ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

§ 4. Показательная функция

2.1. Решите уравнение:

а) $x^3 = 27$; б) $x^4 = 16$; в) $x^3 = 25$; г) $x^6 = 2$.

2.2. Найдите значение степени:

а) 2^{-3}; б) $25^{-\frac{1}{2}}$; в) $81^{\frac{3}{4}}$; г) $121^{0,5}$; д) $32^{1,2}$.

2.3. Найдите $f(8)$, если:

а) $f(x) = x^2 - 5$; б) $f(x) = \sqrt{x + 17}$; в) $f(x) = -\frac{4}{x}$;

г) $f(x) = x^{-3}$; д) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 5$; е) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$.

Рассмотрим некоторые процессы, которые невозможно описать изученными ранее функциями.

1. Процесс размножения бактерий. За равные промежутки времени масса колонии бактерий возрастает в одно и то же число раз, если есть постоянная питательная среда и бактерии не уничтожаются.

В данном случае речь идет о процессе, в ходе которого значение величины за равные промежутки времени увеличивается в одно и то же число раз. Такие процессы называют процессами органического роста.

2. Процесс распада радиоактивного вещества. За равные промежутки времени масса радиоактивного вещества уменьшается в одно и то же число раз.

В данном случае речь идет о процессе, в ходе которого значение величины за равные промежутки времени уменьшается в одно и то же число раз. Такие процессы называют процессами органического убывания.

Процессы органических изменений описывает функция вида $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, которая называется показательной.

Определение. Функция вида $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) называется **показательной** функцией.

Например, функции $y = 2^x$, $y = 0,3^x$, $y = \left(\sqrt{5}\right)^x$ являются показательными.

Рассмотрим свойства и график показательной функции.

1. Область определения функции. Так как для любого $x \in \boldsymbol{R}$ определена степень a^x, где $a > 0$, $a \neq 1$, то $D(y) = (-\infty;\ +\infty)$.

2. Множество значений функции. Так как для любого $x \in \boldsymbol{R}$ и $a > 0$, $a \neq 1$ значение степени a^x является положительным числом и уравнение $a^x = y$ имеет решение для любого $y > 0$, то $E(y) = (0;\ +\infty)$.

3. Нули функции. Так как $a^x > 0$ для любого $x \in \boldsymbol{R}$ и $a > 0$, $a \neq 1$, то уравнение $a^x = 0$ не имеет корней. Значит, функция $y = a^x$ не имеет нулей, т. е. ее график не пересекает ось абсцисс.

4. Пересечение с осью ординат. При $x = 0$ получим: $y = a^0 = 1$. Значит, для любого $a > 0$, $a \neq 1$ график функции $y = a^x$ пересекает ось ординат в точке $(0;\ 1)$.

5. Промежутки знакопостоянства функции. Поскольку $a^x > 0$ для любого $x \in \boldsymbol{R}$ и $a > 0$, $a \neq 1$, то $y > 0$ для всех $x \in D(y)$. Таким образом, график показательной функции расположен выше оси абсцисс на всей области определения.

6. Промежутки монотонности функции. Рассмотрим показательную функцию $y = 2^x$. Заметим, что с увеличением значений аргумента, значения функции увеличиваются: $2^4 > 2^3$; $2^5 > 2^4$, $2^6 > 2^5$ и т. д.

Если основание показательной функции меньше единицы, но больше нуля (например, $a = \frac{1}{2}$), то с увеличением значений аргумента значения показательной функции уменьшаются: $\left(\frac{1}{2}\right)^4 < \left(\frac{1}{2}\right)^3$; $\left(\frac{1}{2}\right)^5 < \left(\frac{1}{2}\right)^4$ и т. д.

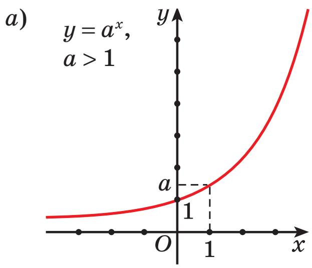
Эти утверждения справедливы для любых значений аргумента из области определения показательной функции. Примем без доказательства следующую теорему.

Теорема. Если $a > 1$ и $x_2 > x_1$, $\{x_2;\ x_1\} \in \boldsymbol{R}$, то $a^{x_2} > a^{x_1}$.

