6. Измеряя пульс, определите частоту ν колебаний (биений) сердца у себя, а также у родных, например у папы, мамы, брата, сестры, дедушки, бабушки. Проверьте, соответствует ли это норме (см. табл. 2).

Таблица 2. **Нормы пульса по возрастам**

Возраст (годы)	Допустимые значения числа ударов в минуту
4—6	86—126
6—8	70—118
8—10	68—108
10—12	60—100
12—15	55—95
15—50	60—80
50—60	64—84
60—80	69—89

§1-1

§ 2. Пружинный и математический маятники

Груз, подвешенный на нити, колеблющийся в поле тяжести Земли, а также груз, прикрепленный к пружине, — примеры наиболее простых механических колебательных систем. Рассмотрим физические процессы, происходящие в таких системах.

Совокупность нескольких тел образуют механическую систему. Тела, не входящие в систему, называются внешними.

Второй закон Ньютона (основной закон динамики): ускорение, приобретаемое телом под действием приложенных к нему сил, обратно пропорционально массе тела, направлено по результирующей этих сил и прямо пропорционально ее модулю:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N}{m}.$$

Закон Гука: при упругих деформациях сжатия и растяжения модуль силы упругости прямо пропорционален модулю изменения длины тела:

$$F_{\text{упр}} = k\left|l - l_0\right| = k\left|\Delta l\right|,$$

где k — жесткость тела, l_0 — длина недеформированного тела, l — длина деформированного тела. Направление силы упругости всегда противоположно направлению смещения при деформации.

Правообладатель Народная асвета

Какие условия необходимы для возникновения колебаний?

Результаты опытов показывают, что для возникновения и существования механических колебаний тело изначально необходимо привести в движение. Это можно сделать, отклоняя его от положения равновесия или придавая ему начальную скорость посредством толчка. Этим отклонением или толчком определяется амплитуда колебаний. Кроме того, при выведении тела из положения равновесия в колеблющейся системе должна возникать результирующая сила, стремящаяся возвратить тело в положение равновесия.

Простейшая колебательная система, состоящая из тела с прикрепленной к нему пружиной, связывающей тело и опору, называется **пружинным маятником**. Пружина может располагаться как горизонтально (*горизонтальный пружинный маятник*), так и вертикально (*вертикальный пружинный маятник*).

Рассмотрим колебания **горизонтального пружинного маятника**.

Пусть тело массой m, лежащее на гладкой горизонтальной поверхности, прикреплено к свободному концу невесомой пружины жесткостью k (рис. 13, *а*). Второй конец пружины прикреплен к неподвижной опоре.

Выведем тело из положения равновесия, сместив его, например, вправо на расстояние x (см. рис. 13, *б*). При этом согласно закону Гука возникнет сила упругости $\vec{F}_{упр}$, приложенная к телу и направленная влево.

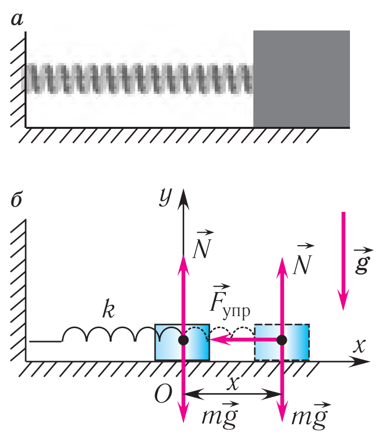

Рис. 13. *а* — горизонтальный пружинный маятник; *б* — силы, действующие на него

Согласно второму закону Ньютона будет выполняться равенство:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{упр} + m\vec{g} + \vec{N}. \qquad (1)$$

С учетом закона Гука из (1) получаем уравнение для проекций величин на ось Ox (см. рис. 13, *б*):

$$\boxed{ma_x = -kx.} \qquad (2)$$

Согласно (2) ускорение тела массой m пропорционально действующей силе и направлено к положению равновесия. При этом возникают колебания тела. Каждые полпериода направление движения меняется на

Правообладатель Народная асвета

противоположное. Смещение груза происходит то вправо, то влево относительно положения равновесия, т. е. оно меняет знак. Следовательно, и сила согласно (2) тоже меняет знак.

