3.217. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 5x > x^2, \\ 25x^2 > 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (2+x)^2 \geqslant 9, \\ (2x+1)^2 < 25. \end{cases}$

3.218. В геометрической прогрессии (b_n) найдите $b_5 + b_1$, если $q = 0{,}25$, $b_3 = 2$.

3.219. Примените формулу разности синусов и решите уравнение $\sin 3x - \sin x + \cos 2x = 0$.

3.220. Решите неравенство методом интервалов:

а) $\dfrac{(x+3)^2 - 6x - 10}{(x-5)^2} \leqslant 0$; б) $\dfrac{x^2(x-1)(x+2)}{(x-3)} \leqslant 0$; в) $\dfrac{(x+4)^3(x-7)}{(2x+8)(x+2)^5} \geqslant 0$.

3.221. В параллели 11-х классов не более 100 человек. Ровно две трети из них планируют проходить централизованное тестирование по математике. 8 % учащихся параллели — участники предметных олимпиад. Найдите, сколько человек не планируют проходить централизованное тестирование по математике.

3.222*. Найдите значение выражения $6 \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arcctg} 4)$.

§ 10. Логарифмические неравенства

3.223. Решите неравенство:

а) $2x^2 - 3x + 1 \leqslant 0$; б) $\dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x - 2} \leqslant 0$; в) $2^{x-1} + 4^x - 3 \geqslant 0$.

3.224. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{x^3 - 1}$; б) $y = \sqrt{1 - 2^x}$; в) $y = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{5 - x}$.

3.225. Сравните значения выражений:

а) $\log_3 7$ и $\log_3 \sqrt{47}$; б) $\log_{\frac{3}{4}} 2$ и $\log_{\frac{3}{4}} \sqrt{3}$; в) $\log_{16} 2^4$ и $\log_{\sqrt{5}} \sqrt{3}$.

При решении логарифмических неравенств используется свойство монотонности логарифмической функции и учитывается область определения логарифмической функции.

Рассмотрим некоторые виды логарифмических неравенств.

1. Неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ и $\log_a f(x) < \log_a g(x)$, где $a \neq 1$, $a > 0$

а) Так как логарифмическая функция $y = \log_a t$ при $a > 1$ возрастает на области определения, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0, \end{cases}$ а неравенство $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$

б) Так как логарифмическая функция $y = \log_a t$ при $0 < a < 1$ убывает на области определения, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases}$ а неравенство $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Пример 1. Решите неравенство $\log_7(4x - 5) > \log_7(x - 6)$.

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \text{ при } a > 1$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Решение. Так как $a = 7 > 1$, то функция $y = \log_7 t$ возрастает при $t > 0$, значит, неравенство $\log_7(4x - 5) > \log_7(x - 6)$ равносильно системе $\begin{cases} 4x - 5 > x - 6, \\ x - 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x > -1, \\ x > 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{3}, \\ x > 6 \end{cases} \Leftrightarrow x > 6 \Leftrightarrow x \in (6; +\infty).$

Ответ: $(6; +\infty)$.

Пример 2. Решите неравенство $\log_2(x^2 - 4x) < \log_2(10 - x)$.

Решение. Так как $a = 2 > 1$, то функция $y = \log_2 t$ возрастает при $t > 0$, значит, неравенство $\log_2(x^2 - 4x) < \log_2(10 - x)$ равносильно системе

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \text{ при } a > 1$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x < 10 - x, \\ x^2 - 4x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 10 < 0, \\ x(x-4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-2;\ 5), \\ x \in (-\infty;\ 0) \cup (4;\ +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow\ x \in (-2;\ 0) \cup (4;\ 5).$$

Ответ: $(-2;\ 0) \cup (4;\ 5)$.

Пример 3. Решите неравенство $\log_{0,2}(8-4x) > \log_{0,2}(1-x)$.

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \text{ при } 0 < a < 1$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Решение. Так как $a = 0,2 < 1$, то функция $y = \log_{0,2}t$ убывает при $t > 0$, значит, неравенство $\log_{0,2}(8-4x) > \log_{0,2}(1-x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} 8 - 4x < 1 - x, \\ 8 - 4x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x < -7, \\ -4x > -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2\frac{1}{3}, \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing.$$

Ответ: $\varnothing$.

Пример 4. Решите неравенство $\log_{0,5}(x^2 - 1,5) < 1$.

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \text{ при } 0 < a < 1$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Решение. Представим число 1 в виде логарифма числа: $1 = \log_{0,5}0,5$. Тогда данное неравенство можно записать в виде $\log_{0,5}(x^2 - 1,5) < \log_{0,5}0,5$.

Так как $a = 0,5 < 1$, то функция $y = \log_{0,5}t$ убывает при $t > 0$, значит, неравенство $\log_{0,5}(x^2 - 1,5) < \log_{0,5}0,5$ равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 1,5 > 0,5, \\ 0,5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 > 2 \Leftrightarrow\ x \in \left(-\infty;\ -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2};\ +\infty\right).$$

Ответ: $\left(-\infty;\ -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2};\ +\infty\right)$.

