3.136. Решите неравенство $\frac{2}{x-4} \geqslant x-3$ методом интервалов.

3.137. Решите уравнение $\mathrm{tg}\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{7}\right)=-\sqrt{3}$. Найдите сумму наименьшего положительного и наибольшего отрицательного корней данного уравнения.

3.138. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x+y=7, \\ x^2-7y+17=0; \end{cases}$ б)* $\begin{cases} 2x^2-3xy+2y^2=4, \\ 2x^2+3y^2=14. \end{cases}$

3.139. Решите однородное уравнение $5\sin^2 x-6\sin x\cos x+\cos^2 x=0$.

3.140*. Найдите значение выражения

$$\sqrt{(\log_2 3+\log_3 2)^2-(\log_2 3-\log_3 2)^2}.$$

§ 9. Логарифмические уравнения

3.141. Решите уравнение:

а) $9^{2x-1}=\sqrt{3}$; б) $5^{x+2}=7$; в) $15^{x^2-x}=1$; г) $13^{x^2-3}=13$.

3.142. Найдите корни уравнения $\cos x=-\frac{1}{2}$.

3.143. Какие из данных уравнений не имеют корней:

а) $\sqrt{2+x}=-4$; б) $x^2+7=0$; в) $7^x=-3$; г) $\cos x=\sqrt{3}$?

Многие задачи из различных областей науки и практики моделируются с помощью логарифмических уравнений.

Например, при проектировании зданий учитывается индекс звукоизоляции стен $D=k\cdot\lg\frac{p_0}{p}$, где p_0 — давление звука до прохождения стены, p — давление звука, прошедшего стену, k — коэффициент звукопоглощения. Для того чтобы найти, во сколько раз стена снижает давление звука, необходимо решить уравнение $\lg\frac{p_0}{p}=\frac{D}{k}$. Это уравнение является логарифмическим.

Рассмотрим некоторые виды логарифмических уравнений и способы их решения.

1. Уравнение вида $\log_a f(x) = b$, где $a \neq 1$, $a > 0$

Для решения уравнения вида $\log_a f(x) = b$ воспользуемся определением логарифма числа и получим, что $f(x) = a^b$. Таким образом, уравнение $\log_a f(x) = b$ равносильно уравнению $f(x) = a^b$.

$$\log_a f(x) = b,\ a \neq 1,\ a > 0 \Updownarrow f(x) = a^b$$

Пример 1. Решите уравнение:

а) $\log_3(x - 1) = 2$; б) $\log_2(x^2 - 5) = 2$.

Решение.

а) $\log_3(x - 1) = 2 \Leftrightarrow x - 1 = 3^2 \Leftrightarrow x - 1 = 9 \Leftrightarrow x = 10$.

Ответ: 10.

б) $\log_2(x^2 - 5) = 2 \Leftrightarrow x^2 - 5 = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -3. \end{array}\right.$

Ответ: −3; 3.

Пример 2. Решите уравнение $\log_3(x - 2) + \log_3 x = 1$.

Решение. По свойству логарифмов получим: $\log_3((x - 2)x) = 1$.

По определению логарифма числа получим уравнение $(x - 2)x = 3^1$, или $x^2 - 2x - 3 = 0$, корни этого уравнения $\left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -1. \end{array}\right.$

Так как при переходе от уравнения $\log_3(x - 2) + \log_3 x = 1$ к уравнению $\log_3((x - 2)x) = 1$ область определения расширяется, то необходима проверка. Для этого можно выполнить подстановку корней в исходное уравнение либо проверить выполнение условия существования логарифмов: $\begin{cases} x - 2 > 0, \\ x > 0. \end{cases}$

Проверка. При $x = 3$ получим $\log_3(3 - 2) + \log_3 3 = 1$, $\log_3 1 + \log_3 3 = 1$, $0 + 1 = 1$ — верное равенство, значит, число 3 — корень данного уравнения.

При $x = -1$ получим выражение $\log_3(-1 - 2)$, не имеющее смысла, значит, число −1 не является корнем данного уравнения.

Ответ: 3.

2. Уравнение вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где $a \neq 1$, $a > 0$

Так как логарифмическая функция $y = \log_a t$ возрастает при $a > 1$ или убывает при $0 < a < 1$, то из равенства значений функций $\log_a t_1 = \log_a t_2$ следует равенство значений аргументов $t_1 = t_2$ при условии, что $t_1 > 0$ и $t_2 > 0$. Справедливо и обратное: если $t_1 = t_2 > 0$, то

$\log_a t_1 = \log_a t_2$. Следовательно, уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где $a \neq 1$, $a > 0$, равносильно системе $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0, \\ f(x) > 0. \end{cases}$

Замечание. В системе можно записать только одно из неравенств, поскольку каждое неравенство вытекает из уравнения системы и другого неравенства.

