2.69. Тело движется по закону $x(t) = t^2 + 9t + 12$ (x измеряется в метрах, t — в секундах). Найдите скорость тела через 2 с после начала движения.

2.70. Решите уравнение $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2x+6} = x + 3$.

§ 5. Показательные уравнения

2.71. Представьте в виде степени с основанием 2 число:

а) 16; б) $\frac{1}{2}$; в) $\sqrt{2}$; г) 1.

2.72. Упростите выражение:

а) $\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot 2^{-3}$; б) $\frac{4 \cdot 0{,}25^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{32}}$; в) $\frac{8 \cdot 2^{-3} \cdot \sqrt{8}}{128^{0{,}25}}$.

2.73. Представьте число 5 в виде степени с основанием:

а) 2; б) $\frac{1}{2}$; в) 0,7; г) π.

При изучении процесса радиоактивного распада вещества рассматривают функцию $m(t) = m_0 e^{-kt}$, где m — масса радиоактивного вещества в момент времени t, m_0 — его масса в начальный момент времени, k — постоянная величина, e — бесконечная непериодическая десятичная дробь, ее приближенное значение равно 2,71828.

Промежуток времени, через который масса радиоактивного вещества уменьшается в 2 раза, называется периодом полураспада T радиоактивного вещества. Зная k, можно найти T. Так как $m(T) = \frac{1}{2}m_0$, то $m_0 e^{-kT} = \frac{1}{2}m_0$, откуда $e^{-kT} = \frac{1}{2}$.

Получили уравнение, в котором переменная T находится в показателе степени, такое уравнение называется *показательным*. Многие практические задачи приводят к необходимости решения показательных уравнений.

Рассмотрим некоторые виды показательных уравнений и способы их решения.

1. Уравнение вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где $a \neq 1, a > 0$

Так как показательная функция $y = a^t$ является возрастающей при $a > 1$ или является убывающей при $0 < a < 1$, то из равенства значений функций $a^{t_1} = a^{t_2}$ следует равенство значений аргументов $t_1 = t_2$. Справедливо и обратное: если $t_1 = t_2$, то $a^{t_1} = a^{t_2}$.

Следовательно, уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где $a \neq 1$, $a > 0$, равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

$$a^{f(x)} = a^{g(x)},\ a \neq 1,\ a > 0$$
$$\Updownarrow$$
$$f(x) = g(x)$$

Пример 1. Решите уравнение:

а) $5^{x-2} = 5^{3x+4}$; б) $3^{2x} = 81$; в) $2^x = 5$.

Решение. а) $5^{x-2} = 5^{3x+4} \Leftrightarrow x - 2 = 3x + 4 \Leftrightarrow -2x = 6 \Leftrightarrow x = -3$.

Ответ: -3.

б) Представим число 81 в виде степени с основанием 3 и получим: $81 = 3^4$. Тогда данное уравнение примет вид $3^{2x} = 3^4$, отсюда $2x = 4$; $x = 2$.

Ответ: 2.

в) Представим число 5 в виде степени с основанием 2. По основному логарифмическому тождеству получим: $5 = 2^{\log_2 5}$. Тогда данное уравнение примет вид: $2^x = 2^{\log_2 5}$, значит, $x = \log_2 5$.

Ответ: $\log_2 5$.

2. Уравнения, в которых можно выполнить замену переменной

Показательные уравнения, которые можно привести, например, к виду $af^2(x) + bf(x) + c = 0$, где a, b, c — некоторые действительные числа, $a \neq 0$, $f(x)$ — показательная функция, можно решать методом замены переменной.

Пример 2. Решите уравнение $8^{2x} - 6 \cdot 8^x + 5 = 0$.

Решение. Введем новую переменную $t = 8^x$, тогда данное уравнение можно записать в виде $t^2 - 6t + 5 = 0$. Корни этого квадратного уравнения
$$\left[\begin{array}{l} t = 5, \\ t = 1. \end{array}\right.$$

Подставим найденные значения t в равенство $t = 8^x$ и получим:

$$\left[\begin{array}{l} 8^x = 5, \\ 8^x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8^x = 8^{\log_8 5}, \\ 8^x = 8^0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_8 5, \\ x = 0. \end{array}\right.$$

Ответ: 0; $\log_8 5$.

3. Однородные уравнения

Пример 3. Решите уравнение:

а) $7^{x-3} = 2^{x-3}$; б) $3^{2x} - 2 \cdot 6^x - 3 \cdot 2^{2x} = 0$.

Решение. а) Уравнение $7^{x-3} = 2^{x-3}$ является однородным уравнением первой степени. Разделим обе части уравнения на выражение 2^{x-3}:

$$7^{x-3} = 2^{x-3} \Leftrightarrow \frac{7^{x-3}}{2^{x-3}} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{2}\right)^{x-3} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{2}\right)^{x-3} = \left(\frac{7}{2}\right)^{0} \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Ответ: 3.

б) Уравнение $3^{2x} - 2 \cdot 6^x - 3 \cdot 2^{2x} = 0$ является однородным уравнением второй степени. Представим выражение 6^x в виде $6^x = 3^x \cdot 2^x$. Разделим обе части уравнения на выражение 2^{2x}:

$$3^{2x} - 2 \cdot 3^x \cdot 2^x - 3 \cdot 2^{2x} = 0 \Leftrightarrow \frac{3^{2x}}{2^{2x}} - \frac{2 \cdot 3^x \cdot 2^x}{2^{2x}} - 3 \cdot \frac{2^{2x}}{2^{2x}} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 2\left(\frac{3}{2}\right)^{x} - 3 = 0.$$

Введем новую переменную $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, тогда данное уравнение можно записать в виде $t^2 - 2t - 3 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $\left[\begin{array}{l} t = 3, \\ t = -1. \end{array}\right.$ Подставим найденные значения t в равенство $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ и получим:

$$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^x = 3, \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_{\frac{3}{2}} 3, \\ x \in \varnothing. \end{array}\right.$$

Ответ: $\log_{\frac{3}{2}} 3$.

