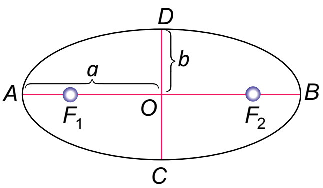
Кантрольныя пытанні і заданні

1. Пералічыце асаблівасці сутачнага руху Сонца на розных шыротах.
2. Ці можа Сонца назірацца ў зеніце ў Беларусі? Чаму?
3. Чаму Месяц павернуты да Зямлі заўсёды адным і тым жа бокам?
4. У чым адрозненне сідэрычнага і сінадычнага месяцаў? Чым абумоўлена іх розная працягласць?
5. Што разумеюць пад месяцавай фазай? Апішыце фазы Месяца.
6. Серп Месяца павернуты выпукласцю ў правы бок і блізкі да гарызонту. У якім баку гарызонту ён знаходзіцца?
7. Чаму адбываюцца сонечныя і месяцавыя зацьменні?
8. Ахарактарызуйце поўныя, частковыя і кольцападобныя сонечныя зацьменні.
9. Як адрозніць фазу зацьмення Месяца ад адной з яго звычайных фаз?
10. Чаму сонечныя зацьменні адбываюцца не кожны маладзік, а месяцавыя — не кожную поўню?
11. Што такое сарас? Якая яго перыядычнасць?

§ 8. Законы Кеплера

1. Першы закон Кеплера. Да канца XVI ст. вучоным не ўдавалася дакладна вылічыць адноснае месцазнаходжанне планет на некалькі гадоў наперад з дапамогай тэорый, якія існавалі ў той час. Тэарэтычныя вылічэнні прыкметна адрозніваліся ад вынікаў назіранняў. Прычына была ў памылковым меркаванні, што планеты раўнамерна рухаюцца па строга кругавых арбітах вакол Сонца. Кінематычныя законы руху планет былі адкрыты толькі ў пачатку XVII ст. аўстрыйскім астраномам і матэматыкам Іаганам Кеплерам. Ён першым разбурыў укаранелыя піфагарэйскія погляды аб «дасканаласці» арбіт планет, калі паказаў іх эліптычнасць.

Кеплер устанавіў, што *планеты рухаюцца па эліпсах, у адным з фокусаў якіх знаходзіцца Сонца.* Гэта заканамернасць атрымала назву **першага закону Кеплера.**



Рыс. 37. Элементы эліпса

Адрэзак AB (рыс. 37) называецца **вялікай воссю**, а адрэзак CD — **малой воссю** эліпса. Адрэзкі $AO = OB = a$, $CO = OD = b$ называюцца адпаведна **вялікай** і **малой паўвосямі** эліпса. Суадносіна

$$e = \frac{OF_1}{a} = \frac{OF_2}{a} \quad (1)$$

называецца **эксцэнтрысітэтам** эліпса. Чым большы эксцэнтрысітэт эліпса, тым больш зрушаны фокусы адносна цэнтра і тым большай будзе рознасць паміж вялікай і малой паўвосямі. Гэта значыць, што эксцэнтрысітэт з'яўляецца мерай «сплясканасці» эліпса.

Для эліпса $0 < e < 1$. Адзначым, што пры $e = 0$ можна разглядаць акружнасць як асобны від эліпса ($b = a$).

Будзем меркаваць, што калі Сонца знаходзіцца ў фокусе F_1, то найбліжэйшы да Сонца пункт (A) арбіты планеты называецца **перыгеліем**, а найбольш аддалены (B) — **афеліем**. Абазначым $AF_1 = q$ (q — **перыгелійная адлегласць**), а $BF_1 = Q$ (Q — **афелійная адлегласць**). З рысунка 37 вынікае, што $q + OF_1 = a$. З формулы (1) выразім $OF_1 = a \cdot e$, тады

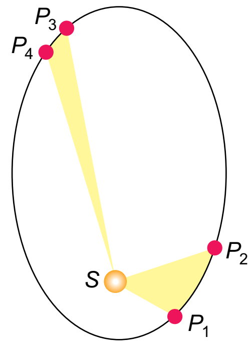
$$\boxed{q = a - a \cdot e = a(1 - e),} \tag{2}$$

$$\boxed{Q = a(1 + e).} \tag{3}$$

У зямной арбіты эксцэнтрысітэт роўны 0,017. Зямля бывае ў перыгеліі ў пачатку студзеня, і перыгелійная адлегласць роўна 147 млн км, а ў афеліі — у пачатку чэрвеня, і афелійная адлегласць роўна 152 млн км.