Перепишем полученное соотношение (2) в виде:

$$\boxed{a_x + \frac{k}{m}x = 0.} \qquad (3)$$

Уравнение (3) называется **уравнением гармонических колебаний** пружинного маятника.

Следовательно, **необходимым условием возникновения гармонических колебаний** является действие возвращающей силы, направленной к положению равновесия и прямо пропорциональной смещению тела от положения равновесия. Эта возвращающая сила всегда направлена к положению равновесия, о чем «говорит» минус в уравнении (2).

В *положении равновесия* возвращающая сила равна нулю ($F = 0$), так как $x = 0$. Поэтому если в этом положении колеблющееся тело остановить, то колебания исчезнут.

Расчеты показывают, а результаты экспериментов подтверждают, что при описанных условиях тело будет совершать колебания с периодом:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.} \qquad (4)$$

С учетом того, что период связан с циклической частотой соотношением $T = \frac{2\pi}{\omega}$, находим:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \qquad (5)$$

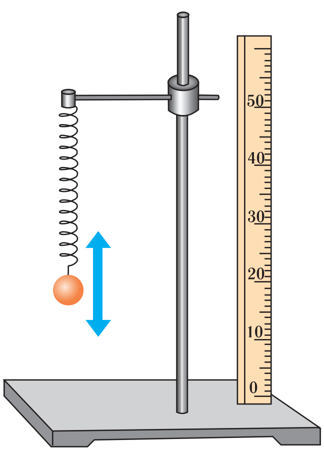

Рис. 14. Вертикальный пружинный маятник

Из формул (4) и (5) следует, что период и частота гармонических колебаний пружинного маятника определяются массой груза m и жесткостью пружины k и не зависят от амплитуды его колебаний.

Отметим, что период и циклическая частота колебаний **вертикального пружинного маятника** (рис. 14) также определяются по формулам (4) и (5).

Одной из наиболее распространенных колебательных систем является *математический маятник*. **Математическим маятником** называется небольшое тело массой m, подвешенное

Правообладатель Народная асвета

на невесомой нерастяжимой нити длиной l, находящееся в поле силы тяжести (рис. 15).

Рассмотрим колебания математического маятника.

Отклонение маятника от положения равновесия будем характеризовать углом α (рис. 16), который нить образует с вертикалью. После отклонения маятника от положения равновесия на него действуют две силы: направленная вертикально вниз сила тяжести $m\vec{g}$ и направленная вдоль нити сила упругости $\vec{F}_{упр}$. Под действием этих сил тело движется ускоренно к положению равновесия (точка B). Пройдя точку B, тело продолжает двигаться, но его скорость постепенно уменьшается, обращаясь в нуль в точке, симметричной точке A относительно вертикали. После этого оно начинает двигаться обратно к точке B.

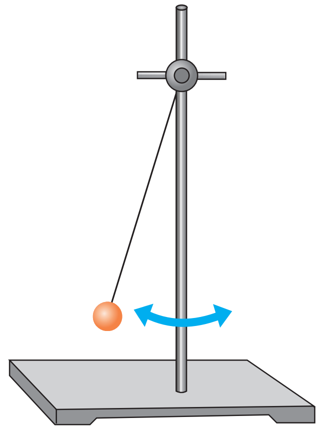

Рис. 15. Математический маятник

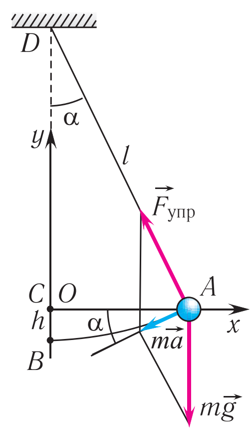

Рис. 16. Силы, действующие на математический маятник

Согласно второму закону Ньютона для движения маятника можем записать:

$$m\vec{g} + \vec{F}_{упр} = m\vec{a}. \qquad (6)$$

В проекциях на выбранные оси координат Ox и Oy (см. рис. 16) получаем:

$$-F_{упр}\sin\alpha = ma_x, \qquad (7)$$

$$-mg + F_{упр}\cos\alpha = ma_y. \qquad (8)$$

Поскольку при малых углах отклонения длина дуги $AB \approx x$, то из $\triangle AOD$ находим:

$$\sin\alpha = \frac{AC}{AD} = \frac{x}{l},$$

где x — отклонение маятника от положения равновесия, l — длина маятника.