Пример 3. Решите уравнение $\lg(x^2 - 2x - 4) = \lg x$.

Решение. *Первый способ*. Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 4 = x, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 4 = 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = -1, \end{array}\right. \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Второй способ. Так как при переходе от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ к уравнению $f(x) = g(x)$ область определения соответствующих функций расширяется, то могут появиться «посторонние корни». Поэтому для решения уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ можно решить уравнение $f(x) = g(x)$ и проверить, удовлетворяют ли найденные корни уравнению $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

$\log_a f(x) = \log_a g(x)$

Первый способ

$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Второй способ

$f(x) = g(x)$

Проверка

Решим вторым способом уравнение $\lg(x^2 - 2x - 4) = \lg x$. Корнями уравнения $x^2 - 2x - 4 = x$ являются числа $x_1 = -1$ и $x_2 = 4$.

Проверка. Подставив $x = -1$ в уравнение $\lg(x^2 - 2x - 4) = \lg x$, получим выражение $\lg((-1)^2 - 2(-1) - 4) = \lg(-1)$. Так как логарифм отрицательного числа не существует, то $x = -1$ не является корнем данного уравнения.

Подставим в уравнение $x = 4$, получим $\lg(4^2 - 2 \cdot 4 - 4) = \lg 4$ — верное равенство. Значит, число 4 является корнем данного уравнения.

Ответ: 4.

3. Уравнения, в которых можно выполнить замену переменной

Пример 4. Решите уравнение $2\lg x - \lg^2 x = -3$.

Решение. В уравнении $2\lg x - \lg^2 x = -3$ можно выполнить замену переменной.

Введем новую переменную $\lg x = t$, тогда данное уравнение можно записать в виде $-t^2 + 2t = -3$, или $t^2 - 2t - 3 = 0$.

Корни полученного квадратного уравнения $\left[\begin{array}{l} t = 3, \\ t = -1. \end{array}\right.$

Подставим найденные значения t в равенство $\lg x = t$ и получим:

$$\left[\begin{array}{l} \lg x = 3, \\ \lg x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10^3, \\ x = 10^{-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1000, \\ x = 0{,}1. \end{array}\right.$$

Ответ: 1000; 0,1.

Пример 5. Решите уравнение $\frac{1}{5 - 4\log_2 x} + \frac{4}{1 + \log_2 x} = 3.$

Решение. Введем новую переменную $\log_2 x = t$, тогда данное уравнение можно записать в виде $\frac{1}{5 - 4t} + \frac{4}{1 + t} = 3.$

Решим это уравнение:

$$\frac{1}{5 - 4t} + \frac{4}{1 + t} = 3 \Leftrightarrow \frac{1 + t + 4(5 - 4t) - 3(5 - 4t)(1 + t)}{(5 - 4t)(1 + t)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{12t^2 - 18t + 6}{(5 - 4t)(1 + t)} = 0 \Leftrightarrow \frac{2t^2 - 3t + 1}{(5 - 4t)(1 + t)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2 - 3t + 1 = 0, \\ (5 - 4t)(1 + t) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Подставим найденные значения t в равенство $\log_2 x = t$ и получим:

$$\left[\begin{array}{l} \log_2 x = 1, \\ \log_2 x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = \sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: 2; $\sqrt{2}$.

4*. Уравнения, при решении которых применяются свойства функций

Пример 6. Решите уравнение $\log_{\frac{1}{3}} x = x - 4.$

Решение. Функция $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ — логарифмическая с основанием $a = \frac{1}{3}$, значит, она убывает на всей области определения $D = (0; +\infty)$.

Функция $y = x - 4$ — линейная, $k = 1 > 0$, значит, эта функция возрастает на $\boldsymbol{R}$. Поэтому, если уравнение $\log_{\frac{1}{3}} x = x - 4$ имеет корень, то он единственный (рис. 31).

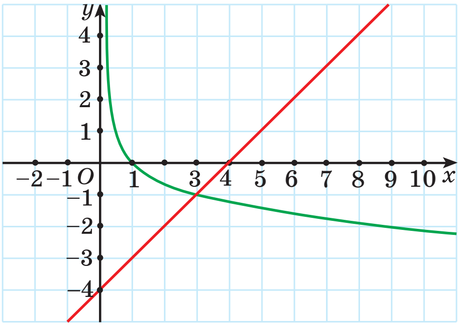

Рис. 31

Очевидно, что число 3 удовлетворяет данному уравнению.

Следовательно, $x = 3$ — единственный корень данного уравнения.

Ответ: 3.