2. Другі закон Кеплера. Пры вывучэнні руху Марса ў прасторы Кеплер заўважыў, што планета рухаецца па арбіце нераўнамерна — зімой хутчэй, чым летам. Ён пачаў шукаць заканамернасць, паводле якой адбываецца змяненне скорасці Марса, і прапанаваў гіпотэзу, што скорасць павінна быць адваротна прапарцыянальнай адлегласці ад Марса да Сонца. Для пунктаў перыгелія і афелія гіпотэза пацвердзілася. Тады Кеплер умоўна падзяліў арбіту Марса на 360 частак і пачаў правяраць сваю гіпотэзу для кожнай з гэтых частак. Назіранні і разлікі паказалі, што за роўныя прамежкі часу Марс праходзіць роўныя плошчы сектараў арбіты.

Сучасная фармулёўка гэтай залежнасці распаўсюджваецца на ўсе планеты, носіць назву **другога закону Кеплера** і гучыць наступным чынам: *радыус-вектар планеты* (лінія, што злучае цэнтр Сонца і цэнтр планеты) *апісвае за роўныя прамежкі часу роўныя плошчы*.



Рыс. 38. Адлюстраванне другога закону Кеплера

Другі закон Кеплера, або закон плошчаў, адлюстраваны на рысунку 38. Пры руху планеты (P) вакол Сонца (S) яе радыус-вектар за аднолькавыя прамежкі часу апісвае роўныя па плошчы фігуры — P_1SP_2 і P_3SP_4. Такім чынам, скорасць руху планеты па арбіце змяняецца і мае максімальнае значэнне ў перыгеліі, а мінімальнае — у афеліі.

3. Трэці закон Кеплера. Пры параўнанні памераў арбіт і перыядаў абарачэння планет вакол Сонца Кеплер выявіў, што квадраты перыядаў абарачэння планет прапарцыянальны кубам іх сярэдніх адлегласцей ад Сонца (або што адносіна $\frac{r^3}{T^2}$ аднолькавая для ўсіх планет).

Трэці закон Кеплера фармулюецца наступным чынам: *квадраты сідэрычных перыядаў абарачэння дзвюх планет адносяцца як кубы вялікіх паўвосей іх арбіт*:

$$\boxed{\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.} \quad (4)$$

Калі ў гэтай формуле прыняць сідэрычны перыяд абарачэння Зямлі вакол Сонца роўным 1 (адзін год) і вялікую паўвось зямной арбіты роўнай 1 (адна астранамічная адзінка (а. адз.), гл. § 10), то формула (4) атрымае выгляд:

$$\boxed{T = \sqrt{a^3}.} \quad (5)$$

На аснове адкрытых законаў пасля шматгадовых вылічэнняў Кеплер у 1627 г. склаў табліцы, па якіх можна было вызначыць месцазнаходжанне кожнай планеты на небе ў любы момант часу.

! Галоўныя вывады

1. Усе планеты рухаюцца па эліптычных арбітах, у адным з фокусаў якіх знаходзіцца Сонца.
2. За роўныя прамежкі часу радыус-вектары планет апісваюць роўнавялікія плошчы.
3. Квадраты сідэрычных перыядаў абарачэння дзвюх планет адносяцца як кубы вялікіх паўвосей іх арбіт.
4. Законы Кеплера ўдакладняюць вучэнне Каперніка, у якім арбіты нябесных цел лічыліся акружнасцямі.

Кантрольныя пытанні і заданні

1. Сфармулюйце законы Кеплера.

2. Ці змяняецца скорасць планеты, якая рухаецца па эліптычнай арбіце? Кругавой арбіце?