Подставляя выражение для синуса в (7), получим:

$$-F_{упр}\sin\alpha \approx -F_{упр}\frac{x}{l} = ma_x. \qquad (9)$$

Таким образом, силой, возвращающей маятник к устойчивому положению равновесия при колебаниях, является сила упругости его нити и силы тяжести.

Правообладатель Народная асвета

При малых углах отклонения маятника проекция вектора ускорения $a_y \ll g$ и ей можно пренебречь, а $\cos\alpha \approx 1$, тогда из уравнения (8) следует $F_{упр} \approx mg$. Следовательно, уравнение движения маятника вдоль оси Ox запишется в виде:

$$ma_x = -\frac{mg}{l}x.$$

где a_x — проекция ускорения, сообщаемого грузу маятника силой упругости нити.

Откуда получаем уравнение колебаний математического маятника:

$$\boxed{a_x + \frac{g}{l}x = 0.} \qquad (10)$$

Сравнивая соотношения (10), (3) и (5), легко получить формулу для циклической частоты математического маятника в поле тяжести Земли:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \qquad (11)$$

Период малых колебаний математического маятника в поле тяжести Земли определяется по **формуле Гюйгенса**:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.} \qquad (12)$$

Используя соотношения (5) и (11), уравнение колебаний пружинного маятника $a_x + \frac{k}{m}x = 0$ и математического маятника $a_x + \frac{g}{l}x = 0$ можно записать в одинаковом виде:

$$a_x(t) + \omega^2 x(t) = 0. \qquad (13)$$

Таким образом, зависимости координат от времени $x(t)$, описываемые уравнениями (5) и (6) из § 1, удовлетворяют уравнению (13), которое называется уравнением гармонических колебаний.

Как видно из формул (11), (12), период и циклическая частота малых колебаний математического маятника не зависят от массы маятника и амплитуды его колебаний, а определяются только его длиной и ускорением свободного падения.

Правообладатель Народная асвета

Одним из важнейших достижений Х. Гюйгенса было изобретение часов с маятником. Он запатентовал свое изобретение 16 июля 1657 г. В 1673 г. вышло в свет его сочинение «Маятниковые часы», в котором были изложены теоретические основы его изобретения. Именно постоянство периода (частоты) колебаний маятника позволило использовать его для создания часов.

1. Какой маятник называют пружинным? Запишите кинематический закон движения пружинного маятника.
2. По какой формуле определяется циклическая частота колебаний пружинного маятника? Период его колебаний?
3. Изменится ли период колебаний пружинного маятника, если его «перенести» с поверхности Земли на поверхность Луны? Привести в состояние невесомости?
4. Какой маятник называют математическим? Запишите кинематический закон движения математического маятника.
5. Как направлена равнодействующая сил, приложенных к грузу маятника, в моменты, когда он находится в крайних положениях? Когда проходит через положение равновесия?
6. Маятниковые часы спешат. Как надо изменить длину подвеса, чтобы они шли точно?
7. Каким образом, используя математический маятник, можно определить ускорение свободного падения в данном месте?
8. Влияет ли изменение температуры на точность хода маятниковых часов?

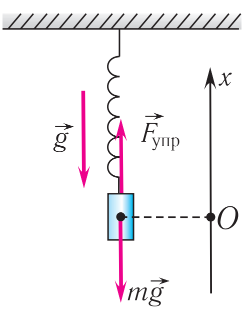

Рис. 17

Пример решения задачи

Определите циклическую частоту ω и период T тела массой $m = 500$ г, прикрепленного к вертикальной пружине (рис. 17). Известно, что в состоянии покоя тело растягивает пружину на расстояние $x_0 = 10$ мм и для возбуждения колебаний его смещают вниз на расстояние $x = 30$ мм и отпускают.

Дано:

$m = 500$ г $= 0{,}500$ кг
$x = 30$ мм $= 3{,}0 \cdot 10^{-2}$ м
$x_0 = 10$ мм $= 1{,}0 \cdot 10^{-2}$ м

ω — ? T — ?