Примеры основных заданий и их решения

1. Решите уравнение:

а) $\log_5(2x - 3) = 4$;

б) $\log_2(x^2 - 1) = 3$;

в) $\log_{0,5}(x^2 + 5x - 16) = -3$;

г) $\lg(x - 9) + \lg(2x - 1) = 2$.

Решение. а) $\log_5(2x - 3) = 4$; $2x - 3 = 5^4$; $2x - 3 = 625$; $2x = 628$; $x = 314$.

Ответ: 314.

б) $\log_2(x^2 - 1) = 3$; $x^2 - 1 = 2^3$; $x^2 - 1 = 8$, $x^2 = 9$, $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

Ответ: −3; 3.

в) $\log_{0,5}(x^2 + 5x - 16) = -3$; $x^2 + 5x - 16 = (0,5)^{-3}$; $x^2 + 5x - 16 = 8$;

$x^2 + 5x - 24 = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = -8, \\ x = 3. \end{array}\right.$

Ответ: −8; 3.

г) $\lg(x - 9) + \lg(2x - 1) = 2$; $\lg((x - 9)(2x - 1)) = 2$;

$$\begin{cases} (x-9)(2x-1) = 100, \\ x > 9, \\ x > \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 - 19x + 9 - 100 = 0, \\ x > 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 19x - 91 = 0, \\ x > 9; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 13, \\ x = -3,5, \end{array}\right. \\ x > 9; \end{cases} \quad x = 13.$$

Ответ: 13.

2. Решите уравнение:

а) $\log_5 x = \log_5(6 - x^2)$;

б) $\log_2(x^2 - 3,5x + 5) = \log_2(1,5x + 1)$;

в) $\log_4 \frac{2}{1-x} = \log_4(x - 4)$.

Решение. а) $\log_5 x = \log_5(6 - x^2)$; $\begin{cases} x = 6 - x^2, \\ x > 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 + x - 6 = 0, \\ x > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = 2, \end{array}\right. \\ x > 0; \end{cases}$ $x = 2.$

Ответ: 2.

б) $\log_2(x^2 - 3,5x + 5) = \log_2(1,5x + 1)$; $x^2 - 3,5x + 5 = 1,5x + 1$;

$x^2 - 5x + 4 = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 4. \end{array}\right.$

Проверка. При $x = 1$ получим $\log_2(1^2 - 3,5 \cdot 1 + 5) = \log_2(1,5 \cdot 1 + 1)$; $\log_2(2,5) = \log_2(2,5)$ — верное равенство, значит, $x = 1$ является корнем данного уравнения.

При $x = 4$ получим $\log_2(4^2 - 3,5 \cdot 4 + 5) = \log_2(1,5 \cdot 4 + 1)$; $\log_2(7) = \log_2(7)$ — верное равенство, значит, $x = 4$ является корнем данного уравнения.

Ответ: 1; 4.

в) $\log_4 \frac{2}{1-x} = \log_4(x - 4) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{1-x} = x - 4, \\ x - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2 - (x-4)(1-x)}{1-x} = 0, \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{1-x} = 0, \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 3, \end{array}\right. \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing.$

Ответ: нет корней.

3. Решите уравнение:

а) $\log_5^2 x - \log_5 x - 2 = 0$;

б) $\log_5 x - \log_x 5 = 1{,}5$;

в) $\log_3^2(27x) + 2\log_3 x = -7$.

Решение. а) Введем новую переменную $\log_5 x = t$, получим квадратное уравнение $t^2 - t - 2 = 0$. Его корни $\left[\begin{array}{l} t = 2, \\ t = -1. \end{array}\right.$

Подставим $t = \log_5 x$ в совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \log_5 x = 2, \\ \log_5 x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5^2, \\ x = 5^{-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 25, \\ x = \frac{1}{5}. \end{array}\right.$$

Ответ: 0,2; 25.

б) По формуле перехода от одного основания логарифма к другому получим, что $\log_x 5 = \frac{1}{\log_5 x}$. Тогда исходное уравнение примет вид

$$\log_5 x - \frac{1}{\log_5 x} = 1{,}5.$$

Пусть $\log_5 x = t$, тогда $t - \frac{1}{t} = 1{,}5$; $t^2 - 1{,}5t - 1 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = 2, \\ t = -\frac{1}{2}; \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} \log_5 x = 2, \\ \log_5 x = -\frac{1}{2}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 25, \\ x = \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{5}$; 25.

в) $\log_3^2(27x) + 2\log_3 x = -7$; $(\log_3 27 + \log_3 x)^2 + 2\log_3 x = -7$;

$(3 + \log_3 x)^2 + 2\log_3 x = -7$.

Пусть $\log_3 x = t$, тогда уравнение примет вид $(3 + t)^2 + 2t = -7$; $t^2 + 8t + 16 = 0$; $t = -4$, значит, $\log_3 x = -4$; $x = \frac{1}{81}$.