4*. Уравнения, при решении которых применяются свойства функций

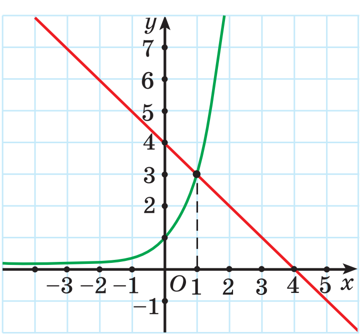

Рис. 15

Пример 4. Решите уравнение $3^x = 4 - x$.

Решение. Показательная функция $y = 3^x$ возрастает на множестве действительных чисел, так как основание $a = 3 > 1$ (рис. 15). Линейная функция $y = 4 - x$ убывает на множестве действительных чисел, так как $k = -1 < 0$. Поэтому, если уравнение $3^x = 4 - x$ имеет корень, то он единственный. Очевидно, что число 1 удовлетворяет данному уравнению. Число 1 является единственным корнем данного уравнения.

Ответ: 1.

Примеры основных заданий и их решения

1. Решите уравнение:

а) $2^x = \frac{1}{2}$; б) $\left(\frac{4}{5}\right)^x = 1{,}25$; в) $3^x = -2$; г) $\left(\sqrt{3}\right)^x = 1$;

д) $7^{2x} = 11$; е) $8^x = 2$; ж) $9^{x+7} = \frac{1}{27}$; з) $0{,}2^{4x-1} = 25$.

Решение. а) $2^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2^x = 2^{-1} \Leftrightarrow x = -1.$

Ответ: –1.

б) $\left(\frac{4}{5}\right)^x = 1{,}25 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^x = \left(\frac{4}{5}\right)^{-1} \Leftrightarrow x = -1.$

Ответ: –1.

в) $3^x = -2$, так как множеством значений функции $y = 3^x$ является множество положительных чисел, то уравнение корней не имеет.

Ответ: $\varnothing$.

г) $\left(\sqrt{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Ответ: 0.

д) $7^{2x} = 11 \Leftrightarrow 7^{2x} = 7^{\log_7 11} \Leftrightarrow 2x = \log_7 11 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\log_7 11.$

Ответ: $\frac{1}{2}\log_7 11$.

е) $8^x = 2 \Leftrightarrow \left(2^3\right)^x = 2 \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^1 \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

ж) $9^{x+7} = \frac{1}{27} \Leftrightarrow \left(3^2\right)^{x+7} = 3^{-3} \Leftrightarrow 3^{2x+14} = 3^{-3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x + 14 = -3 \Leftrightarrow 2x = -17 \Leftrightarrow x = -8{,}5.$

Ответ: –8,5.

з) $0{,}2^{4x-1} = 25 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{4x-1} = 25 \Leftrightarrow \left(5^{-1}\right)^{4x-1} = 5^2 \Leftrightarrow 5^{-4x+1} = 5^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4x + 1 = 2 \Leftrightarrow -4x = 1 \Leftrightarrow x = -0{,}25.$

Ответ: –0,25.

2. Решите уравнение:

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+x^2} = \frac{1}{4}$; б) $(0{,}4)^{\frac{3x-1}{5}} = (2{,}5)^{x+1}$; в) $0{,}01^{x+6} = \sqrt{10^{2x-7}}$;

г) $(0{,}25)^{-x} = \frac{1}{\sqrt[3]{4^{3x-1}}}$; д) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2} \cdot 3^{2x+5} = 27^{-1}$; е) $12^{x-2} = 3^{3x} \cdot 2^{6x}$.

Решение. а) Представим число $\frac{1}{4}$ в виде степени с основанием $\frac{1}{2}$ и получим: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+x^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, тогда $x + x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Ответ: -2; 1.

б) $(0{,}4)^{\frac{3x-1}{5}} = (2{,}5)^{x+1}$; $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3x-1}{5}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{x+1}$; $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3x-1}{5}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-x-1}$;

$\frac{3x-1}{5} = -x - 1$; $3x - 1 = -5x - 5$; $8x = -4$; $x = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $-0{,}5$.

в) $0{,}01^{x+6} = \sqrt{10^{2x-7}}$; $(10^{-2})^{x+6} = (10^{2x-7})^{\frac{1}{2}}$;

$10^{-2x-12} = 10^{\frac{2x-7}{2}}$; $-2x - 12 = \frac{2x-7}{2}$;

$-4x - 24 = 2x - 7$; $-6x = 17$; $x = -2\frac{5}{6}$.

Ответ: $-2\frac{5}{6}$.

г) $(0{,}25)^{-x} = \frac{1}{\sqrt[3]{4^{3x-1}}}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{-x} = \frac{1}{4^{\frac{3x-1}{3}}}$; $4^x = 4^{-\frac{3x-1}{3}}$;

$x = -\frac{3x-1}{3}$; $3x = -3x + 1$; $x = \frac{1}{6}$.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

д) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2} \cdot 3^{2x+5} = 27^{-1}$; $3^{-x^2} \cdot 3^{2x+5} = 3^{-3}$; $3^{-x^2+2x+5} = 3^{-3}$;

$-x^2 + 2x + 5 = -3$; $x^2 - 2x - 8 = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = -2. \end{array}\right.$

Ответ: -2; 4.

е) $12^{x-2} = 3^{3x} \cdot 2^{6x}$; $12^{x-2} = 3^{3x} \cdot 4^{3x}$; $12^{x-2} = 12^{3x}$; $x - 2 = 3x$; $x = -1$.

Ответ: -1.

3. Решите уравнение:

а) $3^{x+2} - 3^x = 72$; б) $7 \cdot 5^x + 90 = 5^{x+2}$.

Решение. а) $3^{x+2} - 3^x = 72$; $3^x \cdot 3^2 - 3^x = 72$; $3^x \cdot (3^2 - 1) = 72$; $3^x \cdot 8 = 72$; $3^x = 9$; $x = 2$.

Ответ: 2.

б) $7 \cdot 5^x + 90 = 5^{x+2}$; $5^{x+2} - 7 \cdot 5^x = 90$; $5^x \cdot 5^2 - 7 \cdot 5^x = 90$; $5^x \cdot (5^2 - 7) = 90$; $5^x \cdot (25 - 7) = 90$; $5^x \cdot 18 = 90$; $5^x = 5$; $x = 1$.