Решение

Циклическая частота колебаний вертикального пружинного маятника, так же как и горизонтального, определяется по формуле:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Правообладатель Народная асвета

Найдем жесткость k пружины. Из условия равновесия тела следует:

$$\vec{F}_{\text{упр}} + m\vec{g} = \vec{0}.$$

По закону Гука в проекции на ось Ox имеем:

$$F_{\text{упр}x} = -k(-x_0).$$

Тогда в проекции на ось Ox условие равновесия запишется:

$$mg = kx_0, \quad k = \frac{mg}{x_0}.$$

Отсюда для циклической частоты ω получаем:

$$\omega = \sqrt{\frac{mg}{x_0 m}} = \sqrt{\frac{g}{x_0}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{1{,}0\cdot10^{-2}\,\text{м}}} = 31\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Период колебаний находим из соотношения:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{x_0}{g}}, \quad T = 2\cdot3{,}14\cdot\sqrt{\frac{1{,}0\cdot10^{-2}\,\text{м}}{9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}} = 0{,}20\ \text{с}.$$

Ответ: $\omega = 31\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}$, $T = 0{,}20$ с.

Упражнение 2

1. Определите период T и частоту ν колебаний груза массой $m = 200$ г, подвешенного на пружине жесткостью $k = 0{,}15\,\frac{\text{Н}}{\text{м}}$.
2. Определите длину l математического маятника на поверхности Земли, если частота его колебаний $\nu = 1{,}0$ Гц.
3. Определите жесткость k пружины маятника массой $m = 400$ г, совершающего колебания, представленные на рисунке 18.

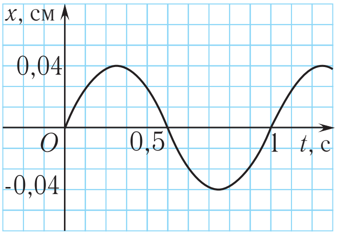

Рис. 18

4. Груз, подвешенный к пружине, вызывает ее удлинение на величину Δl. Определите Δl пружины, если циклическая частота вертикальных колебаний такой системы $\omega = 10\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}$.
5. Два тела с одинаковыми массами подвешены к двум одинаковым пружинам. Тела смещают вниз: одно на расстояние $x_1 = 10$ см, другое —

Правообладатель Народная асвета

на $x_2 = 20$ см, затем одновременно отпускают. Какое из них первым пройдет положение равновесия?

6. Один математический маятник совершил за некоторое время $N_1 = 20$ колебаний, а второй за то же время совершил $N_2 = 16$ колебаний. Определите длину l_2 второго маятника, если известно, что разность длин маятников $\Delta l = 10$ см.
7. Период малых колебаний математического маятника на поверхности Земли равен $T = 0{,}80$ с. Каким будет период T_1 его колебаний на поверхности Марса, если ускорение свободного падения $g_м = 0{,}37g_з$?
8. Определите длину l секундного маятника, установленного в Минске, где ускорение свободного падения $g = 9{,}815\ \frac{м}{с^2}$. Найдите относительную погрешность расчета, в котором ускорение свободного падения было бы принято равным $g = 10\ \frac{м}{с^2}$.

§ 3. Превращения энергии при гармонических колебаниях

При гармонических колебаниях полная механическая энергия системы остается неизменной, хотя скорость груза и его смещение непрерывно изменяются с течением времени. Какие превращения энергии наблюдаются в системе при этом? Как вычислить кинетическую или потенциальную энергию в любой момент времени?

Механическая энергия системы равна сумме ее кинетической и потенциальной энергий. Кинетической энергией тело обладает вследствие своего движения, а потенциальная энергия определяется взаимодействием тела с другими телами или силовыми полями. Механическая энергия замкнутой системы, в которой не действуют силы трения (сопротивления), сохраняется.

Привести в движение колебательную систему можно либо посредством отклонения ее из положения равновесия, либо сообщая телу начальную скорость (т. е. посредством толчка). В первом случае мы сообщаем системе дополнительную *потенциальную* энергию, а во втором — дополнительную *кинетическую* энергию.