2. Неравенства, в которых можно выполнить замену переменной

Логарифмические неравенства, которые можно привести, например, к виду $af^2(x)+bf(x)+c>0$, где a, b, c — некоторые действительные числа, $a \neq 0$, $f(x)$ — логарифмическая функция, можно решать методом замены переменной.

Пример 5. Решите неравенство $3\log_3^2 x - 4\log_3 x + 1 \leqslant 0$.

Введем новую переменную $t = \log_3 x$, тогда данное неравенство можно записать в виде $3t^2 - 4t + 1 \leqslant 0$.

Решим полученное квадратное неравенство. Нулями квадратичной функции $y = 3t^2 - 4t + 1$ являются числа $\frac{1}{3}$ и 1.

Решение неравенства $3t^2 - 4t + 1 \leqslant 0$ — это множество значений аргумента $\frac{1}{3} \leqslant t \leqslant 1$.

Подставим $t = \log_3 x$ в двойное неравенство $\frac{1}{3} \leqslant t \leqslant 1$ и получим $\frac{1}{3} \leqslant \log_3 x \leqslant 1$. Это неравенство равносильно системе $\begin{cases} \log_3 x \geqslant \frac{1}{3}, \\ \log_3 x \leqslant 1. \end{cases}$

Решим эту систему неравенств:

$$\begin{cases} \log_3 x \geqslant \frac{1}{3}, \\ \log_3 x \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x \geqslant \log_3 3^{\frac{1}{3}}, \\ \log_3 x \leqslant \log_3 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 3^{\frac{1}{3}}, \\ x \leqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\sqrt[3]{3};\, 3\right].$$

Ответ: $\left[\sqrt[3]{3};\, 3\right]$.

Пример 6. Решите неравенство $\lg x + 1 < \frac{8}{\lg x - 1}$.

Решение. Выполним замену переменной $t = \lg x$, тогда данное неравенство можно записать в виде $t + 1 < \frac{8}{t-1}$.

Решим это дробно-рациональное неравенство методом интервалов:

$$t+1<\frac{8}{t-1};\quad t+1-\frac{8}{t-1}<0;\quad \frac{(t+1)(t-1)-8}{t-1}<0;\quad \frac{t^2-9}{t-1}<0;\quad \frac{(t-3)(t+3)}{t-1}<0.$$

Отметим на оси нули функции $t = 3$, $t = -3$ и значение аргумента, при котором значения функции не существуют $t = 1$ (нуль знаменателя). Построим схему графика функции (рис. 33).

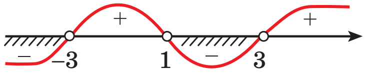

Рис. 33

В соответствии со знаком неравенства получим: $t \in (-\infty; -3) \cup (1; 3)$.

Объединение этих промежутков можно записать в виде совокупности $\left[\begin{array}{l} t < -3, \\ 1 < t < 3. \end{array}\right.$

Подставим в полученную совокупность неравенств $t = \lg x$:

$$\left[\begin{array}{l} \lg x < -3, \\ 1 < \lg x < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x < \lg 10^{-3}, \\ \lg 10 < \lg x < \lg 10^{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 10^{-3}, \\ 10 < x < 10^{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (0; 0{,}001) \cup (10; 1000).$$

Ответ: $(0; 0{,}001) \cup (10; 1000)$.

3*. Неравенства, при решении которых применяются свойства логарифмической функции

Пример 7. Решите неравенство $\log_2(x-4) > 5 - x$.

Решение. Функция $y = \log_2(x - 4)$ — логарифмическая с основанием $a = 2 > 1$, следовательно, она возрастает на $D(y)$. Функция $y = 5 - x$ — линейная, вида $y = kx + b$. Так как $k = -1$, то эта функция убывает на $\boldsymbol{R}$. Уравнение $\log_2(x-4) = 5 - x$ имеет единственный корень, равный 5 (рис. 34).

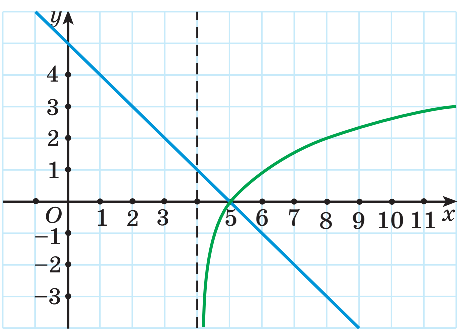

Рис. 34

При $x = 5$ значение функции $y = \log_2(x-4)$ равно нулю, при $x > 5$ значения этой функции больше нуля, а при $4 < x < 5$ значения этой функции меньше нуля, так как функция $y = \log_2(x-4)$ возрастает на области определения.