Ответ: 1.

4. Решите уравнение, выполнив замену переменной:

а) $16^x + 4^x = 20$; б) $2 \cdot 3^{x+2} - 6 \cdot 9^x = 12$;

в) $9 - 2^x = 2^{3-x}$; г)* $2 \cdot 4^{1+\sin x} + 4^{1-\sin x} = 33$.

Решение. а) $16^x + 4^x = 20$; $4^{2x} + 4^x - 20 = 0$, пусть $4^x = t$, тогда $t^2 + t - 20 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = -5, \\ t = 4. \end{array}\right.$

Так как $t > 0$, то $4^x = 4$; $x = 1$.

Ответ: 1.

б) $2 \cdot 3^{x+2} - 6 \cdot 9^x = 12 \Leftrightarrow 2 \cdot 3^x \cdot 9 - 6 \cdot 9^x - 12 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 18 \cdot 3^x - 6 \cdot 9^x - 12 = 0 \Leftrightarrow 9^x - 3 \cdot 3^x + 2 = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - 3 \cdot 3^x + 2 = 0$.

Введем новую переменную $3^x = t$, получим уравнение $t^2 - 3t + 2 = 0$, его корни $\left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = 2. \end{array}\right.$

Подставим найденные значения t в равенство $3^x = t$, получим:

$$\left[\begin{array}{l} 3^x = 1, \\ 3^x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 3^0, \\ 3^x = 3^{\log_3 2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = \log_3 2. \end{array}\right.$$

Ответ: 0; $\log_3 2$.

в) $9 - 2^x = 2^{3-x}$; $9 - 2^x = \frac{8}{2^x}$; пусть $2^x = t$, тогда $9 - t = \frac{8}{t}$; $t^2 - 9t + 8 = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} t = 8, \\ t = 1; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} 2^x = 8, \\ 2^x = 1; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = 0. \end{array}\right.$$

Ответ: 0; 3.

г)* $2 \cdot 4^{1+\sin x} + 4^{1-\sin x} = 33 \Leftrightarrow 8 \cdot 4^{\sin x} + \frac{4}{4^{\sin x}} - 33 = 0.$

Введем новую переменную $t = 4^{\sin x}$, получим уравнение

$$8 \cdot t + \frac{4}{t} - 33 = 0;\ 8t^2 - 33t + 4 = 0; \left[\begin{array}{l} t = 4, \\ t = \frac{1}{8}. \end{array}\right.$$

Подставим найденные значения t в равенство $t = 4^{\sin x}$, получим

$$\left[\begin{array}{l} 4^{\sin x} = 4, \\ 4^{\sin x} = \frac{1}{8} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1, \\ \sin x = -1{,}5 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

5. Решите уравнение:

а) $3^{1-x} = 5^{x-1}$; б) $3 \cdot 5^{2x+1} - 2 \cdot 10^{x+1} + 5 \cdot 2^{2x} = 0$.

Решение. а) *Первый способ.* $3^{1-x} = 5^{x-1} \Leftrightarrow 3^{1-x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{1-x}$.

Полученное уравнение является однородным уравнением первой степени. Разделим обе части уравнения на $\left(\frac{1}{5}\right)^{1-x}$:

$$3^{1-x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{1-x} \Leftrightarrow 15^{1-x} = 1 \Leftrightarrow 15^{1-x} = 15^0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Ответ: 1.

Второй способ. Функцию $y = 3^{1-x}$ можно представить в виде $y = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Данная функция убывает на $\boldsymbol{R}$. Функцию $y = 5^{x-1}$ можно представить в виде $y = \frac{1}{5} \cdot 5^x$. Данная функция возрастает на $\boldsymbol{R}$, поэтому, если уравнение $3^{1-x} = 5^{x-1}$ имеет корень, то он единственный. Очевидно, что число 1 удовлетворяет данному уравнению, следовательно, $x = 1$ — единственный корень данного уравнения.

Ответ: 1.

б) $3 \cdot 5^{2x+1} - 2 \cdot 10^{x+1} + 5 \cdot 2^{2x} = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 5 \cdot 5^{2x} - 2 \cdot 10 \cdot 10^x + 5 \cdot 2^{2x} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 \cdot 5^{2x} - 4 \cdot 2^x \cdot 5^x + 2^{2x} = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{5^{2x}}{2^{2x}} - 4 \cdot \frac{2^x \cdot 5^x}{2^{2x}} + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x + 1 = 0.$

Введем новую переменную $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x$, получим уравнение $3t^2 - 4t + 1 = 0$. Его корни: $\left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = \frac{1}{3}. \end{array}\right.$

Подставим найденные значения t в равенство $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x$, получим:

$$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{5}{2}\right)^x = 1, \\ \left(\frac{5}{2}\right)^x = \frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = \log_{2,5} \frac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Ответ: 0; $\log_{2,5} \frac{1}{3}$.

6. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^{4x-y} = 9, \\ 6^{9x-y} = \sqrt[4]{6}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5^{-x} \cdot 25^{x+y} = 5, \\ y^2 - x = -2; \end{cases}$ в)* $\begin{cases} 2^{\frac{x+y}{4}} + 2^{\frac{x+y}{2}} = 6; \\ 2^x + 2^y = 17. \end{cases}$

Решение.

а) $\begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^{4x-y} = 9, \\ 6^{9x-y} = \sqrt[4]{6}; \end{cases}$ $\begin{cases} 3^{-4x+y} = 3^2, \\ 6^{9x-y} = 6^{\frac{1}{4}}; \end{cases}$ $\begin{cases} -4x + y = 2, \\ 9x - y = \frac{1}{4}; \end{cases}$ $\begin{cases} 5x = 2\frac{1}{4}, \\ -4x + y = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{9}{20}, \\ y = 3,8. \end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{9}{20}; 3,8\right)$.