Если $0 < a < 1$ и $x_2 > x_1$, $\{x_2;\ x_1\} \in \boldsymbol{R}$, то $a^{x_2} < a^{x_1}$.

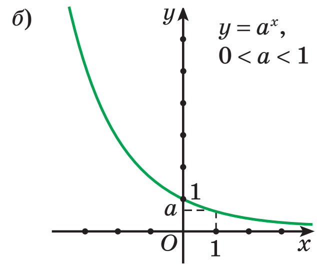
Показательная функция $y = a^x$ с основанием $a > 1$ возрастает на области определения, а показательная функция $y = a^x$ с основанием $0 < a < 1$ убывает на области определения.

7. График функции. На рисунке 9 изображены графики показательной функции для $a > 1$ и $0 < a < 1$, а также отражены некоторые ее свойства.



Если $a > 1$, то функция $y = a^x$ возрастает на $\boldsymbol{R}$.

Если $x > 0$, то $a^x > 1$.
Если $x < 0$, то $0 < a^x < 1$.



Если $0 < a < 1$, то функция $y = a^x$ убывает на $\boldsymbol{R}$.

Если $x > 0$, то $0 < a^x < 1$.
Если $x < 0$, то $a^x > 1$.

Рис. 9

Примеры основных заданий и их решения

1. Является ли показательной функция:

а) $y = 7^x$; б) $y = x^5$; в) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; г) $y = 2$?

Решение. а) Так как функция $y = 7^x$ имеет вид $y = a^x$, где $a = 7$, то она является показательной функцией.

б) Функция $y = x^5$ не является показательной, поскольку имеет вид $y = x^n$, т. е. является степенной функцией.

в) Функция $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ имеет вид $y = a^x$, где $a = \frac{1}{3}$, значит, она является показательной функцией.

г) Функция $y = 2$ не является показательной, так как это линейная функция $y = kx + b$, где $k = 0$, $b = 2$.

2. Показательная функция задана формулой $f(x) = 7^x$. Найдите:

а) $f(1)$; б) $f(2)$; в) $f(0)$; г) $f(-2)$;

д) $f\left(\frac{1}{2}\right)$; е) $f(-0{,}5)$; ж) $f(\log_7 5)$; з) $f(2\log_7 3)$.

Решение.

а) $f(1) = 7^1 = 7$; б) $f(2) = 7^2 = 49$;

в) $f(0) = 7^0 = 1$; г) $f(-2) = 7^{-2} = \frac{1}{49}$;

д) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$; е) $f(-0{,}5) = 7^{-0{,}5} = 7^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{7^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$;

ж) $f(\log_7 5) = 7^{\log_7 5} = 5$; з) $f(2\log_7 3) = 7^{2\log_7 3} = \left(7^{\log_7 3}\right)^2 = 3^2 = 9$.

3. Из данных точек выберите точки, принадлежащие графику функции $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$:

а) $A(0;\ 1)$; б) $B(-2;\ 25)$; в) $C(-1;\ -5)$;

г) $D(\log_{0,2} 3;\ 3)$; д) $P(\log_5 7;\ 7)$; е) $E\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

Решение. а) Подставим в формулу $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ значение аргумента $x = 0$ и найдем соответствующее значение функции $y = \left(\frac{1}{5}\right)^0 = 1$. Полученное число совпадает с ординатой точки A, значит, точка $A(0;\ 1)$ принадлежит графику функции.

б) При $x = -2$ значение функции $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 25$. Точка $B(-2;\ 25)$ принадлежит графику функции.

в) При $x = -1$ получим $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5 \neq -5$. Точка $C(-1;\ -5)$ не принадлежит графику функции.

г) При $x = \log_{0,2} 3$ по основному логарифмическому тождеству имеем $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{0,2} 3} = 0,2^{\log_{0,2} 3} = 3$. Точка $D\left(\log_{0,2} 3;\ 3\right)$ принадлежит графику функции.

д) При $x = \log_5 7$ по основному логарифмическому тождеству и свойству степени имеем $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_5 7} = \left(5^{-1}\right)^{\log_5 7} = \left(5^{\log_5 7}\right)^{-1} = 7^{-1} = \frac{1}{7} \neq 7$. Точка $P(\log_5 7;\ 7)$ не принадлежит графику функции.

е) При $x = \frac{1}{2}$ значение функции $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Точка $E\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ принадлежит графику функции.