При $x = 5$ значение функции $y = 5 - x$ равно нулю, при $x > 5$ значения этой функции меньше нуля, а при $4 < x < 5$ значения этой функции больше нуля, так как функция $y = 5 - x$ убывает на $\boldsymbol{R}$.

Значит, при $x > 5$ значения функции $y = \log_2(x-4)$ больше значений функции $y = 5 - x$. Следовательно, решением неравенства $\log_2(x-4) > 5 - x$ является множество значений переменной $x > 5$, или $x \in (5; +\infty)$.

Ответ: $(5; +\infty)$.

Примеры основных заданий и их решения

1. Решите неравенство:

а) $\lg x < -1$;

б) $\log_{\frac{1}{7}}(5x-3) \leqslant \log_{\frac{1}{7}}(2x+1)$;

в) $\log_5(x^2-4) \leqslant \log_5(2x^2+1)$;

г) $\log_4 \frac{3}{x} \geqslant 0$.

Решение. а) $\lg x < -1 \Leftrightarrow \lg x < \lg 0{,}1 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0{,}1, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0;\ 0{,}1)$.

Ответ: $(0;\ 0{,}1)$.

б) $\log_{\frac{1}{7}}(5x-3) \leqslant \log_{\frac{1}{7}}(2x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-3 \geqslant 2x+1, \\ 2x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geqslant 4, \\ 2x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1\frac{1}{3}, \\ x > -0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[1\frac{1}{3};\ +\infty\right)$.

Ответ: $\left[1\frac{1}{3};\ +\infty\right)$.

в) $\log_5(x^2-4) \leqslant \log_5(2x^2+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4 \leqslant 2x^2+1, \\ x^2-4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geqslant -5, \\ x \in (-\infty;\ -2) \cup (2;\ +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty;\ -2) \cup (2;\ +\infty)$.

Ответ: $(-\infty;\ -2) \cup (2;\ +\infty)$.

г) $\log_4 \frac{3}{x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \log_4 \frac{3}{x} \geqslant \log_4 1 \Leftrightarrow \frac{3}{x} \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{3-x}{x} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in (0;\ 3]$.

Ответ: $(0;\ 3]$.

2. Решите неравенство, выполнив замену переменой:

а) $\log^2_{0{,}5} x - 3\log_{0{,}5} x - 4 < 0$;

б) $\log^2_3 x + \log_3 x - 6 \geqslant 0$.

Решение. а) Выполним замену переменной: $t = \log_{0{,}5} x$, тогда данное неравенство можно записать в виде $t^2 - 3t - 4 < 0$.

Решим полученное квадратное неравенство.

Нулями квадратичной функции $y = t^2 - 3t - 4$ являются числа 4 и -1. Решение неравенства $t^2 - 3t - 4 < 0$ — это множество значений аргумента $t \in (-1;\ 4)$, или $-1 < t < 4$.

Подставим $t = \log_{0,5} x$ в двойное неравенство $-1 < t < 4$ и получим $-1 < \log_{0,5} x < 4$. Это неравенство равносильно системе $\begin{cases} \log_{0,5} x > -1, \\ \log_{0,5} x < 4. \end{cases}$

Решим эту систему неравенств:

$$\begin{cases} \log_{0,5} x > -1, \\ \log_{0,5} x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{0,5} x > \log_{0,5} 2, \\ \log_{0,5} x < \log_{0,5} \frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x > \frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{16};\ 2\right).$$

Ответ: $\left(\frac{1}{16};\ 2\right)$.

б) Пусть $\log_3 x = t$, тогда $t^2 + t - 6 \geqslant 0$; $(t + 3)(t - 2) \geqslant 0$; $\left[\begin{array}{l} t \geqslant 2, \\ t \leqslant -3, \end{array}\right.$ значит,

$$\left[\begin{array}{l} \log_3 x \geqslant 2, \\ \log_3 x \leqslant -3; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \log_3 x \geqslant \log_3 9, \\ \log_3 x \leqslant \log_3 \frac{1}{27}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x \geqslant 9, \\ 0 < x \leqslant \frac{1}{27}; \end{array}\right. \quad x \in \left(0;\ \frac{1}{27}\right] \cup [9;\ +\infty).$$

Ответ: $\left(0;\ \frac{1}{27}\right] \cup [9;\ +\infty)$.

3*. Решите неравенство:

а) $2\log_2 x - \log_2(x + 6) > 0$;

б) $\log_{0,3} \log_3 \frac{x}{x-1} \geqslant 0$;

в) $\log_9 \frac{4x-5}{|x-2|} \geqslant \frac{1}{2}$;

г) $\log_{\frac{1}{9}} (x-8)^2 + \log_{\frac{1}{3}} (2-x) \geqslant \log_{\frac{1}{3}} 27$.

Решение.

а) $2\log_2 x - \log_2(x + 6) > 0 \Leftrightarrow 2\log_2 x > \log_2(x + 6) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x^2 > \log_2(x + 6), \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > x + 6, \\ x + 6 > 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 > 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (3; +\infty).$$

Ответ: $(3;\ +\infty)$.

б) Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} \log_3 \dfrac{x}{x-1} \leqslant 1, \\ \log_3 \dfrac{x}{x-1} > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} \leqslant 3, \\ \dfrac{x}{x-1} > 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x-3x+3}{x-1} \leqslant 0, \\ \dfrac{x-x+1}{x-1} > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{3-2x}{x-1} \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{x-1} > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty;\ 1) \cup [1{,}5;\ +\infty), \\ x \in (1;\ +\infty); \end{cases} \quad x \in [1{,}5;\ +\infty).$$

Ответ: $[1{,}5;\ +\infty)$.

в) $\log_9 \dfrac{4x-5}{|x-2|} \geqslant \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\log_3 \dfrac{4x-5}{|x-2|} \geqslant \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \log_3 \dfrac{4x-5}{|x-2|} \geqslant 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{4x-5}{|x-2|} \geqslant \log_3 3 \Leftrightarrow \frac{4x-5}{|x-2|} \geqslant 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 2, \\ \dfrac{4x-5}{x-2} \geqslant 3, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2, \\ \dfrac{4x-5}{2-x} \geqslant 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 2, \\ x \geqslant -1, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2, \\ x \geqslant \dfrac{11}{7} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2, \\ \dfrac{11}{7} \leqslant x < 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left[\frac{11}{7};\ 2\right) \cup (2;\ +\infty).$$

Ответ: $\left[\dfrac{11}{7}; 2\right) \cup (2;\ +\infty)$.

г) Данное неравенство равносильно неравенству

$$\log_{\frac{1}{3}} |x-8| + \log_{\frac{1}{3}} (2-x) \geqslant \log_{\frac{1}{3}} 27.$$

Тогда $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} \left(|x-8|(2-x)\right) \geqslant \log_{\frac{1}{3}} 27, \\ 2-x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} |x-8|(2-x) \leqslant 27, \\ x \neq 8, \\ x < 2. \end{cases}$

При $x < 2$ имеем $|x-8| = 8-x$, тогда $\begin{cases} (8-x)(2-x) \leqslant 27, \\ x \neq 8, \\ x < 2; \end{cases}$

$$\begin{cases} 16 - 8x - 2x + x^2 \leqslant 27, \\ x \neq 8, \\ x < 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 10x - 11 \leqslant 0, \\ x \neq 8, \\ x < 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x \in [-1;\ 11], \\ x \neq 8, \\ x < 2. \end{cases}$$

Таким образом, $x \in [-1;\ 2)$.

Ответ: $[-1;\ 2)$.

4*. Решите неравенство $\log_{x+3}\left(\dfrac{2x+5}{4(x-1)}\right) \geqslant 0$.

Решение.

$\log_{x+3}\left(\dfrac{2x+5}{4(x-1)}\right) \geqslant 0;\ \log_{x+3}\left(\dfrac{2x+5}{4x-4}\right) \geqslant \log_{x+3} 1;$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x + 3 < 1, \\ 0 < \dfrac{2x+5}{4x-4} \leqslant 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x + 3 > 1, \\ \dfrac{2x+5}{4x-4} \geqslant 1; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -3 < x < -2, \\ x \in (-\infty;\ 1) \cup [4{,}5;\ +\infty), \\ x \in (-\infty;\ -2{,}5) \cup (1;\ +\infty), \end{cases} \\ \begin{cases} x > -2; \\ x \in (1;\ 4{,}5]; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x \in (-3;\ -2{,}5), \\ x \in (1;\ 4{,}5]; \end{array}\right.$$

$x \in (-3;\ -2{,}5) \cup (1;\ 4{,}5]$.

Ответ: $(-3;\ -2{,}5) \cup (1;\ 4{,}5]$.

5.* Решите неравенство $\log_{0,5} x \geqslant x - 6$.

Решение. Функция $y = \log_{0,5} x$ — логарифмическая с основанием $a = 0{,}5 < 1$, следовательно, она убывает на $D(y)$. Функция $y = x - 6$ — линейная с коэффициентом $k = 1 > 0$, значит, данная функция возрастает на $\boldsymbol{R}$. Уравнение $\log_{0,5} x = x - 6$ имеет единственный корень, равный 4 (рис. 35). Значения функции $y = \log_{0,5} x$ не меньше значений функции $y = x - 6$ при $0 < x \leqslant 4$. Таким образом, неравенство $\log_{0,5} x \geqslant x - 6$ выполняется при $x \in (0; 4]$.

Ответ: $(0;\ 4]$.