3. У колькі разоў афелійная адлегласць большая за перыгелійную, калі эксцэнтрысітэт арбіты роўны 0,5?

4. У Зямлі эксцэнтрысітэт арбіты роўны 0,017, а ў Марса — 0,093. Арбіта якой з планет больш выцягнутая?

5. Прыміце арбіты Зямлі і Марса кругавымі і разлічыце працягласць года на Марсе. Пры рашэнні задачы ўлічыце, што Марс знаходзіцца ў 1,5 раза далей ад Сонца, чым Зямля.

6. Знайдзіце перыгелійную і афелійную адлегласці астэроіда Беларусь, калі яго вялікая паўвось і эксцэнтрысітэт арбіты адпаведна роўны 2,405 а. адз. і 0,181. На якую мінімальную адлегласць ён набліжаецца да Зямлі?

§ 9. Закон сусветнага прыцягнення Ньютана

1. Нябесная механіка. Пасля з'яўлення работ Каперніка, Галілея і Кеплера да сярэдзіны XVII ст. скончыўся апісальны (ці геаметрычны) перыяд вывучэння руху планет. Была выяўлена кінематыка іх руху, аднак заставалася нявысветленым, чаму планеты рухаюцца. Што прымушае іх абарачацца вакол Сонца, а спадарожнікі — вакол планет? Чым тлумачыцца ўстойлівасць планетнай сістэмы?

Усе матэрыяльныя целы, калі яны нічым не падтрымліваюцца, падаюць пад дзеяннем сілы цяжару на паверхню Зямлі. Пакуль Зямля лічылася цэнтральным целам Сусвету, сіла цяжару разглядалася толькі як зямная з'ява. Аднак адкрыцці Каперніка і яго паслядоўнікаў паказалі, што Зямля — гэта радавая планета, якая рухаецца вакол Сонца, як і іншыя планеты. У сувязі з гэтым з'явілася меркаванне, што сіла цяжару ўласціва не толькі Зямлі, але і іншым нябесным целам. На матэрыяльныя целы, якія знаходзяцца каля іншых планет, Месяца ці Сонца, дзейнічае сіла цяжару, накіраваная да іх цэнтра гэтаксама, як на Зямлі. Такім чынам, дзякуючы распаўсюджанасці ўласцівасці цяжару на іншыя нябесныя целы было пастаўлена пытанне аб узаемадзеянні цел.

На аснове трэцяга закону Кеплера і закону дынамікі матэрыяльнага пункта Ньютан строга матэматычна абгрунтаваў **закон сусветнага прыцягнення**, які фармулюецца наступным чынам: *два целы прыцягваюцца адно да аднаго з сілай, прапарцыянальнай здабытку мас гэтых цел і адваротна прапарцыянальнай квадрату адлегласці паміж імі.*

Матэматычна закон сусветнага прыцягнення можна запісаць у выглядзе:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{1}$$

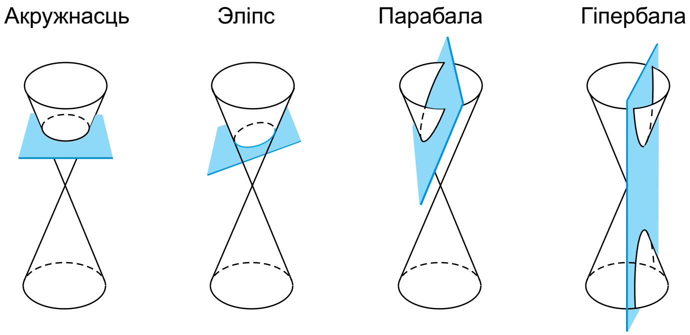
дзе m_1 і m_2 — масы двух цел, якія прыцягваюцца адно да аднаго, r — адлегласць паміж імі. Каэфіцыент прапарцыянальнасці G (G = 6,673 · 10^{-11} Н · м^2/кг^2) называюць **пастаяннай прыцягнення** або **гравітацыйнай пастаяннай**, ён з'яўляецца адной з асноўных фізічных канстант.