4. Определите, возрастающей или убывающей является показательная функция:

а) $y = 5^x$; б) $y = \left(\frac{2}{7}\right)^x$; в) $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$; г) $y = 0,53^x$.

Решение. а) Показательная функция $y = 5^x$ является возрастающей, так как ее основание больше единицы ($a = 5 > 1$).

б) Показательная функция $y = \left(\frac{2}{7}\right)^x$ является убывающей, так как ее основание $a = \frac{2}{7}$ меньше единицы и больше нуля $\left(0 < \frac{2}{7} < 1\right)$.

в) Показательная функция $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$ является возрастающей, так как ее основание больше единицы $\left(a = \sqrt{3} > 1\right)$.

г) Показательная функция $y = 0,53^x$ является убывающей, так как ее основание $a = 0,53$ меньше единицы и больше нуля $(0 < 0,53 < 1)$.

5. Сравните:

а) $f(3,5)$ и $f(4,2)$, если $f(x) = 0,3^x$;

б) $g(10,8)$ и $g(12,9)$, если $g(x) = \left(\sqrt{13}\right)^x$.

Решение. а) Функция $f(x) = 0{,}3^x$ убывает на множестве действительных чисел $(a = 0{,}3 \in (0;\ 1))$. Так как $3{,}5 < 4{,}2$, то $f(3{,}5) > f(4{,}2)$.

б) Функция $g(x) = \left(\sqrt{13}\right)^x$ возрастает на множестве действительных чисел $\left(a = \sqrt{13} > 1\right)$ и $10{,}8 < 12{,}9$, поэтому $g(10{,}8) < g(12{,}9)$.

6. Найдите множество значений функции $f(x) = 5^{x+2} - 3$.

Решение. При $x \in \boldsymbol{R}$ верным является неравенство $5^{x+2} > 0$, тогда $5^{x+2} - 3 > -3$, т. е. $E(f) = (-3;\ +\infty)$.

7. Найдите множество значений функции:

а) $y = 2^x$ на промежутке $[-1;\ 5]$;

б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ на промежутке $[-2;\ 3]$.

Решение. а) Так как $y = 2^x$ — возрастающая функция, а $-1 \leqslant x \leqslant 5$, то $2^{-1} \leqslant 2^x \leqslant 2^5$; $\frac{1}{2} \leqslant 2^x \leqslant 32$, т. е. $E = [0{,}5;\ 32]$.

б) Так как $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ — убывающая функция, а $-2 \leqslant x \leqslant 3$, то $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \geqslant \left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant \left(\frac{1}{3}\right)^3$; $\frac{1}{27} \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^x \leqslant 9$, т. е. $E = \left[\frac{1}{27};\ 9\right]$.

8. Постройте график функции

$$y = 2^{x-1} - 3.$$

Решение. График функции $y = 2^{x-1} - 3$ получаем из графика функции $y = 2^x$ сдвигом его на 1 единицу вправо вдоль оси абсцисс и на 3 единицы вниз вдоль оси ординат (рис. 10).

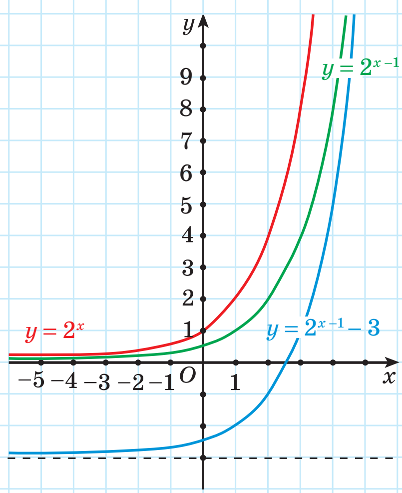


Рис. 10

9*. Из данных прямых выберите ту, которую не пересекает график функции $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$:

а) $x = -2$; б) $x = \frac{1}{2}$;

в) $y = 0{,}25$; г) $y = -3$;

д) $y = 0{,}1$.

Решение. Так как областью определения функции $y = a^x$ $(a > 0,$ $a \neq 1)$ является множество всех действительных чисел, то ее график пересекает любую прямую вида $x = b$ $(b \in \boldsymbol{R})$.

Множеством значений функции $y = a^x$ является промежуток $(0;\ +\infty)$, значит, ее график пересекает любые прямые вида $y = m$ $(m > 0)$ и не пересекает прямые вида $y = m$ $(m \leqslant 0)$.