Если силой трения можно пренебречь, то при колебаниях механическая энергия системы сохраняется. При этих условиях для данной системы выполняется закон сохранения механической энергии:

$$W = W_к + W_п = \text{const}.$$

Правообладатель Народная асвета

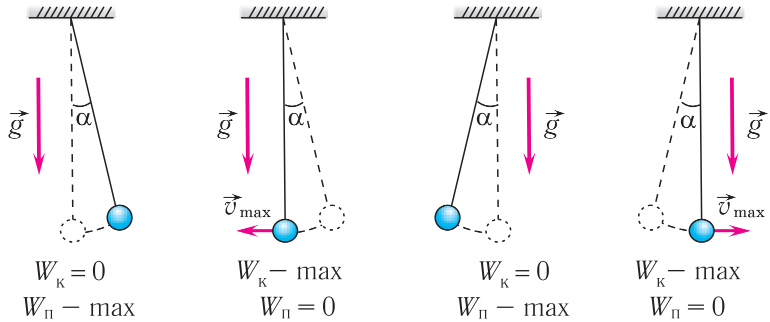

Рис. 19. Превращения энергии при колебаниях математического маятника

Рассмотрим превращения энергии при колебаниях математического маятника. Выберем систему отсчета таким образом, чтобы в положении равновесия его потенциальная энергия была равна нулю. При отклонении маятника на угол α_{max} (рис. 19, 20), соответствующий его максимальному смещению от положения равновесия (тело в точке C), потенциальная энергия маятника максимальна, а кинетическая энергия равна нулю:

$$(W_п)_{max} = mgh_{max}, \; W_к = 0.$$

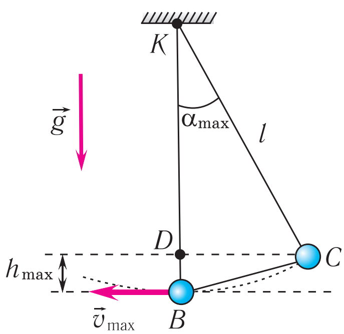

Рис. 20. Определение v_{max} и h_{max}

Поскольку в момент прохождения положения равновесия (тело в точке B) потенциальная энергия маятника равна нулю $W_п = 0$, то из закона сохранения механической энергии следует (см. рис. 20), что $(W_к)_B = (W_п)_C$, т. е. что кинетическая энергия маятника (а следовательно, и скорость) в этот момент будет максимальна:

$$(W_к)_{max} = \frac{mv_{max}^2}{2}, \; W_п = 0.$$

Таким образом, в положении равновесия потенциальная энергия маятника полностью переходит в кинетическую, а в положениях максимального отклонения — кинетическая энергия полностью переходит в потенциальную.

Приравнивая полные механические энергии маятника в точках C и B, получим:

$$\frac{mv_{max}^2}{2} = mgh_{max}. \qquad (1)$$

Правообладатель Народная асвета

Отсюда найдем модуль максимальной скорости маятника:

$$v_{max} = \sqrt{2gh_{max}}. \qquad (2)$$

В любом промежуточном положении

$$\frac{mv^2}{2} + mgh = \text{const} = (W_к)_{max} = (W_п)_{max} = W_{мех}.$$

Покажем, что аналогичные превращения энергии имеют место и для пружинного маятника (рис. 21).

В крайних точках, когда $x = \pm A$ и скорость маятника $v = 0$, кинетическая энергия груза полностью переходит в потенциальную энергию деформированной пружины (см. рис 21, *а*, *г*):

$$\boxed{(W_п)_{max} = \frac{kA^2}{2}.}$$

Таким образом, механическая энергия маятника пропорциональна квадрату амплитуды его колебаний.

В положении равновесия, когда $x = 0$, вся энергия маятника переходит в кинетическую энергию груза (см. рис. 21, *д*):

$$\boxed{(W_к)_{max} = \frac{mv_{max}^2}{2},}$$

где v_{max} — модуль максимальной скорости груза при колебаниях.