б) $\begin{cases} 5^{-x} \cdot 25^{x+y} = 5, \\ y^2 - x = -2; \end{cases}$ $\begin{cases} 5^{-x} \cdot 5^{2x+2y} = 5, \\ y^2 - x = -2; \end{cases}$ $\begin{cases} 5^{x+2y} = 5, \\ y^2 - x = -2; \end{cases}$ $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ y^2 - x = -2; \end{cases}$

$\begin{cases} x = 1 - 2y, \\ y^2 - x = -2; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 - 2y, \\ y^2 + 2y + 1 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 - 2y, \\ (y+1)^2 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3, \\ y = -1. \end{cases}$

Ответ: (3; –1).

в)* Пусть $2^{\frac{x+y}{4}} = t$. Тогда первое уравнение системы примет вид $t + t^2 = 6$. Решим его: $t + t^2 = 6$; $t^2 + t - 6 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = 2, \\ t = -3. \end{array}\right.$

Так как $t > 0$, то $t = 2$, значит, $2^{\frac{x+y}{4}} = 2$; $\frac{x+y}{4} = 1$; $x + y = 4$.

Тогда $\begin{cases} x + y = 4, \\ 2^x + 2^y = 17; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 4 - x, \\ 2^x + 2^y = 17; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 4 - x, \\ 2^x + 2^{4-x} = 17; \end{cases}$

$\begin{cases} y = 4 - x, \\ 2^x + \frac{16}{2^x} = 17; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 4 - x, \\ 2^{2x} - 17 \cdot 2^x + 16 = 0. \end{cases}$

Решим второе уравнение системы: $2^{2x} - 17 \cdot 2^x + 16 = 0$. Пусть $2^x = t$, тогда получим уравнение $t^2 - 17t + 16 = 0$, корнями которого являются числа $t = 1$ и $t = 16$. Откуда:

$\begin{cases} y = 4 - x, \\ \left[\begin{array}{l} 2^x = 1, \\ 2^x = 16; \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} y = 4 - x, \\ \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 4; \end{array}\right. \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y = 4, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4, \\ y = 0. \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: (0; 4); (4; 0).

7*. Решите уравнение:

а) $2^x + 3^x + 4^x = 9$; б) $2^x + 5^x = 7^x$.

Решение. а) Функция $y = 2^x + 3^x + 4^x$ возрастает на множестве действительных чисел как сумма трех возрастающих функций, значит, значение $y = 9$ данная функция может принимать не более, чем в одной точке.

Таким образом, исходное уравнение имеет не более одного корня.

При $x = 1$ данное уравнение обращается в верное числовое равенство, т. е. 1 — единственный корень данного уравнения.

Ответ: 1.

б) Разделим обе части уравнения на 7^x и получим уравнение $\left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x = 1.$

Функция $y = \left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x$ убывает на множестве действительных чисел как сумма двух убывающих функций, значит, значение $y = 1$ данная функция может принимать не более, чем в одной точке.

Таким образом, исходное уравнение имеет не более одного корня.

При $x = 1$ данное уравнение обращается в верное числовое равенство, т. е. 1 — единственный корень данного уравнения.
Ответ: 1.

8*. Найдите произведение корней уравнения

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-4x+4} + \left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-4x+4} = 4.$$

Решение. Так как $\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right) = 1,$ то $\left(2-\sqrt{3}\right) = \frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)} =$ $= \left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$, тогда исходное уравнение принимает вид

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{-(x^2-4x+4)} + \left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-4x+4} = 4.$$

Выполним замену переменной и решим полученное уравнение.

Пусть $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-4x+4} = t,\ t > 0,$ тогда $\frac{1}{t} + t = 4;\ t^2 - 4t + 1 = 0;$

$D = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 12,$ $\left[\begin{array}{l} t = 2+\sqrt{3}, \\ t = 2-\sqrt{3}. \end{array}\right.$

Откуда: $\left[\begin{array}{l}\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-4x+4}=2+\sqrt{3},\\ \left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-4x+4}=2-\sqrt{3};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-4x+4}=2+\sqrt{3},\\ \left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-4x+4}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1};\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x^2-4x+4=1,\\ x^2-4x+4=-1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x^2-4x+3=0,\\ x^2-4x+5=0.\end{array}\right.$

Второе уравнение совокупности не имеет корней ($D < 0$), а произведение корней первого уравнения равно 3.

Ответ: 3.

1. Существует ли значение x, при котором:

а) $5^x = 5$; б) $5^x = 1$; в) $5^x = 2$; г) $5^x = -2$?

2. Найдите, если возможно, значения x, при которых:

а) $3^x = 0$; б) $3^x = 1$; в) $3^x = -3$; г) $3^x = \frac{1}{3}$.

2.74. Решите показательное уравнение:

а) $6^x = 36$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$; в) $7^x = \sqrt{7}$; г) $125^x = 5$;

д) $0{,}5^x = 2$; е) $7^x = -5$; ж) $3^x = 1$; з) $5^x = 3$;

и) $10^x = 7$; к) $\left(\sqrt{5}\right)^x = 5$; л) $\left(\sqrt[7]{11}\right)^x = 11$; м) $0{,}01^x = 10$.

2.75. Определите вид уравнения и решите его:

а) $2^{5x-4} = 32$; б) $7^{4x+9} = \frac{1}{49}$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{5x-7} = \frac{1}{8}$;

г) $7^{-0{,}1x+2} = 1$; д) $8^{2x+1} = 2$; е) $81^{5x-4} = \frac{1}{27}$.

2.76. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций:

а) $y = \left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1}$ и $y = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-3}$; б) $y = 2^{3x-5}$ и $y = 0{,}5^{11-x}$;

в) $y = (0{,}2)^{\frac{2x+1}{3}}$ и $y = 5^{x-2}$; г) $y = 8^{\frac{2x-1}{3}}$ и $y = 0{,}125^{3+x}$.

2.77. Решите уравнение:

а) $7^{x^2-x}-49=0$; б) $3^{x^2-15}-3=0$; в) $5^{x^2+1}-125=0$;

г) $2^{x^2+7x}-1=0$; д) $5^{9-x^2}-0{,}04=0$; е) $10^{x^2+x}-\sqrt{10}=0$.