Таким образом, график данной функции не пересекает прямую $y = -3$.

10*. Найдите наибольшее значение функции $y = \left(\sqrt{3}\right)^{2 - x^2 + 4x}$.

Решение. Преобразуем и оценим выражение $2 - x^2 + 4x =$

$= -x^2 + 4x - 4 + 6 = -(x-2)^2 + 6 \leqslant 6$ для $x \in \boldsymbol{R}$.

Так как функция $y = \left(\sqrt{3}\right)^t$ возрастает на области определения, то

$\left(\sqrt{3}\right)^{2-x^2+4x} \leqslant \left(\sqrt{3}\right)^6;$ $\quad y \leqslant \left(\sqrt{3}\right)^6;$ $\quad y \leqslant 27.$

Наибольшим значением данной функции является число 27.

1. Верно ли, что при любом значении a $(a > 0,\ a \neq 1)$ график показательной функции $y = a^x$ проходит через точку $A(0;\ 1)$?

2. На основании какого свойства показательной функции можно утверждать, что:

а) $\left(\frac{5}{7}\right)^{7,8} > \left(\frac{5}{7}\right)^{9,2}$; б) $1,2^{4,6} > 1,2^{3,4}$?

2.4. Из данных функций выберите все показательные функции:

а) $y = x^4$; б) $y = \sqrt{x-5}$; в) $y = \frac{8}{x}$;

г) $y = 5^x$; д) $y = 2x$; е) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

2.5. Показательная функция задана формулой $f(x) = 5^x$. Найдите:

а) $f(1)$; б) $f(3)$; в) $f(0)$;

г) $f(-1)$; д) $f\left(\frac{1}{2}\right)$; е) $f\left(\log_5 7\right)$.

2.6. Известно, что $g(x) = 0,25^x$. Сравните значения выражений:

а) $g(-2)$ и $3g(0)$; б) $g(1) + g(-3)$ и $g(\log_4 3)$.

Рис. 11

2.7. Выберите функцию, графика которой нет на рисунке 11:

а) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; б) $y = 3^x$;

в) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; г) $y = 0{,}2^x$.

2.8. Постройте график функции:

а) $y = 2^x$; б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

2.9. Принадлежит ли графику функции $y = 2^x$ точка:

а) $A(2;\ 32)$; б) $B(-3;\ 0{,}125)$;

в) $C\left(\frac{1}{2};\ \sqrt{2}\right)$; г) $D(\log_2 15; 15)$?

2.10. Из данных точек выберите точки, принадлежащие графику функции $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x$:

а) $A(0;\ 1)$; б) $B(-1;\ 7)$; в) $C(-2;\ -49)$;

г) $D\left(\log_{\frac{1}{7}} 5; 5\right)$; д) $E\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{7}}{7}\right)$; е) $F\left(-\frac{1}{3};\ -21\right)$.

2.11. Проходит ли график функции $y = \left(\sqrt{5}\right)^x$ через точку A, если:

а) $A(0;\ 1)$; б) $A(2;\ 5)$; в) $A\left(-4;\ -\frac{1}{25}\right)$;

г) $A\left(\frac{1}{2};\ \sqrt[4]{5}\right)$; д) $A\left(3;\ 5\sqrt{5}\right)$; е) $A\left(\log_5 9;\ 3\right)$?

2.12. Постройте график функции:

а) $y = 2^{-x}$; б) $y = 2^{2x}$; в) $y = \left(\sqrt{3}\right)^{-2x}$; г) $y = 81 \cdot 3^{x-4}$.

2.13. Определите, возрастающей или убывающей является показательная функция:

а) $y = 1{,}3^x$; б) $y = \left(\frac{1}{8}\right)^x$; в) $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$;

г) $y = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^x$; д) $y = \left(\sqrt{10} - 3\right)^x$; е) $y = \left(\sqrt[4]{5}\right)^x$.

2.14. Пользуясь свойствами показательной функции, сравните значения выражений:

а) 2^{-9} и $2^{-6{,}7}$; б) $4^{-1{,}2}$ и $4^{0{,}01}$; в) $\left(\frac{1}{3}\right)^0$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^{-0{,}2}$;

г) $5^{\sqrt{3}}$ и $5^{1{,}7}$; д) $0{,}2^{-\sqrt{5}}$ и $0{,}2^{-2{,}5}$.