В промежуточных точках полная энергия:

$$\boxed{W_{мех} = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = (W_п)_{max} = (W_к)_{max}.}$$

При отсутствии в системе потерь энергии процесс колебаний сопровождается только переходом потенциальной энергии в кинетическую и обратно. Такие превращения энергии происходят с вдвое большей частотой (рис. 22, *а*, *б*),

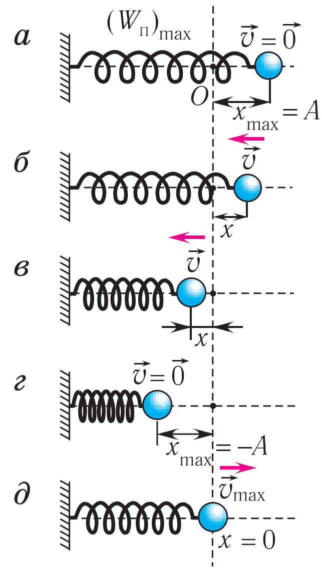

Рис. 21. Превращения энергии при колебаниях пружинного маятника

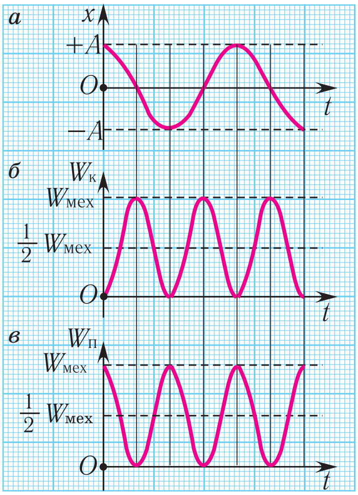

Рис. 22. Зависимости от времени: *а* — смещения маятника; *б* — его кинетической и потенциальной энергий; *в* — его потенциальной энергии

Правообладатель Народная асвета

чем сами колебания. Действительно, дважды за период механическая энергия будет полностью превращаться в потенциальную (в двух крайних положениях) и дважды за период — в кинетическую (при прохождении через положение равновесия) (рис. 22, *в*).

1. Какой энергией обладает математический маятник при прохождении положения равновесия?
2. Какой энергией обладает пружинный маятник при наибольшем смещении от положения равновесия?
3. Чем отличаются потенциальные энергии математического и пружинного маятников?
4. Как изменяется энергия маятника при колебаниях?
5. Запишите формулы для определения механической энергии колеблющегося тела при прохождении им положения равновесия и при максимальном смещении из него.

Пример решения задачи

Определите полную механическую энергию W колебаний груза массой m = 100 г на пружине, если он совершает гармонические колебания с циклической частотой $\omega = 12\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ и амплитудой A = 4,0 см.

Дано:
m = 100 г = 0,10 кг
$\omega = 12\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$
A = 4,0 см = 0,040 м

W — ?

Решение

Энергия колебаний груза:

$$W = \frac{kA^2}{2},$$

где k — жесткость пружины.
Так как циклическая частота колебаний груза определяется

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \text{ то}$$

$$k = m\omega^2.$$

Окончательно,

$$W = \frac{m\omega^2 A^2}{2}, \quad W = \frac{0{,}10\ \text{кг} \cdot \left(12\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}\right)^2 \cdot (0{,}040\ \text{м})^2}{2} = 12 \cdot 10^{-3}\ \text{Дж} = 12\ \text{мДж}.$$

Ответ: W = 12 мДж.

Правообладатель Народная асвета

Упражнение 3

1. В каких точках траектории при колебаниях математического маятника максимальна энергия:

   а) кинетическая $W_к$;

   б) потенциальная $W_п$? Чему она равна?

2. Математический маятник массой $m = 100$ г при прохождении положения равновесия имеет скорость, модуль которой $\upsilon = 4{,}0\ \frac{м}{с}$. Определите:

   а) полную энергию $W_{мех}$ маятника;
   б) максимальную высоту h_{max}, на которую поднимается маятник.

3. Математический маятник массой $m = 100$ г выводят из положения равновесия, поднимая его на высоту $h = 10$ см над начальным уровнем. Определите:

   а) изменение потенциальной энергии маятника $\Delta W_п$ при его отклонении от положения равновесия;
   б) его максимальную кинетическую энергию $W_{к\,max}$.

4. Тело совершает гармонические колебания. Определите отношение кинетической энергии к ее потенциальной энергии для моментов времени, когда смещение тела от положения равновесия составляет:

   а) $x = \frac{A}{2}$; б) $x = \frac{3A}{4}$; в) $x = A$.