Ответ: $\frac{1}{81}$.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_3 x + 2\log_3 y = 3, \\ 2\log_3 x - \log_3 y = 6. \end{cases}$

Решение. Умножим обе части второго уравнения системы на 2 и получим: $\begin{cases} \log_3 x + 2\log_3 y = 3, \\ 4\log_3 x - 2\log_3 y = 12; \end{cases}$ $\begin{cases} 5\log_3 x = 15, \\ 2\log_3 x - \log_3 y = 6; \end{cases}$

$\begin{cases} \log_3 x = 3, \\ 2 \cdot 3 - \log_3 y = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} \log_3 x = 3, \\ \log_3 y = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 27, \\ y = 1. \end{cases}$

Ответ: (27; 1).

5. Решите уравнение:

а) $\log_x (3x - 2) = 2$; б)* $\log_2 \sin x = -1$;

в)* $\lg x^2 = 2\lg x$; г)* $\lg x^2 = 2\lg(-x)$.

Решение. а) $\log_x (3x-2) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2 = x^2, \\ 3x - 2 > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0, \\ x > \frac{2}{3}, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 2, \end{array} \right. \\ x > \frac{2}{3}, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: 2.

б)* $\log_2 \sin x = -1 \Leftrightarrow \sin x = 2^{-1} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

в)* $\lg x^2 = 2\lg x \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x^2 = \lg x^2, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x^2, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; +\infty)$.

Ответ: $(0; +\infty)$.

г)* $\lg x^2 = 2\lg(-x) \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x^2 = \lg x^2, \\ -x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x^2, \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty;\ 0).$

Ответ: $(-\infty;\ 0)$.

6*. Решите уравнение $\log_3 x = \sqrt{13 - x}$.

Решение. Функция $y = \log_3 x$ возрастает при $x > 0$, а функция $y = \sqrt{13 - x}$ убывает при $x \leqslant 13$. Значит, исходное уравнение на промежутке $(0;\ 13]$ имеет не более одного корня.

При $x = 9$ уравнение обращается в верное числовое равенство, т. е. 9 — единственный корень данного уравнения.

Ответ: 9.

7*. Решите систему уравнений $\begin{cases} (\lg x + \lg y)\lg x = 2, \\ \lg x = \lg y + 3. \end{cases}$

Решение. Пусть $\lg x = a$, $\lg y = b$, тогда система примет вид

$$\begin{cases} (a + b)a = 2, \\ a = b + 3; \end{cases} \quad \begin{cases} (a + b)a = 2, \\ b = a - 3; \end{cases} \quad \begin{cases} (2a - 3)a = 2, \\ b = a - 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^2 - 3a - 2 = 0, \\ b = a - 3; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = 2, \\ a = -\frac{1}{2}, \end{array}\right. \\ b = a - 3; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 2, \\ b = -1; \end{cases} \\ \begin{cases} a = -\frac{1}{2}, \\ b = -3\frac{1}{2}, \end{cases} \end{array}\right. \text{ значит, } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lg x = 2, \\ \lg y = -1; \end{cases} \\ \begin{cases} \lg x = -\frac{1}{2}, \\ \lg y = -\frac{7}{2}; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 100, \\ y = 0{,}1; \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}}, \\ y = \frac{1}{1000\sqrt{10}}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(100;\ 0{,}1)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{10}};\ \frac{1}{1000\sqrt{10}}\right)$.

1. Существует ли значение x, при котором:

а) $\log_2 x = 5$; б) $\log_2 x = -5$;

в) $\log_2(-x) = 5$; г) $\log_2(-x) = -\log_2(x)$?

2. Если уравнение $f(x) = h(x)$ имеет два корня, то уравнение $\lg f(x) = \lg h(x)$:

а) имеет два корня; б) может иметь только один корень;
в) не имеет корней; г) может иметь больше двух корней.

3.144. Решите логарифмическое уравнение, используя определение логарифма:

а) $\log_3 x = 2$; б) $\log_5 x = -3$; в) $\log_{\sqrt{2}} x = 4$;

г) $\log_{\sqrt{3}} x = \frac{1}{2}$; д) $\log_2(2-3x) = 3$; е) $\log_2(x-3) = 0$;

ж) $\log_{\frac{1}{2}}(3-x)+1=0$; з) $\log_{64}(x+4)-\frac{1}{3}=0$; и) $\log_{27}(7-x)-\frac{2}{3}=0$.

3.145. Найдите все корни уравнения:

а) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+8x) = -2$; б) $\log_{0,5}(x^2+4x-20) = 0$;

в) $\log_2(x^2-2x+8)-4 = 0$; г) $\log_4(x^2+2x+49)-3 = 0$.