Формула (1) справядлівая для цел (матэрыяльных пунктаў), памеры якіх мізэрныя ў параўнанні з адлегласцю паміж імі. Два працяглыя шарападобныя целы са сферычна-сіметрычным размеркаваннем мас прыцягваюцца адно да аднаго гэтаксама, як матэрыяльныя пункты, г. зн. як калі б іх масы былі засяроджаны ў цэнтрах цел. Адлегласць r трэба адлічваць ад цэнтраў гэтых цел.

На аснове закону сусветнага прыцягнення і законаў механікі Ньютан матэматычна даказаў, што пад дзеяннем сілы прыцягнення цела масай m будзе рухацца адносна цела масай M па адной з крывых: эліпсе, акружнасці, парабале або гіпербале.

Такім чынам, Ньютан удакладніў і абагульніў першы закон Кеплера, які ў новай фармулёўцы гучыць так: *пад дзеяннем прыцягнення адно нябеснае цела рухаецца ў полі прыцягнення другога нябеснага цела па адным з канічных сячэнняў — эліпсе, акружнасці, парабале або гіпербале* (рыс. 39). *Пры руху па эліпсе цела, якое прыцягвае, заўсёды знаходзіцца ў адным з яго фокусаў.*

Навука, якая грунтуецца на законах Кеплера і Ньютана і вывучае рух нябесных цел, называецца **нябеснай механікай**. Нябесная механіка даследуе рух



Рыс. 39. Атрыманне арбітальных крывых пры сячэнні конуса плоскасцю

нябесных цел з улікам ствараемых імі палёў прыцягнення. Асноўная задача гэтай навукі ў тым, каб, ведаючы пачатковае месцазнаходжанне цела (матэрыяльнага пункта) і яго пачатковую скорасць, вызначыць яго месцазнаходжанне ў любы момант часу.

2. Узбурэнні ў руху нябесных цел. Рух цел, якія строга падпарадкоўваецца законам Кеплера, называецца **няўзбураным**. Такая ідэалізацыя прадугледжвае ўлік узаемадзеяння толькі двух цел і апісвае, напрыклад, рух планеты пад дзеяннем толькі прыцяжэння Сонца. Задача двух цел была поўнасцю рэшана Ньютанам (закон сусветнага прыцягнення).

Сапраўдны рух цел Сонечнай сістэмы значна больш складаны. Гэта тлумачыцца тым, што целы Сонечнай сістэмы не толькі прыцягваюцца Сонцам, але і ўзаемадзейнічаюць паміж сабой. Адхіленні ў руху цел ад законаў Кеплера называюцца **ўзбурэннямі**, а рэальны рух цел — **узбураным** рухам.

Рашэнне ўраўнення руху нават для трох цел — задача выключнай складанасці, аднак аналіз узбурэнняў дазваляе даволі дакладна вызначыць масу і месцазнаходжанне ўзбураючага цела. Найбольш яскравым прыкладам такога аналізу стала адкрыццё планеты Нептун на аснове аналізу ўзбурэнняў у руху Урана.

Яшчэ адным прыкладам праяўлення ўзбураючай сілы з'яўляюцца **прылівы** і **адлівы**. Водная абалонка і зямная кара (у меншай ступені) злёгку выцягваюцца ў абодва бакі ўздоўж лініі, што злучае Зямлю з Месяцам. Прыліўныя хвалі ў акіянах і морах ідуць адна за адной з усходу на захад з інтэрвалам каля 12 г 25 мін. Прыліўнае трэнне запавольвае вярчэнне Зямлі, што прыводзіць да павелічэння працягласці зямных сутак на 0,0014 секунды за стагоддзе.

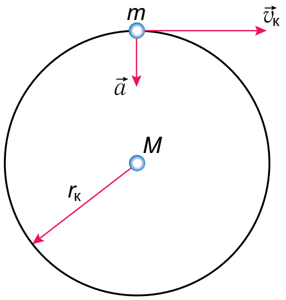
3. Вызначэнне масы Зямлі. Адной з найважнейшых характарыстык нябеснага цела з'яўляецца яго маса. Закон сусветнага прыцягнення дазваляе вызначаць масы нябесных цел, у тым ліку і масу Зямлі.