2.15. Сравните значения $y_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$; $y_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1,5}$; $y_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1}$; $y_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{0,7}$ показательной функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ и расположите их в порядке возрастания.

2.16. Сравните m и n, если:

а) $0,8^m > 0,8^n$; б) $7,1^m < 7,1^n$; в) $\left(\frac{1}{3}\right)^m < \left(\frac{1}{3}\right)^n$;

г) $\left(\sqrt{2}\right)^m > \left(\sqrt{2}\right)^n$; д) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^m < \left(\sqrt[3]{5}\right)^n$; е) $0,1^m > 0,1^n$.

2.17. Используйте свойства показательной функции и сравните значение числового выражения с единицей:

а) $4^{-1,7}$; б) $\left(\sqrt{3}\right)^{1,2}$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{4,5}$; г) $1,7^{-\frac{1}{5}}$; д) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\sqrt{3}}$.

2.18. Найдите, при каком значении a график функции $y = a^x$ проходит через точку:

а) $P(1;\ 2)$; б) $B(-2;\ 4)$; в) $K\left(-3;\ \frac{1}{27}\right)$.

2.19. На рисунке 12 изображены графики функций вида $y = a^x$. Определите a для каждой из них.

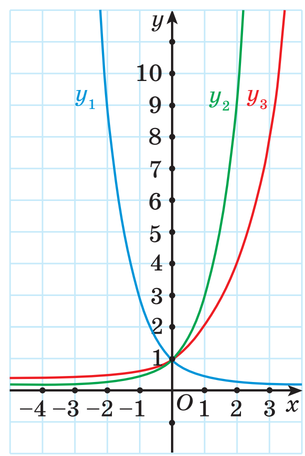


Рис. 12

2.20. В одной системе координат постройте графики функций:

а) $y = 3^x$; б) $y = 3^{x-2}$; в) $y = 3^x + 4$.

2.21. Определите, пересекает ли график функции $y = 3^x$ прямую:

а) $x = 3$; б) $y = 2$; в) $x = -15$;
г) $y = 34$; д) $x = -57,2$; е) $y = -6$.

2.22. Постройте график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} - 2$ и опишите ее свойства.

2.23. График функции $y = f(x)$ получен из графика функции $g(x) = \left(\sqrt{3}\right)^x$ сдвигом его на 4 единицы влево вдоль оси абсцисс и на 2 единицы вниз вдоль оси ординат. Найдите ординату точки пересечения графика функции $y = f(x)$ и прямой $x = -6$.

2.24. Найдите множество значений функции:

а) $y = 5^x - 8$; б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$; в) $y = 7^{x-9} - 2$;

г) $y = -4^x$; д) $y = -\left(\frac{2}{5}\right)^{x+2} + 7$; е) $y = -0,3^{x-6} - 3$.

2.25. Найдите ординату точки пересечения графика функции с осью ординат:

а) $y = 4^x - 3$; б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} + 1$; в) $y = 5^{x+1} - 6$.

2.26. Выберите последовательность действий и найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $y = 2^x$ на отрезке $[-2; 3]$; б) $y = 3^{-x}$ на отрезке $[-1; 2]$.

2.27*. Используйте свойства тригонометрических и показательной функций и найдите наибольшее и наименьшее значения функции на $\boldsymbol{R}$:

а) $y = 5^{\sin x}$; б) $y = \left(\frac{1}{7}\right)^{\cos x}$; в) $y = 4^{\sin x + 2}$;

г) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\cos x - 1}$; д) $y = 3^{\sin x} - 4$; е) $y = \left(\frac{1}{6}\right)^{\cos x} + 5$.

2.28*. Постройте график функции:

а) $y = 3^{|x|}$; б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}$; в) $y = \left|3^x - 2\right|$; г) $y = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} - 4\right|$.

2.29*. Найдите множество значений функции:

а) $y = 6^{|x|}$; б) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{|x|} - 2$; в) $y = 4^{x^2+3}$; г) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{(x-2)^2-3}$.

2.30*. Выясните, какие из данных функций являются четными, какие — нечетными, а какие не являются ни четными, ни нечетными:

а) $y = 5^x + 5^{-x}$; б) $y = 3^x - 3^{-x}$; в) $y = 7^{|x|} + 6$; г) $y = 2^{|x-8|}$.

2.31*. Найдите множество значений функции:

а) $y = 5^{\sqrt{1-x^2}}$; б) $y = 2^{\sqrt{8+2x-x^2}}$.