3.146. Найдите абсциссы точек пересечения графика функции:

а) $y = \log_{\frac{2}{3}}\frac{x+1}{2x-1}$ и прямой $y = 1$;

б) $y = \log_4|6x-1|$ и прямой $y = 3$.

3.147. Решите уравнение, используя свойство монотонности логарифмической функции:

а) $\log_4(3x-4) = \log_4(x+1)$; б) $\log_{\frac{1}{5}}(4x+3) = \log_{\frac{1}{5}}(2x-1)$;

в) $\log_4(1-x) = \log_4(x^2+8x-9)$; г) $\log_6(x^2+6) = \log_6(5x)$.

3.148. Перейдите к равносильной системе и решите уравнение:

а) $\lg(x^2-10x+17)-\lg(x+3) = 0$; б) $\log_2(x^2-3x)-\log_2(x-1) = 0$.

3.149. Найдите все значения переменной, при которых равны значения выражений $\log_4(x^3+x^2-3x-3)$ и $\log_4(x^3+1)$.

3.150. Используйте свойства логарифмов и решите уравнение:

а) $\log_2(x+4)+\log_2(x-3)=3$; б) $\log_2(x-5)+\log_2(x-2)=2$;

в) $\log_3(x+1)+\log_3(x+7)=3$; г) $2-\log_2 x=\log_2(3x-4)$;

д) $\log_4(x+4)=2-\log_4(x-2)$; е) $3-\log_3(2x-1)=\log_3(18x-27)$.

3.151. Решите уравнение:

а) $1+\log_7(x+4)=\log_7(x^2+9x+20)$;

б) $1+\log_5(x^2+4x-5)=\log_5(x+5)$.

3.152. Решите уравнение, используя метод замены переменной:

а) $\lg^2 x+\lg x-2=0$; б) $\log_3^2 x-2\log_3 x=3$;

в) $\log_5^2 x+\log_{0,2} x=2$; г) $\log_5^2 x-\log_{\sqrt{5}} x-3=0$.

3.153. Найдите все корни уравнения:

а) $\log_2 x^3+8\log_2\sqrt{x}=-21$;

б) $\log_8 x+\log_{\sqrt{2}} x=14$;

в) $\log_2(x-1)^3-\log_{0,5}(x-1)=8$.

3.154. Решите логарифмическое уравнение:

а) $\log_2(x+5)=2\log_2(x+3)$; б) $2\log_{0,5}(x-2)=\log_{0,5}(x+54)$;

в) $\log_{\sqrt{3}}(x-3)=\log_3(x-1)$; г) $\log_{\sqrt{5}}(x-2)=\log_5(2x-1)$;

д) $\log_3(x-3)=\log_9(x-1)$; е) $\log_{25}(16-5x)=\log_5(2x-5)$.

3.155. Используйте свойства логарифмов и метод замены переменной и решите уравнение:

а) $\lg^2 x+4\lg(10x)-1=0$; б) $\log_4^2 x+\frac{1}{2}\log_4(16x)-4=0$;

в) $\log_{0,5}^2(x-5)+\log_2\frac{4}{x-5}=2$; г) $\log_5^2(5-x)+2\log_{\frac{1}{5}}\frac{\sqrt{5}}{5-x}=2$;

д) $2\log_2^2(x-2)-\log_{\frac{1}{2}}\frac{8}{x-2}=\log_2(2x-4)+2$.

3.156. Решите логарифмическое уравнение:

а) $\log_2^2 4x+\log_2\frac{x^2}{8}=8$; б) $\lg^2(100x)+\lg^2(10x)-14=\lg\frac{1}{x}$.

3.157. Примените формулу перехода от одного основания логарифма к другому и решите уравнение:

а) $\log_2 x - 12\log_x 2 = 1$;

б) $\log_4 x + 6\log_x 4 = 5$;

в) $4\log_{16} x + \lg 10 = 3\log_x 16$.

3.158. Решите логарифмическое уравнение:

а) $\log_{x+1}(x^2 - 3x + 1) = 1$;

б) $\log_{2x+3}(5x^2 + 11x + 3) = 2$;

в) $\log_{1-x}(x^2 + x) = \log_{1-x}(4 - 2x)$.

3.159. Решите уравнение:

а) $\log_7(2x + 3) - 2\log_7(3x + 1) = \log_{\frac{1}{7}} 7$;

б) $\log_{\frac{1}{5}}(2x - 6) + 0{,}5\log_{\sqrt{5}}(x - 4) = \log_5 \frac{1}{x-1}$.

3.160. Решите уравнение, используя свойства функций:

а) $\log_2 x = 11 - x$; б) $\log_{\frac{1}{3}} x = \sqrt{x - 1}$; в) $\log_4 x = \frac{4}{x}$.