На цела масай m, якое знаходзіцца каля паверхні Зямлі, дзейнічае сіла цяжару $F = mg$, дзе g — паскарэнне свабоднага падзення. Калі цела рухаецца толькі пад дзеяннем сілы цяжару, то паводле закону сусветнага прыцягнення (1) паскарэнне свабоднага падзення роўна: $g = G\frac{M}{R_{\oplus}^2}$ і накіравана да цэнтра Зямлі.

Такім чынам, ведаючы, што паскарэнне свабоднага падзення $g = 9{,}81$ м/с^2, $G = 6{,}673 \cdot 10^{-11}$ Н · м^2/кг^2 і радыус Зямлі $R_{\oplus} = 6370$ км, можна па формуле $M = \frac{gR_{\oplus}^2}{G}$ вылічыць масу Зямлі: $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ кг.

Сярэднюю шчыльнасць Зямлі можна вызначыць, ведаючы яе масу і аб'ём. Яна роўна $5{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3.

4. Вызначэнне мас нябесных цел. Масы нябесных цел можна вызначыць некалькімі спосабамі.



Рыс. 40. Кругавы рух цел

1. Вымярэннем сілы цяжару на паверхні дадзенага нябеснага цела (гравіметрычны спосаб).

2. На аснове трэцяга абагульненага закону Кеплера.

Першы спосаб у дачыненні да Зямлі мы разгледзелі вышэй.

Перш чым разглядаць другі спосаб, давайце праверым выкананне трэцяга закону Кеплера для выпадку кругавога руху планеты са скорасцю $v_к$.

Няхай цела масай m рухаецца з лінейнай скорасцю $v_к$ вакол цела масай M ($m \ll M$) па акружнасці радыуса $r_к$ (рыс. 40). Гэта магчыма, калі рух адбываецца пад дзеяннем сілы, якая стварае цэнтраімклівае паскарэнне $a = \frac{v_к^2}{r_к}$. Сілай, якая стварае цэнтраімклівае паскарэнне, з'яўляецца сіла прыцягнення, роўная $\frac{GMm}{r_к^2}$. Калі прыраўнаваць $\frac{v_к^2}{r_к}$ да паскарэння $\frac{GM}{r_к^2}$, ствараемага прыцягненнем, то атрымаецца, што

$$\boxed{v_к^2 = \frac{GM}{r_к}.} \qquad (2)$$

Калі перыяд абарачэння цела масай m вакол цела масай M будзе роўны T, то лінейная скорасць руху гэтага цела па арбіце будзе роўна

$$\boxed{v_к = \frac{2\pi r_к}{T}.} \qquad (3)$$

Падставіўшы (3) у (2), атрымаем: $\left(2\pi\frac{r_к}{T}\right)^2 = \frac{GM}{r_к}$,

$$\boxed{\frac{r_к^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}.} \qquad (4)$$

Для эліптычнага руху формула (4) таксама будзе справядлівая, калі замест радыуса акружнасці $r_к$ падставіць вялікую паўвось a эліптычнай арбіты. У гэтым выпадку атрымаем суадносіну:

$$\boxed{\frac{a^3}{T^2 M} = \frac{G}{4\pi^2},} \qquad (5)$$

якую можна сфармуляваць наступным чынам: *адносіна куба вялікай паўвосі арбіты цела да квадрата перыяду яго абарачэння і масы цэнтральнага цела ёсць велічыня пастаянная.*

Калі масу m меншага цела нельга не ўлічваць у параўнанні з масай M цэнтральнага цела, то ў трэці закон Кеплера, як паказаў Ньютан, замест масы M увойдзе сума мас $(M + m)$ і адносіна (5) атрымае выгляд

$$\boxed{\frac{a^3}{T^2(M+m)} = \frac{G}{4\pi^2}.} \qquad (6)$$

Абагульніўшы формулу (6) для двух нябесных цел масамі M_1 і M_2, атрымаем удакладнены **трэці закон Кеплера**:

$$\boxed{\frac{T_1^2(M_1+m_1)}{T_2^2(M_2+m_2)} = \frac{a_1^3}{a_2^3},} \qquad (7)$$

г. зн. квадраты сідэрычных перыядаў спадарожнікаў (T_1^2 і T_2^2), памножаныя на суму мас галоўнага цела і спадарожніка ($M_1 + m_1$ і $M_2 + m_2$), адносяцца як кубы вялікіх паўвосей арбіт спадарожнікаў (a_1^3 і a_2^3) (7).