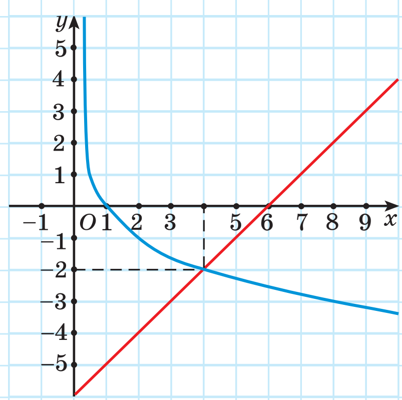

Рис. 35

1. Неравенство $\log_4(x-2) < \log_4(2x+4)$ равносильно системе:

а) $\begin{cases} x-2 < 2x+4, \\ 2x+4 > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2 > 2x+4, \\ 2x+4 > 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x-2 < 2x+4, \\ x-2 > 0. \end{cases}$

Выберите правильный ответ.

2. Неравенство $\log_{0,4}(x-2) < \log_{0,4}(2x+4)$ равносильно системе:

а) $\begin{cases} x-2 < 2x+4, \\ 2x+4 > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2 > 2x+4, \\ 2x+4 > 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x-2 < 2x+4, \\ x-4 > 0. \end{cases}$

Выберите правильный ответ.

3.226. Решите логарифмическое неравенство:

а) $\log_5 x > 2$; б) $\log_{0,5} x \leqslant -1$; в) $\log_2 x < -4$;
г) $\log_{\frac{1}{3}} x \geqslant -2$; д) $\lg x < -2$; е) $\log_{\frac{1}{3}} x \geqslant 0$.

3.227. Решите неравенство, учитывая область определения и свойство монотонности логарифмической функции:

а) $\log_5(2x-4) > \log_5(14-x)$; б) $\log_3(9-2x) \leqslant \log_3(x+3)$;
в) $\log_{\frac{2}{7}}(1-2x) > \log_{\frac{2}{7}}(x-5)$; г) $\log_{0,3}(x-5) \geqslant \log_{0,3}(2x+1)$.

3.228. Решите неравенство, представив число в правой его части в виде логарифма числа по заданному основанию:

а) $\log_4(3-5x) > -1$; б) $\log_2(8-3x) < 1$;
в) $\log_{0,2}(15-2x) > -2$; г) $\log_{0,5}(15-5x) < -1$.

3.229. Решите неравенство, используя свойства логарифмов:

а) $3\log_8(3x+8) < 2$; б) $4\log_{16}(4x+3) > 3$.

3.230. Решите неравенство:

а) $\log_{\frac{1}{4}}(x^2-3x) > -1$; б) $\log_2(x^2+3x) \leqslant 2$;
в) $\log_3(x^2+2x+12) \leqslant 3$; г) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2x-8) \geqslant -4$;
д) $\log_2(x^2+5x+7) > 0$; е) $\log_3(x^2-6x+9) \leqslant 0$.

3.231. Решите неравенство, используя равносильные преобразования:

а) $\log_{25}(x^2-7)>\log_{25}(x-1)$; б) $\log_7(x^2-4)<\log_7(3x+6)$;

в) $\log_{\frac{1}{7}}(x^2-3x)>\log_{\frac{1}{7}}(2x-4)$; г) $\log_{\frac{3}{4}}(3x+4)\leqslant\log_{\frac{3}{4}}x^2$;

д) $\log_{0,7}(9-x^2)>\log_{0,7}(4x+4)$; е) $\log_{0,9}(x^2-6x)\geqslant\log_{0,9}(6x-35)$.

3.232. Представьте число в виде логарифма и решите неравенство:

а) $\log_4\frac{x+3}{2-x}<1$; б) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{5+x}{3-x}>-1$; в) $\log_{0,5}\frac{2x-1}{x+1}>-2$;

г) $\log_3\frac{x-3}{1-x}\geqslant 0$; д) $\log_{0,4}\frac{x^2-x}{x^2+x}<0$; е) $\log_2\frac{2x-5}{x+1}\leqslant 0$.

3.233. Решите неравенство, используя свойства логарифмов:

а) $\log_{\frac{1}{4}}x+\log_{\frac{1}{4}}(x-3)>-1$;

б) $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)<\log_{\frac{1}{2}}5-\log_{\frac{1}{2}}(x-5)$;

в) $\lg(x-2)<2-\lg(27-x)$;

г) $\log_{\frac{1}{3}}(3x-1)\leqslant\log_{\frac{1}{3}}5-\log_{\frac{1}{3}}(2x-3)$;

д) $\log_2(x-4)-\log_{0,5}(x-3)>1$;

е) $\log_2 x+\log_2(x+1)-1\leqslant 0$.

3.234. Выполните замену переменной для решения неравенства:

а) $\lg^2 x\leqslant 1$; б) $\log_2^2 x-4>0$;

в) $\log_2^2 x-5\log_2 x+4<0$; г) $\log_3^2 x-2\log_3 x\leqslant 3$;

д) $\log_{0,5}^2 x+\log_2 x-12\leqslant 0$; е) $15\leqslant\log_2^2 x-2\log_2 x$.

3.235. Решите неравенство:

а) $\log_2(x+5)<2\log_2(x+3)$; б) $\frac{1}{2}\log_{0,1}(6+x)\leqslant\log_{0,1}x$;

в) $\log_{49}(2x-1)>\log_7(x-2)$; г)* $\log_9(3-4x)^2\leqslant\log_3 x$.