2.78. Найдите нули функции:

а) $y=\left(\frac{1}{125}\right)^{2x+1}-25^{4x-3}$; б) $y=\left(\sqrt{3}\right)^{4x+1}-27^{x}$;

в) $y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{3x-5}-2\sqrt{2}$; г) $y=\sqrt[4]{27^{2-x}}-\frac{9}{\sqrt[5]{3}}$.

2.79. Решите уравнение:

а) $5^{2x}=3$; б) $2^{x-4}=5$; в) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5-x}=2$; г) $10^{3-x}=7$.

2.80. Найдите абсциссы точек пересечения графика функции:

а) $y=\left(\sqrt{2}\right)^{x^2-7}$ и прямой $y=\frac{1}{8}$; б) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-6x+6}$ и прямой $y=9$;

в) $y=5^{x^2-5x+6}$ и прямой $y=1$; г) $y=\left(5^{1-x}\right)^{x+1}$ и прямой $y=0{,}008$.

2.81. Приведите левую и правую части уравнения к степеням с одинаковыми основаниями и решите его:

а) $3^{3x^2+2x}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$; б) $6^{2x^2+3x}=\left(\frac{1}{36}\right)^{x+1}$; в) $\left(\frac{1}{125}\right)^{\frac{2x^2}{3}}=25^{-x-6}$;

г)* $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{x^2-6x+4}=\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}-1\right)^{x}$.

2.82. Решите уравнение:

а) $0{,}2^{\sqrt{2x-3}}=0{,}04$; б) $(3{,}24)^{2\sqrt{x}-5}=\left(\frac{5}{9}\right)^{5\sqrt{x}-3}$; в) $3^{\sqrt{4x-7}}=\frac{1}{3^{2x-11}}$.

2.83. Найдите абсциссу точки пересечения графика функции:

а) $y=8^{-3}\cdot 4^{x+1}$ и прямой $y=4$;

б) $y=\sqrt{5}\cdot 5^{3x}$ и прямой $y=\frac{1}{5}$;

в) $y=3^{x}:9^{x+1}$ и прямой $y=27$.

2.84. Используйте свойства степеней и решите уравнение:

а) $\frac{1}{8}\cdot\sqrt{2^{x-1}}=4^{-1{,}25}$; б) $2^{2x^2+5x-1}=0{,}5\sqrt[3]{0{,}25^{2x}}$;

в) $3^{\sqrt{2x-1}}\cdot 27=9^{\sqrt{2x-1}}$; г) $2^{\sqrt{1+8x+2x^2}}=8\cdot 2^{x}$.

2.85. Решите уравнение:

а) $9^{\sin x} = 3$; б) $0{,}5^{\cos x} = 2$; в) $16^{\sin x \cos x} = 4$; г) $15^{\sin x + \cos x} = 1$.

2.86. Найдите корни уравнения, используя преобразования степеней:

а) $5^x \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x = 4$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot 2^x = \frac{8}{27}$;

в) $5^{x+1} \cdot 2^{x+1} = 0{,}01$; г) $0{,}2^{x-3} \cdot 2^{x-3} = \sqrt[3]{0{,}16}$;

д) $\left(\sqrt{7}\right)^{x+2} : 3^{x+2} = \frac{7}{9}$; е) $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0{,}01 \cdot \left(10^{x-1}\right)^3$;

ж) $\frac{6^{x^2}}{2^{-15}} = \frac{3^{-15}}{6^{12-12x}}$; з) $\frac{100 \cdot 4^{x^2}}{5^{5x}} = \frac{32^x}{25^{x^2}}$.

2.87. На рисунке 16 изображен график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{kx}$. Найдите число k.

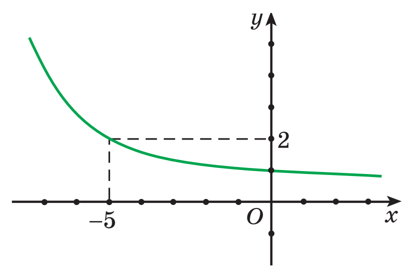

Рис. 16

2.88. Решите уравнение:

а) $5^{x+1} - 5^x = 100$;

б) $2^{x+5} - 3 = 2^{x+3}$;

в) $3^x + 2 \cdot 3^{x-3} = 29$.

2.89. Найдите абсциссы точек пересечения графика функции:

а) $y = 2^{2x-3} + 2^{2x+2}$ и прямой $y = 132$;

б) $y = 5^{x+3} + 5^{x+2} + 5^{x+1}$ и прямой $y = \frac{31}{25}$;

в) $y = 4^{5x+1} + 5 \cdot 4^{5x} - 3 \cdot 4^{5x+2}$ и прямой $y = -624$.

2.90. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2^{2x-y} = 8, \\ 7^{x-y} = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^{3x} \cdot 3^y = 3, \\ 2^{3x} \cdot 2^{-y} = 32; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \left(\sqrt{2}\right)^{x+2y} = 4, \\ 3^{-x} \cdot 27^y = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3^{x+2y} \cdot 81^y = 81, \\ y^2 - x = -13. \end{cases}$

2.91. Решите уравнение, используя метод замены переменной:

а) $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$; б) $36^x - 5 \cdot 6^x - 6 = 0$;

в) $49^x + 6 \cdot 7^x - 7 = 0$; г) $9^x - 3^x - 2 = 0$;

д) $25^x - 6 \cdot 5^x - 7 = 0$; е) $4^x - 12 \cdot 2^x + 20 = 0$.

2.92. Найдите нули функции:

а) $y = 27 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{2x} - 6 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{x} - 8$; б) $y = 36^x - 6^{x+1} - 40$;

в) $y = 2^x - 6 \cdot 2^{\frac{x}{2}} - 16$; г) $y = 16^{-x} - 2{,}25 \cdot 4^{-x} + 0{,}5$.

2.93. Найдите область определения функции:

а) $y = \dfrac{1}{3^{4x} - 7 \cdot 3^{2x} - 18}$; б) $y = \dfrac{1}{3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} - 0{,}2}$.

2.94. Решите уравнение, используя прием решения однородных уравнений:

а) $2^{x-2} = 3^{x-2}$; б) $5^{x-3} = 7^{3-x}$;

в) $2^{3x-2} = 5^{x-\frac{2}{3}}$; г) $7^{x^2-2x} = 2^{2x^2-4x}$.