На аснове ўдакладненага Ньютанам (7) трэцяга закону Кеплера другім спосабам можна вылічыць масы планет, якія маюць спадарожнікі, а таксама масу Сонца.

Масы планет, якія не маюць спадарожнікаў, можна вызначыць па ўзбурэннях, якія яны выклікаюць у руху Зямлі, Марса, астэроідаў, камет, а таксама па ўзбурэннях, якімі яны ўздзейнічаюць адна на адну.

Галоўныя вывады

1. Закон сусветнага прыцягнення і законы Кеплера — аснова нябеснай механікі.
2. Рэальны рух нябесных цел — узбураны рух, абумоўлены прыцяжэннем не толькі Сонца, але і іншых нябесных цел.
3. Удакладнены Ньютанам трэці закон Кеплера дазваляе вызначаць масы планет, якія маюць спадарожнікі, масу Месяца і Сонца.

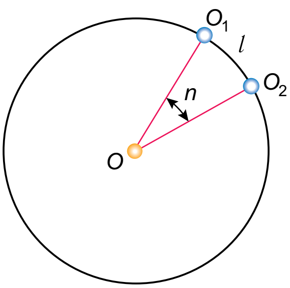
Кантрольныя пытанні і заданні

1. Якія задачы рашае нябесная механіка?
2. Сфармулюйце закон сусветнага прыцягнення. Якія асаблівасці выкарыстання гэтага закону для правядзення разлікаў?
3. Як разумеюць у астраноміі «задачу двух цел»? «Задачу трох цел»?
4. Як Ньютан абагульніў законы Кеплера?
5. Вызначце масу планеты Уран (у масах Зямлі), калі вядома, што спадарожнік Урана Тытанія абарочваецца вакол яго з перыядам 8,7 сут на сярэдняй адлегласці 438 тыс. км. Для Месяца гэтыя велічыні роўны адпаведна 27,3 сут і 384 тыс. км.
6. Вызначце сярэднюю шчыльнасць Сонца, калі перыяд абарачэння Зямлі вакол Сонца прыняць роўным 365 сут. Пры разліках прыняць радыус зямной арбіты роўным 150 млн км, а радыус Сонца — 700 тыс. км.
7. Вызначце паскарэнне сілы цяжару на паверхні Марса, калі вядома, што маса Марса роўна $6{,}4 \cdot 10^{23}$ кг, а яго радыус роўны 3396 км.
8. У колькі разоў менш будзе важыць чалавек на Марсе, чым на Зямлі, калі маса Марса роўна $6{,}4 \cdot 10^{23}$ кг, а яго радыус роўны 3396 км?

§ 10. Вызначэнне памераў нябесных цел і адлегласцей да іх у Сонечнай сістэме

1. Вызначэнне памераў Зямлі. Першы вядомы навуцы метад вызначэння памераў Зямлі выкарыстаў грэчаскі вучоны Эратасфен. Ён выбраў два гарады, што ляжаць на адным і тым жа геаграфічным мерыдыяне зямнога шара — Александрыю (O_1) і Сіену (O_2) (рыс. 41). На рысунку бачна, што калі абазначыць даўжыню дугі мерыдыяна O_1O_2 праз l, а яе вуглавое значэнне праз n (у градусах), то даўжыня дугі 1° мерыдыяна l_0 будзе роўна:

$$l_0 = \frac{l}{n},$$



Рыс. 41. Вылічэнне радыуса Зямлі

а даўжыня ўсёй акружнасці мерыдыяна:

$$L = 360° \cdot l_0 = \frac{360° \cdot l}{n} = 2\pi R,$$

дзе R — радыус зямнога шара. Адсюль

$$R = \frac{180° \cdot l}{\pi n}.$$