3.236*. Выполните анализ условия и решите неравенство $2\log_{0,5}(x-2)\geqslant 1+\log_{0,5}(x^2-x-2)$.

3.237*. Решите неравенство, используя переход к равносильным системам неравенств:

а) $\log_2 \log_{0,5} \frac{3x+4}{4x-8} \leqslant 0$; б) $\log_{0,2} \log_2 \log_{0,5}(2x-3) \geqslant 0$.

3.238*. Решите неравенство $\log_{0,2}(x^2 - x - 20) + \log_5(x+4) > \lg 1$.

3.239*. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$\log_{0,5}(x^2 - 3x + 4) - \log_{0,5}(x-1) < \log_{0,5} 2.$$

3.240*. Решите неравенство $\log_{\lg 7}(x^2 + 3x) < \log_{\lg 7}(5x+1)$, используя свойства логарифмической функции.

3.241*. Решите неравенство:

а) $\log_x (x^2 - 3) < 0$; б) $\log_{x-2}(x^2 - 8x + 14) \geqslant 0$;

в) $\log_{x+2}(9x^2 + 15x - 6) < 2$; г) $\log_{x^2}(3 - 2x) > 1$.

3.242*. Найдите число целых решений неравенства $\log_{x+3}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) > 0$.

3.243*. Решите неравенство

$$\frac{1}{2}\log_{x+4}(x^2 + 2x + 1) \leqslant 3 - \log_{-x-1}(-x^2 - 5x - 4).$$

3.244. Решите логарифмическое неравенство:

а) $\log_3 x < 3$; б) $\log_{0,5} x \geqslant 1$;

в) $\log_5 x > -2$; г) $\log_{\frac{1}{6}} x \leqslant -3$.

3.245. Решите неравенство, учитывая область определения и свойство монотонности логарифмической функции:

а) $\log_7(3-x) < \log_7(4x+8)$; б) $\log_{0,4}(5x+1) \leqslant \log_{0,4}(3-4x)$;

в) $\log_5(2x+3) > \log_5(x-1)$; г) $\log_{0,3}(3x-2) \geqslant \log_{0,3}(x+1)$.

3.246. Представьте число в виде логарифма и решите неравенство:

а) $\log_{0,2}(1 - 2{,}4x) > -2$; б) $\log_{0,3}(4x - 15) \geqslant 0$;

в) $\log_{\frac{1}{6}}(1{,}6x + 36{,}8) \geqslant -2$; г) $2\log_{0,09}(6 - 0{,}3x) > -1$.

3.247. Решите неравенство:

а) $\log_3(x^2+8x)\leqslant 2$; б) $\log_8(x^2-4x+3)\leqslant 1$;

в) $\log_6(x^2-3x+2)\geqslant 1$; г) $\log_7(x^2-3)>0$.

3.248. Перейдите от данного неравенства к равносильной системе для решения неравенства:

а) $\log_{0,1}(x^2+1)<\log_{0,1}(2x-5)$; б) $\log_{\frac{1}{7}}(x^2+3x)<\log_{\frac{1}{7}}(5x-1)$;

в) $\log_{4,3}(x^2-9x)>\log_{4,3}(x-21)$; г) $\log_{5,7}(x^2-5x)\leqslant\log_{5,7}(2x-12)$.

3.249. Решите неравенство рациональным способом:

а) $\log_2\frac{3-x}{x+2}<1$; б) $\log_{\frac{1}{4}}\frac{5-x}{x-2}>-1$;

в) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{x+3}{x-2}>2$; г) $\log_{0,7}\frac{5-x}{x-2}<0$.

3.250. Решите неравенство двумя способами:

а) $\log_{\frac{1}{3}}(x+4)\geqslant\log_{\frac{1}{3}}16-\log_{\frac{1}{3}}(x-2)$;

б) $\log_5(2x+1)\leqslant\log_5 4-\log_5(x-3)$;

в) $\log_{0,5}(x-2)-\log_2(5-x)>-1$;

г) $\lg x+\lg(x-1)<\lg 6$.

3.251. Выполните замену переменной и решите неравенство:

а) $\log_3^2 x-9<0$; б) $\log_2^2 x-3\log_2 x\leqslant 4$;

в) $\log_3^2 x-5\log_3 x+6>0$; г) $6\leqslant\log_3^2 x+\log_3 x$.

3.252. Решите неравенство $2\log_{0,5}(1-x)<\log_{0,5}(3x+1)$.

3.253*. Решите неравенство $\log_2\log_{0,5}\frac{x+1}{x-3}\geqslant 1$.

3.254*. Решите неравенство, учитывая область определения и свойство монотонности логарифмической функции:

а) $\log_{x-1}(x^2-6x+7)<0$; б) $\log_{1-x}(2x^2+3x+1)\geqslant 2$.