2.95. Определите вид уравнения и решите его:

а) $5 \cdot 3^{2x} + 7 \cdot 15^x - 6 \cdot 5^{2x} = 0$; б) $3 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 9^x = 0$;

в) $4 \cdot 49^x - 56^x = 3 \cdot 64^x$; г) $2 \cdot 25^x - 5 \cdot 10^x + 2 \cdot 4^x = 0$.

2.96. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y = 3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x$ и $y = 5 \cdot 36^x$.

2.97. Найдите нули функции $y = 4^{x+1} - 10 \cdot 6^x + \frac{1}{4} \cdot 9^{x+1}$.

2.98. Решите уравнение, используя свойства функций:

а) $5^x = 6 - x$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x + 3$.

2.99. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций:

а) $y = 4^{x+3} - 2^{2x+2}$ и $y = 15$; б) $y = 2^{x+1} + 2^{x+2}$ и $y = 5^{x+1} + 5^x$;

в) $y = 4^{x+1} - 3^x$ и $y = 3^{x+2} - 4^x$.

2.100. Решите уравнение:

а) $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$;

б) $25^{x-1} - 9^{2x-2} + 8 \cdot 5^{2x-3} = 4 \cdot 9^{2x-3}$;

в) $\sqrt{3^{46-x}} - 7\sqrt{3^{42-x}} = 162$.

2.101. Найдите нули функции:

а) $y = 8^{\frac{2}{x}} - 6 \cdot 8^{\frac{1}{x}} + 8$; б) $y = 7^{4\sqrt{x}} - 8 \cdot 7^{\sqrt{4x}} + 7$.

2.102. Решите уравнение, используя метод замены переменной:

а) $2^x - 8 \cdot 2^{-x} = 7;$ б) $2^{1-x} - 2^{x+3} - 15 = 0.$

2.103. Выполните замену переменной и решите уравнение:

а) $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0;$ б) $4^{\sqrt{x-5}} - 4 \cdot 2^{\sqrt{x-5}} = 32.$

2.104*. Решите уравнение, используя свойства функций:

а) $0{,}25^x + 1 = -\frac{5}{x};$ б) $0{,}5^{-x} = \frac{2-3x}{2};$ в) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt{x+10}.$

2.105*. Решите уравнение:

а) $2^{|3x+5|} = 0{,}25^x;$ б) $2^{|x|} = 2^{x^2+2x}.$

2.106*. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3^{\frac{x-y}{2}} + 3^{x-y} = 12; \\ 3^x + 3^{-y} = 10. \end{cases}$

2.107*. Найдите сумму корней уравнения $9 \cdot 5^{x^2-5x+2} - 5 \cdot 9^{x^2-5x+2} = 0.$

2.108*. Найдите сумму корней (корень, если он единственный) уравнения $3^{2x^2-4x-3} - 8 \cdot 3^{x^2} - 3^{4x+5} = 0.$

2.109*. Решите уравнение $a^{2x^2} - 2 \cdot a^{x^2+x+6} + a^{2x+12} = 0,$ где $a > 0,$ $a \neq 1.$

2.110*. Решите уравнение, используя свойства функций:

а) $2^{|x|} = -x^2 + \frac{1}{2};$ б) $\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2\right| = -x^2 + 1.$

2.111*. Найдите число корней уравнения:

а) $2^{|x|} = 5 - |x|;$ б) $|2^x - 4| = -\frac{2}{3}x + 2.$

2.112*. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x-1{,}5} \cdot (2^x + 8 \cdot 2^{-x} - 6) = 0;$

б) $x^2 \cdot 4^{\sqrt{2-x}} + 4^{2-x} = 4^{\sqrt{2-x}+2} + x^2 \cdot 2^{-2x}.$

2.113*. Решите уравнение, используя метод замены переменной:

а) $\sqrt{5^x - 1} = 7 - 5^x;$ б) $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 3;$

в) $\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^x + \left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^x = 34.$

2.114. Решите уравнение:

а) $4^{x-3}=64$; б) $7^{x+9}=1$; в) $7^x=6$;

г) $25^{3,5x+3}=\frac{1}{125}$; д) $8^{0,5x+2}=\frac{1}{16}$; е) $\left(\frac{1}{49}\right)^{-x}=\frac{1}{\sqrt{7}}$.

2.115. Найдите абсциссы точек пересечения графика функции:

а) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{5-x}$ и прямой $y=16\sqrt{2}$;

б) $y=\left(\sqrt{3}\right)^{x^2-5}$ и прямой $y=\frac{1}{9}$;

в) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x}$ и прямой $y=\sqrt[4]{2}$.

2.116. Решите уравнение:

а) $3^{x^2+x}-9=0$; б) $5^{x^2-8}-5=0$; в) $10^{x^2+2x}-1=0$;

г) $2^{7-x^2}-0,25=0$; д) $7^{x^2-1}-49=0$; е) $0,25^{3-x^2}=16$.

2.117. Найдите нули функции:

а) $y=(0,7)^{\frac{2x-3}{4}}-\left(1\frac{3}{7}\right)^{2-x}$; б) $y=6^{5x^2-5x+2}-\left(\frac{1}{6}\right)^{1-3x}$;

в) $y=\left(\sqrt[4]{3}\right)^{4x^2+9x-1}-3^{3x}$; г) $y=\left(\sqrt{5}\right)^{x^2-5x}-0,04$.

2.118. Решите уравнение:

а) $0,3^{\sqrt{3x-5}}=0,09$; б) $2^{\sqrt{3x-5}}=\frac{1}{2^{x-11}}$.

2.119. Найдите абсциссы точек пересечения графика функции:

а) $y=27^{-3}\cdot 9^{x+2}$ и прямой $y=81$;

б) $y=4^{x+2}:2^x$ и прямой $y=8$;

в) $y=\sqrt{7}\cdot 7^{3x}$ и прямой $y=\frac{1}{7}$.

