^{1\frac{2}{3}}$.

1.106. Задайте формулой:

а) линейную функцию, график которой параллелен графику функции $y = -x + 8$ и пересекается с графиком функции $y = 5x - 6$ в точке, лежащей на оси ординат;

б) нечетную линейную функцию, график которой проходит через точку $A(-3;\ 9)$.

Приведите пример четной линейной функции.

1.107. Для экскурсионных поездок учащихся было выделено несколько автобусов с одинаковым числом мест в каждом. 328 детей поехали в Дудутки, 369 детей — в Мирский замок. Все места в автобусах были заняты, ни одного человека не осталось без места. Найдите число мест в каждом автобусе и число автобусов, отправившихся в Мирский замок.

1.108. Вычислите, используя формулы приведения:

а) $\cos 225°$; б) $\sin 150°$; в) $\mathrm{ctg}\, 240°$; г) $\mathrm{tg}\, 300°$.

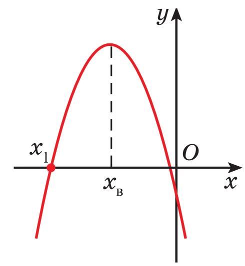

Рис. 7

1.109. На рисунке 7 изображен график функции $f(x) = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$. Выберите неверное утверждение:

а) $f(x_1) = 0$; б) $f(3) < f(0)$;
в) $f(10) < 0$; г) $f(0) = 0$;
д) $f(x_в) \geqslant f(x_0)$, где $x_0 \in \boldsymbol{R}$.

1.110. Найдите наименьшее значение функции $y = -5\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$. Приведите пример функции вида $y = A\sin(kx + m) + n$, множеством значений которой является отрезок $[-6; 2]$.

1.111. Сколько общих точек имеют графики функций $y = \sqrt{5 - x^2}$ и $y = 1 - x$? Найдите абсциссы этих точек.

1.112. Решите тригонометрическое уравнение:

а) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $2\sin^2 x + 5\cos x + 1 = 0$;
в) $\cos 7x \cos 3x + \sin 7x \sin 3x = -1$.

Найдите наибольший отрицательный корень каждого уравнения.

1.113. Найдите промежутки монотонности и точки экстремума функции $f(x) = x^3 - 12x$.

§ 3. Определение логарифма числа. Основное логарифмическое тождество

1.114. Решите уравнение:

а) $x^3 = 27$; б) $x^4 = 16$; в) $x^3 = 25$; г) $x^6 = 2$.

1.115. Найдите значение степени:

а) 2^{-3}; б) $25^{-\frac{1}{2}}$; в) $81^{\frac{3}{4}}$; г) $121^{0,5}$.

1.116. Найдите область определения выражения:

а) $(x - 1)^3$; б) $(x - 1)^{-3}$; в) $(x - 1)^{\frac{1}{3}}$; г) $(x - 1)^{-\frac{1}{3}}$.

При изучении понятия степени a^n мы:

- рассматривали свойства степени с различными показателями (например, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ и т. п.);
- вычисляли значение степени, зная ее *основание a* и *показатель n* (например, $2^6 = 64$, $7^{-1} = \frac{1}{7}$);
- определяли *основание степени a* по значению степени и ее показателю (например, если $a^3 = 125$, то $a = 5$).