3.255. Между какими двумя последовательными целыми числами находится на числовой прямой число:

а) $\log_2 29$; б) $\log_{\frac{1}{2}} 9$?

3.256. Какое из данных равенств неверное:

а) $\sqrt[3]{64} = 4$; б) $3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$; в) $\log_2 1 = 0$; г) $\arccos \frac{\pi}{2} = 1$?

3.257. Работниками телевидения был проведен опрос среди молодежи о времени просмотра телевизионных программ. Всего было опрошено 1000 человек. Зависимость числа зрителей от времени суток показана на диаграмме (рис. 36).

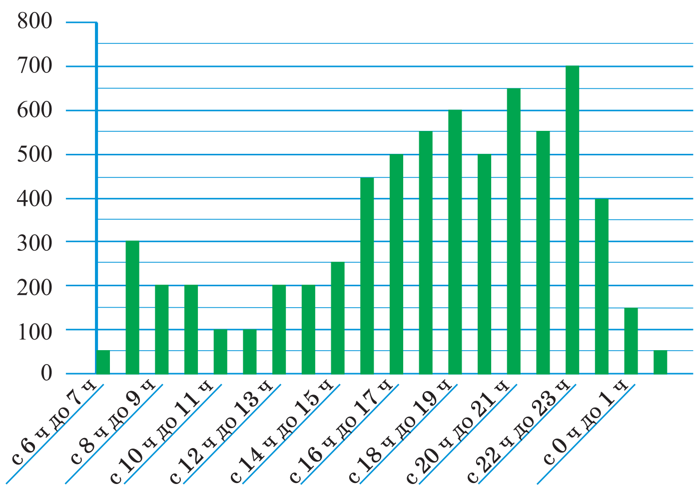

Рис. 36

а) В какие периоды времени число человек, смотрящих телевизор, не меньше 500? Какой процент от всего времени показа составляет время, когда телевизор смотрят не меньше 500 человек?

б) Определите, сколько зрителей в среднем смотрят телевизор каждый час вещания.

3.258. Сравните $\log_{4\sqrt{2}} 128$ и $\log_{0,2} 0,0016$.

3.259. Найдите значение выражения $(-0,2)^3 - \sqrt{(-0,2)^2}$.

3.260. Среди рисунков 37, *а—г* выберите тот, на котором изображен график некоторой функции $y = f(x)$.

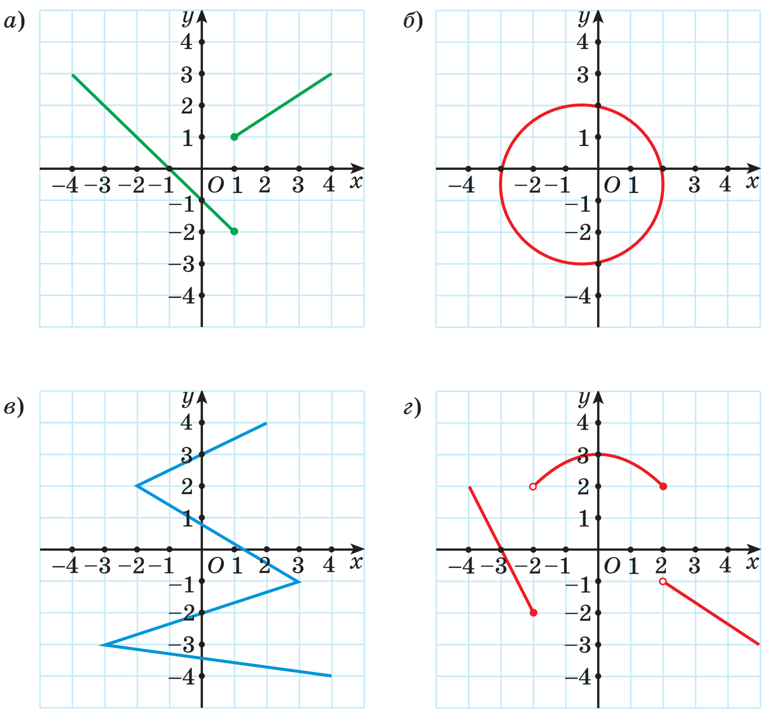

Рис. 37

3.261. Найдите все корни уравнения $\sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3.262. Вычислите: $\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} - 8^{-1\frac{2}{3}} + 7 \cdot (12^0)^{-2} + 32 \cdot 2^{-4} \cdot 16^{-\frac{3}{2}}$.

3.263. Решите иррациональное уравнение:

а) $x - 1 = \sqrt{x + 5}$; б) $\sqrt[6]{x^6 + x^2 - x - 2} = x$.

3.264. Найдите значение производной функции $y = \frac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$ в точке $x = 1$.

3.265. Найдите абсциссу точки пересечения графиков функций $y = \log_2 x$ и $y = 5 - \log_2 (x + 4)$.

3.266. Найдите значение выражения:

а) $2\sin 22{,}5^\circ \cos 22{,}5^\circ$; б) $\cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ$; в) $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$.