3.161. Решите уравнение:

а) $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x$; б) $x + \log_2(2^x - 6) = \log_2(2^{x+2} - 16)$.

3.162. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \log_6(3x - y) = 2, \\ \log_{18}(6x + y) = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_{0,2}(4x - 2y) = -1, \\ \log_2(x + 2y) = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \log_3(x + y) = 4, \\ x - y = 85; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \log_2 x - 3y = 13, \\ 3\log_2 x + y = -1. \end{cases}$

3.163. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1, \\ y - 2x = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 3, \\ x - y = -6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - y = 90, \\ \lg x + \lg y = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x + 3y = 16, \\ \log_2 x + \log_2 y = 3. \end{cases}$

3.164. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \lg x + \lg y = 5, \\ \lg x - \lg y = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_3 x + \log_9 y = 3, \\ \log_{\frac{1}{3}} x + \log_3 y = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5\log_{\frac{1}{2}} x + 3\log_2 y = -11, \\ 4\log_{\frac{1}{2}} x + \log_2 y = -13; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \log_5 x + \log_2 y^4 = 13, \\ \log_5 x^4 + \log_{\frac{1}{2}} y = 1. \end{cases}$

3.165. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \log_3(x^2 + y^2) = 2, \\ y - 2\sqrt{2}x = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4\log_2 x + \log_2(y+1) = 6, \\ \log_2 x \cdot \log_2(y+1) = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3 \cdot 2^x - \log_2 y = 2, \\ 2^x \cdot \log_2 y = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 25^x \cdot 5^y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}, \\ \log_2(2y - x) = 2. \end{cases}$

3.166*. Решите уравнение $\log_8 x + \log_8^2 x + \log_8^3 x = -1$.

3.167*. Решите уравнение, используя определение логарифма:

а) $x^{2 - \frac{\log_3 x}{2}} = 9$; б) $x^{2\lg^3 x - \frac{3\lg x}{2}} = \sqrt{10}$; в) $25 \cdot x^{2\log_5 x} = x^4$.

3.168*. Решите уравнение:

а) $\lg^2(-x) + \lg x^2 - 3 = 0$; б) $4\log_4^2(-x) + 2\log_4 x^2 = -1$.

3.169*. Решите уравнение $\log_{2-\sqrt{3}}(x-1) = \log_{2+\sqrt{3}}(2x-3)$.

3.170*. Найдите сумму корней уравнения $1 - \log_9(x+1)^2 = \frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}} \frac{x+5}{x+3}$.

3.171*. Найдите сумму корней (корень, если он единственный) уравнения $\log_3(4 \cdot 3^{x-1} - 1) = 2x - 1$.

3.172*. Найдите произведение корней (корень, если он единственный) уравнения $7^{\log_7^2 x} + x^{\log_7 x} = 14$.

3.173*. Найдите сумму корней (корень, если он единственный) уравнения $\log_{0,5}\left(\log_2^2 x - 3\log_2 x + 4\right) = -1$.

3.174*. Найдите сумму $x_0 + y_0$, где $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} \log_2(x-y) = 5 - \log_2(x+y), \\ \dfrac{\lg x - \lg 4}{\lg y - \lg 3} = -1. \end{cases}$

3.175*. Найдите число корней уравнения

$\log_{2x+1}(5+8x-4x^2)+\log_{5-2x}(1+4x+4x^2)=4.$

3.176*. Решите уравнение $(x+1)\log_3^2 x+4x\log_3 x-16=0.$

3.177. Решите логарифмическое уравнение:

а) $\log_{\frac{1}{2}} x=-5;$

б) $\log_4(7x+8)=3;$

в) $\log_2(x^2+3x)=2;$

г) $\log_5 \frac{1-2x}{x+3}=1.$

3.178. Найдите все корни уравнения:

а) $\lg(5x-9)=\lg(3x+1);$

б) $\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)=\log_{\frac{1}{2}}(x-3);$

в) $\lg(x^2+2x-7)=\lg(x-1);$

г) $\log_7(x^2-4x-7)=\log_7(5-3x);$

д) $\lg(x^2+12x+28)-\lg(x+4)=0;$

е) $\log_3(x^3+x^2-4x+2)=\log_3(x^3-1).$

3.179. Воспользуйтесь свойствами логарифмов и решите уравнение:

а) $\log_3(x-2)+\log_3(x+6)=2;$

б) $\log_2(x-3)+\log_2(x-2)=1;$

в) $2-\log_2 x=\log_2(x-3).$

3.180. Решите уравнение с помощью метода замены переменной:

а) $\log_2^2 x-\log_2 x-2=0;$

б) $\log_2^2 x-3\log_2 x=4;$

в) $4-\lg^2 x=3\lg x;$

г) $\log_5^2 x-\log_{\sqrt{5}} x=3.$

3.181. Найдите абсциссу точки пересечения графика функции $y=\log_9 x+\log_{\sqrt{3}} x$ и прямой $y=10.$

3.182. Решите уравнение:

а) $\log_6(2x+5)=2\log_6(x+1);$

б) $\log_{\sqrt{3}}(x-3)=\log_3(x-1);$

в) $\log_9(2x-3)=\log_3(x-1).$

3.183. Воспользуйтесь свойствами логарифмов и решите уравнение:

а) $\log_3^2 x - 2\log_3(3x) - 1 = 0$; б) $\log_3^2(x-1) - 2\log_{\frac{1}{3}}\frac{9}{x-1} = 7$.

3.184. Решите уравнение $\log_3 x - 2\log_x 3 + 1 = 0$, используя формулу перехода от одного основания логарифма к другому.

3.185. Решите уравнение, используя определение логарифма:

а) $\log_{4x-8}(x^2 - 2x - 3) = 1$; б) $\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) = 1$.

3.186. Решите уравнение $\log_{\frac{1}{3}}(2x-5) + 0{,}5\log_{\sqrt{3}}(x-3) = \log_3\frac{1}{x-1}$.

3.187. Решите графически уравнение $\log_{\frac{1}{4}} x = x - 5$.

3.188. Решите уравнение:

а) $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$; б) $x + \log_3(3^x - 7) = \log_3(3^{x+1} - 9)$.

3.189. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}\log_7(2x - y) = 2,\\ \log_{14}(7x + y) = 1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\log_2(x + y) = 6,\\ x - y = 60;\end{cases}$ в) $\begin{cases}\log_6 x - 2y = 3,\\ 2\log_6 x + y = 1.\end{cases}$

3.190. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}\log_3 x + \log_3 y = 1,\\ y - 3x = 8;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\log_2 x + \log_2 y = 5,\\ x - 3y = -20.\end{cases}$

3.191. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}3\log_{\frac{1}{2}} x - \log_5 y = -13,\\ 2\log_{\frac{1}{2}} x + 3\log_5 y = -5;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\log_2 x + \log_6 y^3 = 7,\\ \log_2 x^3 + \log_{\frac{1}{6}} y = 11.\end{cases}$

3.192. Решите систему уравнений $\begin{cases}\log_4(x^2 + y^2) = 2,\\ x - \sqrt{3}y = 0.\end{cases}$

3.193*. Решите уравнение:

а) $x^{\log_3 x - 3} = \frac{1}{9}$; б) $x^{3 + \lg x} = 10\,000$.

3.194*. Решите уравнение $\log_2^2(-x) + 3\log_2 x^2 = -9$.

3.195*. Решите уравнение $\log_{\sqrt{5}-2}(x+2) = \log_{2+\sqrt{5}}(2x+3)$.

3.196*. Решите уравнение $4^{\log_2 \lg x} = \lg x - \lg^2 x + 1$.

3.197*. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2^{1+\log_2(x-y)} = 4, \\ \log_2(x-y) + \log_2(x+y) = 2 + \log_2 3. \end{cases}$

3.198*. Решите уравнение $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x = 6 - 2x$.

3.199. Найдите, если это возможно, $f(-1)$ для функции:

а) $f(x) = -x^2 - 3x$; б) $f(x) = \sqrt[4]{15-x}$; в) $f(x) = 5^{x-2}$;

г) $f(x) = \log_2 x$; д) $f(x) = \sqrt[3]{x-7}$; е) $f(x) = \cos\pi x$.

3.200. Выберите верное равенство:

а) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$; б) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$;

в) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$; г) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2\pi}{3}$.

3.201. Вычислите:

а) $32^{0,4}$; б) $125^3 : 25^4$; в) $49^{0,25} \cdot \sqrt{7}$;

г) $\sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{3}$; д) $\left(7^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$; е) $81^{\pi} \cdot 3^{-4\pi}$.

3.202. Представьте выражение $\left(\frac{4}{x^2-4} + \frac{1}{2-x}\right) : \frac{3}{x^2+4x+4}$ в виде несократимой дроби.

3.203. Воспользуйтесь формулами сложения и найдите значение выражения $\frac{\sin 17^\circ \cos 13^\circ + \sin 13^\circ \cos 17^\circ}{\cos 20^\circ \cos 25^\circ - \sin 20^\circ \sin 25^\circ}$.

3.204. Расположите числа $\log_4 9$; $\log_3 0,1$; $\log_2 5$ в порядке возрастания.