2.32*. Схематически изобразите график функции:

а) $y = 2^{x-|x|}$; б) $y = 0{,}5^{\frac{x^2}{|x|}}$.

2.33. Показательная функция задана формулой $f(x) = 2^x$. Найдите:

а) $f(1)$; б) $f(5)$; в) $f(0)$; г) $f(-1)$;

д) $f(-3)$; е) $f\left(\frac{1}{2}\right)$; ж) $f(\log_2 5)$; з) $f(\log_{0,5} 3)$.

2.34. Известно, что $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Сравните значения выражений:

а) $g(4)$ и $7g(0)$; б) $g(-1) + g(-2)$ и $g(\log_3 2)$.

2.35. Постройте график функции:

а) $y = 3^x$; б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

2.36. Проходит ли график функции $y = 3^x$ через точку:

а) $A\left(-2; \frac{1}{9}\right)$; б) $B(4; 81)$; в) $C\left(\frac{1}{2}; \sqrt{3}\right)$; г) $D(\log_3 8; 8)$?

2.37. Среди рисунков 13, *а—г* выберите тот, на котором изображен график функции $y = a^x$, где $0 < a < 1$.

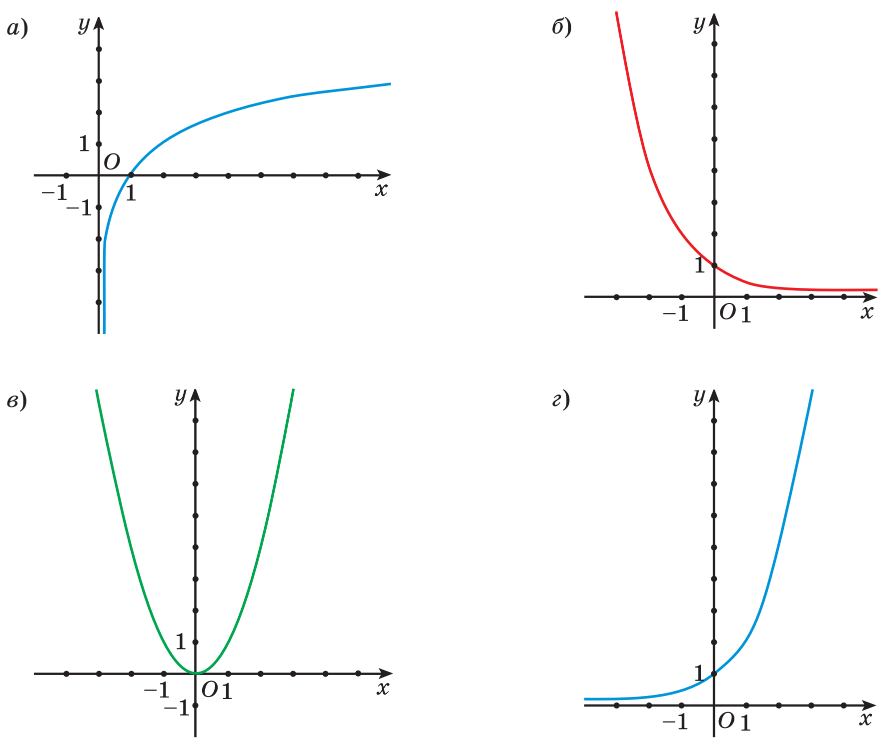


Рис. 13

2.38. Из данных точек выберите точки, принадлежащие графику функции $y = \left(\frac{1}{9}\right)^x$:

а) $A(0; 1)$; б) $B(-1; -9)$; в) $C(-2; 81)$;

г) $D\left(\log_{\frac{1}{9}} 7; 7\right)$; д) $E\left(\frac{1}{2}; 3\right)$; е) $P(\log_9 7; 7)$.

2.39. Выполните преобразование формулы и постройте график функции:

а) $y = 3^{-x}$; б) $y = 8 \cdot 2^{x-3}$.

2.40. Определите, возрастающей или убывающей является показательная функция:

а) $y = \left(\frac{2}{7}\right)^x$; б) $y = 5^x$; в) $y = 3{,}2^x$;

г) $y = 0{,}07^x$; д) $y = \left(\sqrt{5}\right)^x$; е) $y = \left(3 - \sqrt{2}\right)^x$.