3.267. Найдите область определения функции:

а) $f(x)=\sqrt[4]{1-\left(\frac{1}{3}\right)^x}$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[6]{5^{x^2-x}-25}}$.

3.268. Найдите сумму целых решений неравенства $\dfrac{(3+x)^2}{5-x}\leqslant 0$, принадлежащих промежутку $[-4; 7]$.

3.269. Решите логарифмическое уравнение:

а) $\log_5(3x-4)=\log_5(12-5x)$; б) $\log_3(x^2+3x-7)=1$;

в) $\lg(x-1)+\lg(x+1)=\lg(9x+9)$; г) $3\log^2_{\frac{1}{8}} x+5\log_{\frac{1}{8}} x-2=0$.

3.270. Дана арифметическая прогрессия, где $a_n=2n+1$. Найдите сумму ее членов с 11-го по 20-й включительно.

3.271. Решите уравнение $f'(x)=0$, если $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x}$.

3.272. Найдите область определения функции

$f(x)=(x^2-4x+3)^{0,7}+(9-x^2)^{-\frac{1}{3}}$.

3.273. Решите систему уравнений $\begin{cases}2^x+2^y=6,\\ 3\cdot 2^x-2^y=10.\end{cases}$

3.274. Функция $y=f(x)$ является четной, а функция $y=g(x)$ — нечетной. Известно, что $f(-3)=-4$, а $g(-2)=3$. Найдите значение выражения $3f(3)+5g(2)$.

3.275. Решите неравенство $2^{3x+10}-3^{3x+9}+2^{2x+9}+3^{3x+7}<0$.

3.276*. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_a\frac{a}{b}\cdot(\log_a b+\log_b a+1)}{1-\log_a^3 b}$, если $a=b^4$.

Итоговая самооценка

После изучения этой главы я должен:
- знать определение и свойства логарифмов;
- знать свойства логарифмической функции;

- знать способы решения логарифмических уравнений;
- знать способы решения логарифмических неравенств;
- уметь выполнять построение графиков логарифмических функций для различных оснований;
- уметь применять свойства логарифмов для вычислений, упрощения выражений, сравнения значений выражений;
- уметь применять свойства логарифмической функции для решения логарифмических уравнений;
- уметь применять функциональный подход для решения логарифмических уравнений и неравенств;
- уметь решать логарифмические неравенства на основании свойств логарифмической функции;
- уметь применять свойства логарифмической функции для решения практических задач.

Я проверяю свои знания

1. Областью определения функции $y = \log_2(x-1)$ является промежуток:

а) $(-\infty;\ 1)$; б) $[1;\ +\infty)$; в) $(1;\ +\infty)$;
г) $(0;\ +\infty)$; д) $(-\infty;\ +\infty)$.

Выберите правильный ответ.

2. Логарифмическая функция задана формулой $f(x) = \log_5 x$. Выберите верное равенство:

а) $f(25) = 10$; б) $f(25) = \sqrt{5}$;

в) $f(25) = \log_2 5$; г) $f(25) = 2$.

3. Определите, возрастающей или убывающей является логарифмическая функция:

а) $y = \log_{1,5} x$; б) $y = \log_{0,4} x$;

в) $y = \log_{\sqrt{3}} x$; г) $y = \log_{\frac{3}{7}} x$.

4. Постройте график функции:

а) $y = \log_3 x$; б) $y = \log_{0,5} x$.

5. Вычислите:

а) $\log_5 12{,}5 + \log_5 2$;

б) $\log_2 6 - \log_2 192$;

в) $\log_{16} \sqrt[5]{8}$;

г) $\log_4 91 - \log_4 13 + \log_4 \frac{2}{7}$.

6. Решите уравнение:

а) $\log_5 (3x - 2) = 2$;

б) $\lg\left(x^2 - 6\right) - \lg x = 0$;

в) $\log_4 x + \log_4 (x - 3) = 1$;

г) $\log_4^2 x - 3\log_4 x + 2 = 0$.

7. Решите неравенство:

а) $\log_{0,8} (2 - x) \geqslant 2$;

б) $\lg(3x - 2) \geqslant 1$;

в) $\log_{0,4} \left(x^2 + x - 4\right) \leqslant \log_{0,4} x$;

г) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{2x - 1}{x + 2} > 1$;

д) $\log_3^2 x - 5\log_3 x + 4 \leqslant 0$.

8. Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_3 x + 2\log_3 y = 3, \\ 2\log_3 x - \log_3 y = 6. \end{cases}$

9. Решите неравенство $0{,}4^{\log_3 \frac{x}{3} \cdot \log_3 (3x)} > 6{,}25^{\log_3 x^2 + 2}$.

10. Найдите наименьшее целое число из множества значений функции $y = \log_2 (x^2 - 2x + 65)$.

Дополнительные материалы к учебному пособию «Алгебра, 11» можно найти на сайте http://e-vedy.adu.by, курс «Математика. 11 класс».