3.205. Примените формулы сокращенного умножения и упростите выражение $\left(a^{\sqrt{3}} + 3\right)^2 - \left(a^{\sqrt{3}} + 3\right)\left(a^{\sqrt{3}} - 3\right)$.

3.206. С помощью рисунка 32, на котором изображены графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, найдите сумму целых решений неравенства $f(x) \leqslant g(x)$ на промежутке $[-7; 6]$.

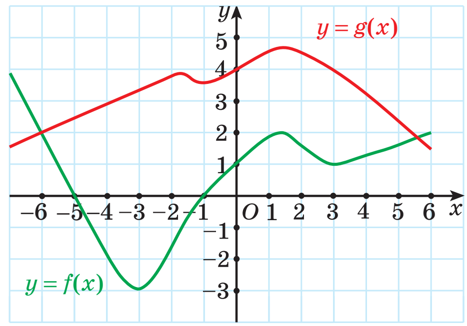

Рис. 32

3.207. Решите уравнение:

а) $4^x \cdot 5^{x+1} = 5 \cdot 20^{2-x}$;

б) $2 \cdot 3^{x+1} - 5 \cdot 3^{x-1} = 117$;

в) $4^x - 10 \cdot 2^{x-1} - 24 = 0$.

3.208. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{5}{\sqrt[3]{5}}$; б) $\frac{3}{\sqrt[3]{9}}$; в) $\frac{6}{\sqrt[4]{8}}$; г) $\frac{60}{\sqrt[3]{15}}$.

3.209. Найдите значение выражения $\log_2 \sin\frac{7\pi}{8} + \log_2 \cos\frac{\pi}{8} + 1$.

3.210. Решите совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} x^2 + 3x + 2 > 0, \\ \frac{x}{x+1} \leqslant 0. \end{array}\right.$

3.211. Найдите область определения функции:

а) $y = \log_2(x-1)$; б) $y = \lg(4 - x^2)$; в) $y = \log_7(9x - x^2)$.

3.212. Запишите уравнение касательной к графику функции $y = 8x^3 - 1$ в точке пересечения этого графика с осью абсцисс.

3.213. Найдите значение выражения $12\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, если x_1 и x_2 — корни уравнения $12x^2 + 7x - 5 = 0$.

3.214. Решите показательное неравенство:

а) $\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{3x-1}{2x+5}} < \frac{3}{7}$; б) $0{,}6^{x^2-x} > \frac{9}{25}$.

3.215. Воспользуйтесь методом замены переменной и решите уравнение $\sqrt{5x-3} + 2\sqrt[4]{5x-3} - 8 = 0$.

3.216. Докажите тождество $\frac{\sin(\alpha + 3\pi)}{\sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)} + \frac{\cos(3\pi - \alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - 1} = \frac{1}{\cos\alpha}$.

3.217. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 5x > x^2, \\ 25x^2 > 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (2+x)^2 \geqslant 9, \\ (2x+1)^2 < 25. \end{cases}$

3.218. В геометрической прогрессии (b_n) найдите $b_5 + b_1$, если $q = 0{,}25$, $b_3 = 2$.

3.219. Примените формулу разности синусов и решите уравнение $\sin 3x - \sin x + \cos 2x = 0$.

3.220. Решите неравенство методом интервалов:

а) $\dfrac{(x+3)^2 - 6x - 10}{(x-5)^2} \leqslant 0$; б) $\dfrac{x^2(x-1)(x+2)}{(x-3)} \leqslant 0$; в) $\dfrac{(x+4)^3(x-7)}{(2x+8)(x+2)^5} \geqslant 0$.

3.221. В параллели 11-х классов не более 100 человек. Ровно две трети из них планируют проходить централизованное тестирование по математике. 8 % учащихся параллели — участники предметных олимпиад. Найдите, сколько человек не планируют проходить централизованное тестирование по математике.

3.222*. Найдите значение выражения $6 \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arcctg} 4)$.

§ 10. Логарифмические неравенства

3.223. Решите неравенство:

а) $2x^2 - 3x + 1 \leqslant 0$; б) $\dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x-2} \leqslant 0$; в) $2^{x-1} + 4^x - 3 \geqslant 0$.

3.224. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{x^3 - 1}$; б) $y = \sqrt{1 - 2^x}$; в) $y = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{5 - x}$.

3.225. Сравните значения выражений:

а) $\log_3 7$ и $\log_3 \sqrt{47}$; б) $\log_{\frac{3}{4}} 2$ и $\log_{\frac{3}{4}} \sqrt{3}$; в) $\log_{16} 2^4$ и $\log_{\sqrt{5}} \sqrt{3}$.

При решении логарифмических неравенств используется свойство монотонности логарифмической функции и учитывается область определения логарифмической функции.

Рассмотрим некоторые виды логарифмических неравенств.