2.41. Пользуясь свойствами показательной функции, сравните значения выражений:

а) $3^{8,1}$ и $3^{8,01}$; б) $0{,}2^{-1,3}$ и $0{,}2^{0,5}$; в) $\left(\frac{1}{3}\right)^0$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^{1,2}$; г) $7^{\sqrt{2}}$ и $7^{1,4}$.

2.42. Сравните значения $y_1 = 2^{\sqrt{3}}$; $y_2 = 2^{1,8}$; $y_3 = 2^{1,5}$; $y_4 = 2^{0,99}$ показательной функции $y = 2^x$ и расположите их в порядке убывания.

2.43. Сравните m и n, если:

а) $0{,}15^m < 0{,}15^n$; б) $5{,}6^m < 5{,}6^n$;

в) $\left(\frac{1}{7}\right)^m > \left(\frac{1}{7}\right)^n$; г) $\left(\sqrt{5}\right)^m < \left(\sqrt{5}\right)^n$.

2.44. Используйте свойства показательной функции и сравните значение числового выражения с единицей:

а) $5^{-2,8}$; б) $0{,}3^{2,7}$; в) $5{,}4^{-0,6}$; г) $\left(\sqrt[4]{5}\right)^{0,2}$.

2.45. График функции $y = a^x$ проходит через точку $A(4;\ 25)$. Проходит ли этот график через точку:

а) $C(6;\ 125)$; б) $B(-6;\ 0{,}008)$?

2.46. В одной системе координат постройте графики функций:

а) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$; в) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$.

2.47. Постройте график функции $y = 2^{x-3} - 4$ и опишите ее свойства.

2.48. Найдите множество значений функции:

а) $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x - 3$; б) $y = 7^{x-2}$; в) $y = 3^{x+5} + 4$;

г) $y = -\left(\frac{2}{3}\right)^x$; д) $y = -8^{x-7} - 3$; е) $y = -10^{x+3} + 6$.

2.49. Найдите ординату точки пересечения графика функции с осью ординат:

а) $y = 6^x + 2$; б) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-3} - 5$; в) $y = 10^{x+1} + 7$.

2.50. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $y = 3^x$ на отрезке $[-2;\ 1]$; б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ на отрезке $[-3;\ 2]$.

2.51*. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на $\boldsymbol{R}$:

а) $y = 3^{\sin x}$; б) $y = \left(\frac{3}{8}\right)^{\cos x}$; в) $y = 6^{\sin x + 1}$;

г) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{\cos x - 2}$; д) $y = 2^{\sin x} - 3$; е) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\cos x} + 4$.

2.52*. Постройте график функции:

а) $y = 2^{|x|}$; б) $y = \left|2^x - 8\right|$.

2.53*. Найдите множество значений функции:

а) $y = 3^{|x+1|}$; б) $y = \left(\frac{1}{7}\right)^{|x|} + 2$; в) $y = 7^{x^2 - 2}$; г) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{(x+3)^2 - 1}$.

2.54*. Схематически изобразите график функции $y = 3^{x+|x|}$.

2.55. Представьте в виде степени с рациональным показателем выражение $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{a}}$.

2.56. Представьте числа 1; 25; 625; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{125}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{25}$ в виде степени с основанием 5.

2.57. Найдите значение выражения $81(1 - \cos^2 x)$, если $\sin x = \frac{5}{9}$.

2.58. Вычислите:

а) $10^{\lg 5}$; б) $\left(3^{\log_3 2}\right)^2$; в) $8^{\log_2 3}$; г) $3^{2 - \log_3 10}$;

д) $\log_{\sqrt{3}} 9$; е) $\lg 1 + \lg 100$; ж) $\lg 0{,}1 - \lg\sqrt{10}$; з) $\log_5 \lg 10$.

2.59. Найдите абсциссы точек пересечения графика функции $y = \sin x \cdot \cos\frac{\pi}{8} - \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{8}$ и прямой $y = \frac{1}{2}$.

2.60. Воспользуйтесь свойствами степени с действительным показателем и найдите значение выражения:

а) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$; б) $2^{\sqrt{5}} \cdot 2^{-\sqrt{5}}$; в) $\left(4^{2+\sqrt{3}}\right)^{2-\sqrt{3}}$; г) $3^{2-\sqrt{2}} : 3^{5-\sqrt{2}}$.