2.120. Приведите к одинаковому основанию левую и правую части уравнения и решите его:

а) $10^{2x}=0,1\cdot\sqrt{1000}$; б) $2^{2x^2-5x-1}=0,5\sqrt[3]{4^{2x}}$;

в) $2^{\sqrt{x+1}}=16\cdot\sqrt{0,25^{5-\frac{x}{4}}}$.

2.121. Найдите корни уравнения:

а) $7^x \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^x = 3;$ б) $\left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot 3^x = \frac{9}{25};$

в) $5^{x-1} \cdot 2^{x-1} = 1000;$ г) $0{,}3^{x+2} \cdot 3^{x+2} = \sqrt[5]{0{,}81}.$

2.122. Решите уравнение, приведя степени в обеих частях уравнения к степеням с одинаковыми основаниями:

а) $2^x \cdot 5^x = 0{,}1 \cdot \left(10^{x-1}\right)^5;$ б) $\left(\sqrt{5}\right)^{x+1} : 4^{x+1} = \frac{5}{16};$

в) $\frac{36 \cdot 27^{x^2}}{4^{5x}} = \frac{3^{10x}}{6 \cdot 8^{x^2}}.$

2.123. Решите уравнение:

а) $3^{x+2} + 3^{x+3} = 108;$ б) $5^{x+2} - 5^x = 120;$ в) $2^x + 3 \cdot 2^{x-3} = 22.$

2.124. Найдите абсциссы точек пересечения графика функции:

а) $y = 5^{2x+1} - 3 \cdot 5^{2x-1}$ и прямой $y = 550;$

б) $y = 10^{x+2} - 7 \cdot 10^{x+1} + 10^x$ и прямой $y = 3{,}1;$

в) $y = 5^{3x-2} - 6 \cdot 5^{3x} + 4 \cdot 5^{3x-1}$ и прямой $y = -645.$

2.125. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3^{x+y} = 81, \\ 2^y = 8^x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5^{2x} \cdot 5^y = 5, \\ 7^x \cdot 7^y = 49; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5^{3x-y} = \sqrt[3]{5}, \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-y} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

2.126. Решите уравнение, используя метод замены переменной:

а) $36^x - 7 \cdot 6^x + 6 = 0;$ б) $100^x + 12 \cdot 10^x - 13 = 0;$

в) $16^x - 10 \cdot 4^x + 16 = 0;$ г) $25^x - 2 \cdot 5^x - 3 = 0;$

д) $9^x - 4 \cdot 3^x - 5 = 0;$ е) $25^x - 7 \cdot 5^x + 10 = 0.$

2.127. Найдите нули функции:

а) $y = \left(\frac{1}{9}\right)^x - 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 27;$ б) $y = 4^x - 2^{x+1} - 15.$

2.128. Найдите область определения функции $y = \frac{1}{8 - 5 \cdot 4^x - 3 \cdot 2^x}.$

2.129. Решите уравнение, используя прием решения однородных уравнений:

а) $5^{x+6} = 7^{x+6}$; б) $2^{2x-9} = 3^{9-2x}$; в) $5^{3x^2-15x} = 2^{x^2-5x}$.

2.130. Решите уравнение:

а) $3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 3^{2x} = 0$; б) $5 \cdot 5^{2x} - 13 \cdot 15^x + 6 \cdot 3^{2x} = 0$;

в) $3 \cdot 16^x + 36^x = 2 \cdot 81^x$; г) $3 \cdot 4^x - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 25^x = 0$.

2.131. Найдите нули функции $y = 2^{2x+1} + 25^{x+0,5} - 7 \cdot 10^x$.

2.132. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y = 2^{2x+1} + 3^{2x+1}$ и $y = 5 \cdot 6^x$.

2.133. Решите уравнение, используя свойства функций:

а) $2^x = 3 - x$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 1$.

2.134. Решите уравнение:

а) $81^x - 5^{2x} - 4 \cdot 9^{2x-1} = 4 \cdot 5^{2x-1}$; б) $\sqrt{3^{x-54}} - 7\sqrt{3^{x-58}} = 162$.

2.135. Найдите нули функции $y = 9^{x^2} - 4 \cdot 3^{x^2} + 3$.

2.136. Решите уравнение, используя метод замены переменной:

а) $3^x - 9 \cdot 3^{-x} = 8$; б) $2^{x+3} - 2^{1-x} = 15$.

2.137. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y = 4^x - 3^{x-0,5}$ и $y = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}$.

2.138*. Решите уравнение $4^{\sqrt{x^2-2}-x} - 5 \cdot 2^{\sqrt{x^2-2}-x-1} = 6$.

2.139*. Решите уравнение $9^{|x|} = 3^{x^2+3x}$.

2.140*. Найдите сумму корней (корень, если он единственный) уравнения $2^{2x^2-2x-4} - 15 \cdot 2^{x^2} - 2^{2x+8} = 0$.

2.141*. Решите уравнение $\sqrt{x+1} \cdot \left(4 \cdot 2^x + 2 \cdot 2^{-x} - 9\right) = 0$.

2.142. Из чисел $\sqrt[3]{7}$; $2,(3)$; π; $-3\frac{1}{7}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 0; $\sqrt[5]{-3}$ выберите все иррациональные. Какому числовому множеству принадлежат все оставшиеся числа? Какому числовому множеству принадлежат все данные числа?

2.143. Пользуясь определением логарифма, найдите:

а) $\log_3 27$; б) $\log_2 0{,}25$; в) $\log_6 \frac{1}{6}$; г) $\lg 10$;

д) $\log_6 1$; е) $\log_5 \sqrt{5}$; ж) $\log_7 \sqrt[9]{7}$; з) $\log_8 2$;

и) $\log_{32} \frac{1}{2}$; к) $\lg 0{,}01$; л) $\log_{0,5} 8$; м) $\log_{\sqrt{7}} 49$.

2.144. Из неравенств:

а) $x^2 - x + 5 \leqslant 0$; б) $6x + 3 \geqslant 2(3x + 1)$;

в) $5x^2 \leqslant 0$; г) $(x - 3)^2(x + 7)^2 < 0$ — выберите все неравенства, равносильные неравенству $5x - 8 > 7x - 2(x - 9)$.