2.61. Представьте в виде произведения:

а) $5^{x+1} - 5^x$; б) $3^{x-2} + 3^x$;
в) $2^{x-1} + 2^{x-1}$; г) $10^{x+2} - 5 \cdot 10^x$.

2.62. На выборах председателя студенческого самоуправления за действующего председателя проголосовало 69 % принявших участие в голосовании. Причем «за» проголосовало 94 % студентов девушек и 41 % студентов юношей, участвовавших в голосовании. Кого среди голосовавших было больше — юношей или девушек? На сколько процентов?

2.63. Решите дробно-рациональное уравнение

$$\frac{4}{x^2-10x+25} + \frac{1}{25-x^2} = \frac{1}{x+5}.$$

Приведите пример квадратного уравнения, равносильного данному. Можно ли привести пример линейного уравнения, равносильного данному?

2.64. Найдите значение выражения

$$3\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 6\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) - 4{,}5\pi.$$

2.65. Решите неравенство:

а) $x^3 - 7x^2 + 6x \leqslant 0$; б) $\dfrac{x^2-13x+30}{x^2-4x+3} \geqslant 0$.

2.66. Функция $y = f(x)$ задана графиком на отрезке $[-4; 7]$ (рис. 14). Пользуясь графиком, найдите:

а) множество значений функции;
б) нули функции;
в) промежутки знакопостоянства функции;
г) промежутки монотонности функции;
д) количество целых решений неравенства $f(x) > 1$;
е) число корней уравнения $f(x) = \dfrac{x}{6}$.

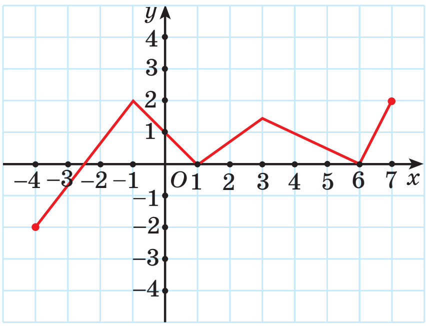


Рис. 14

2.67. Решите однородное уравнение

$$\sin^2 x + 14\sin x \cos x = 15\cos^2 x.$$

2.68. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 6, \\ x^2 + 11y = 92; \end{cases}$ б)* $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21, \\ y^2 - 2xy + 15 = 0. \end{cases}$

2.69. Тело движется по закону $x(t) = t^2 + 9t + 12$ (x измеряется в метрах, t — в секундах). Найдите скорость тела через 2 с после начала движения.

2.70. Решите уравнение $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2x+6} = x + 3$.

§ 5. Показательные уравнения

2.71. Представьте в виде степени с основанием 2 число:

а) 16; б) $\frac{1}{2}$; в) $\sqrt{2}$; г) 1.

2.72. Упростите выражение:

а) $\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot 2^{-3}$; б) $\frac{4 \cdot 0{,}25^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{32}}$; в) $\frac{8 \cdot 2^{-3} \cdot \sqrt{8}}{128^{0{,}25}}$.

2.73. Представьте число 5 в виде степени с основанием:

а) 2; б) $\frac{1}{2}$; в) 0,7; г) π.

При изучении процесса радиоактивного распада вещества рассматривают функцию $m(t) = m_0 e^{-kt}$, где m — масса радиоактивного вещества в момент времени t, m_0 — его масса в начальный момент времени, k — постоянная величина, e — бесконечная непериодическая десятичная дробь, ее приближенное значение равно 2,71828.

Промежуток времени, через который масса радиоактивного вещества уменьшается в 2 раза, называется периодом полураспада T радиоактивного вещества. Зная k, можно найти T. Так как $m(T) = \frac{1}{2}m_0$, то $m_0 e^{-kT} = \frac{1}{2}m_0$, откуда $e^{-kT} = \frac{1}{2}$.

Получили уравнение, в котором переменная T находится в показателе степени, такое уравнение называется *показательным*. Многие практические задачи приводят к необходимости решения показательных уравнений.

Рассмотрим некоторые виды показательных уравнений и способы их решения.

1. Уравнение вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где $a \neq 1, a > 0$

Так как показательная функция $y = a^t$ является возрастающей при $a > 1$ или является убывающей при $0 < a < 1$, то из равенства значений функций $a^{t_1} = a^{t_2}$ следует равенство значений аргументов $t_1 = t_2$. Справедливо и обратное: если $t_1 = t_2$, то $a^{t_1} = a^{t_2}$.