2.145. Вычислите:

а) $\lg^2 100$; б) $\log_5^3 25$; в) $\log_4^3 \frac{1}{16}$; г) $\log_2^4 \sqrt{2}$.

2.146. Воспользуйтесь формулой разности квадратов и сократите дробь:

а) $\frac{\sqrt[8]{a} - \sqrt[8]{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}}$; б) $\frac{x + \sqrt[4]{5}}{x^2 - \sqrt{5}}$; в) $\frac{\sqrt[6]{m} + \sqrt[6]{n}}{\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n}}$; г) $\frac{\sqrt{c} - \sqrt{d}}{\sqrt[4]{d} - \sqrt[4]{c}}$.

2.147. Найдите производную функции:

а) $f(x) = 4x - \frac{x^5}{5}$; б) $f(x) = (x^2 - 1)(x^3 + 2x)$;

в) $f(x) = \frac{x^2 + 4x}{x^3 - 5}$; г) $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 3}$.

2.148. За январь, февраль и март зарплата работника суммарно составила 2160 р., а за апрель, май, июнь — 2430 р. При этом по условиям контракта зарплата в течение года ежемесячно увеличивается на одну и ту же величину. Какой будет зарплата за сентябрь?

2.149. Решите уравнение $\sqrt{1 - x} + 1 = \sqrt{4 - x}$.

2.150. Расположите числа $4^{\frac{1}{3}}$; $3^{\frac{1}{2}}$; $5^{\frac{1}{6}}$ в порядке возрастания.

2.151. Найдите значение выражения:

а) $10 \sin 105° \cdot \cos 465°$; б) $\sin 410° \cdot \sin 230° - \sin 400° \cdot \sin 140°$.

2.152. Решите систему неравенств $\begin{cases} (2x - 1)(x + 2) \leqslant (x - 3)(2x + 1), \\ \frac{x - 5}{3x - 2} \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$

2.153. Найдите значение выражения $\frac{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{5}{6}}}{2}$ при $a = 64$.

2.154. Решите уравнение:

а) $4\sin 5x\cos 5x = 1$; б) $\sin 2x = 2\sqrt{3}\sin^2 x$.

2.155. Найдите область определения функции:

а) $f(x) = \sqrt[4]{2x^2 - 5x + 2} - \sqrt[6]{4 - x^2}$; б) $f(x) = \dfrac{7}{\sqrt[5]{x^2 - 9}} + \sqrt[6]{x^2 - 2x - 3}$.

2.156. Функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ заданы на отрезке $[-9; 10]$ графиками (рис. 17). Найдите все значения аргумента, при которых верно неравенство $g(x) \leqslant f(x)$.

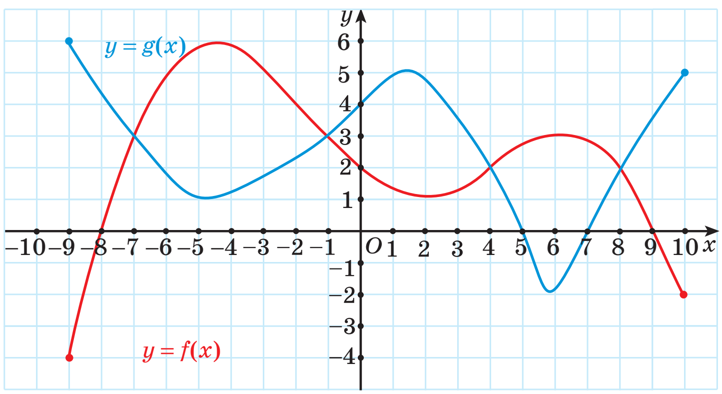

Рис. 17

2.157. Вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt[5]{64}$; б) $\sqrt[6]{128}$; в) $\sqrt[4]{32a^4b^8c^5}$ при $a \leqslant 0$;

г) $\sqrt{-a^3}$; д) $\sqrt[4]{-a^{11}}$; е) $\sqrt[5]{-m^{16}}$.

2.158. Решите неравенство:

а) $x < \dfrac{64}{x}$; б) $\dfrac{2x - 7}{x^2 + 2x - 8} > 1$.

2.159. Для функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ выберите все верные утверждения:

а) областью определения функции является множество действительных чисел;

б) нулями функции являются числа вида $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

в) $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$;

г) на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функция возрастает;

д) функция является четной;
е) график функции не пересекает ось ординат.

2.160. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии: а) 7; 1; $\frac{1}{7}$; ...; б) $5\sqrt{5}$; 5; $\sqrt{5}$; ... .

2.161. Для функции $f(x) = \cos^2 x$ найдите:

а) $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$; б) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$; в) $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$; г) $f\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$.

2.162*. Найдите значение выражения $\cos(\arcsin 0{,}6 + \arccos 0{,}4)$.

§ 6. Показательные неравенства

2.163. Известно, что функция $f(x)$ возрастает на $\boldsymbol{R}$. Сравните:
а) $f(4)$ и $f(4{,}001)$; б) $f(-1)$ и $f(-4)$;
в) $f(\sqrt{3})$ и $f(2)$; г) $f(-\pi)$ и $f(-3)$.

2.164. Известно, что функция $f(x)$ убывает на $\boldsymbol{R}$. Сравните:
а) $f(1)$ и $f(1{,}001)$; б) $f(-1{,}1)$ и $f(-2)$;
в) $f(-\sqrt{3})$ и $f(-1)$; г) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ и $f(1{,}5)$.

2.165. Решите неравенство:

а) $\frac{x}{3} < -1$; б) $\frac{x^2}{3} < 3$; в) $\frac{x^2}{2-x} > 1$.

При решении показательных неравенств используется свойство монотонности показательной функции.

1. Неравенство вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ $\left(a^{f(x)} < a^{g(x)}\right)$, где $a \neq 1$, $a > 0$

Так как показательная функция $y = a^t$ при $a > 1$ возрастает на множестве действительных чисел, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$, т. е. при $a > 1$ знак неравенства сохраняется.

Так как показательная функция $y = a^t$ при $0 < a < 1$ убывает на множестве действительных чисел, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$, т. е. при $0 < a < 1$ знак неравенства меняется.