5. Груз массой $m = 250$ г совершает гармонические колебания на пружине жесткостью $k = 80\ \frac{Н}{м}$ с амплитудой $A = 3{,}6$ см. Определите полную механическую энергию колебаний W, потенциальную $W_п$ и кинетическую $W_к$ энергию в момент времени, когда смещение груза от положения равновесия $x = 2{,}2$ см. Потенциальную энергию в положении равновесия считать равной нулю.

6. Груз массой $m = 100$ г, находящийся на гладкой горизонтальной поверхности, закреплен на пружине жесткостью $k = 100\ \frac{Н}{м}$, прикрепленной к опоре. Его смещают из положения равновесия на расстояние $x_1 = 5{,}0$ см и сообщают ему в направлении от положения равновесия скорость, модуль которой $\upsilon_1 = 1{,}0\ \frac{м}{с}$. Чему равны потенциальная $W_п$ и кинетическая $W_к$ энергия груза в этот момент времени? Запишите кинематический закон его движения.

Правообладатель Народная асвета

7. Пружинный маятник, находящийся на гладкой горизонтальной поверхности, вывели из положения равновесия и без толчка отпустили. Через какую часть n периода T кинетическая энергия прикрепленного к пружине тела будет равна потенциальной энергии $W_п$ деформированной пружины?

8. Определите полную механическую энергию $W_{мех}$ гармонических колебаний материальной точки, если известны ее масса m, частота ν и амплитуда A колебаний.

§ 4. Свободные и вынужденные колебания. Резонанс

Колебания груза, подвешенного на нити, с течением времени затухают, поскольку в системе действуют силы трения и сопротивления воздуха. При каких условиях механические колебания не затухают? Можно ли добиться увеличения амплитуды колебаний, используя внешнее воздействие?

Силы взаимодействия тел системы называют внутренними. Тела, не входящие в систему, называются внешними телами. Силы, которые действуют на тела системы со стороны внешних тел, называют внешними силами.

Колебания, происходящие с постоянной во времени амплитудой, называются **незатухающими колебаниями** (рис. 23, *а*). Незатухающие колебания, которые совершает система около положения устойчивого равновесия под действием внутренних сил после того, как она была выведена из состояния равновесия и предоставлена самой себе, называются **свободными (собственными) колебаниями.**

Свободные колебания (в отсутствие трения) происходят со строго определенной частотой ω_0, называемой **частотой свободных (собственных) колебаний системы.** Эта частота зависит только от параметров системы.

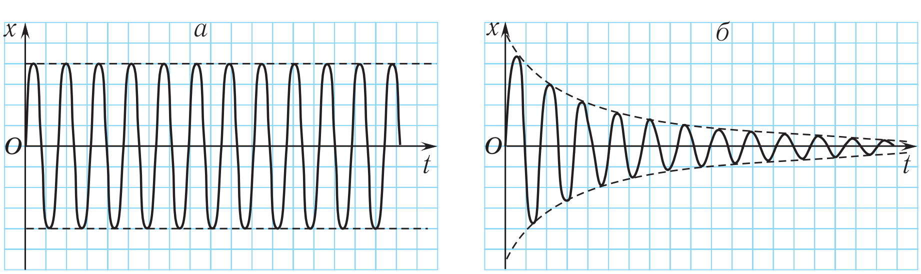

Рис. 23. Механические колебания: *а* — незатухающие; *б* — затухающие

Правообладатель Народная асвета

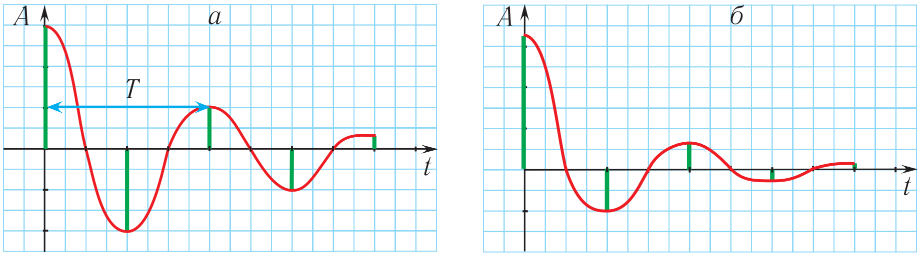

Рис. 24. Затухающие механические колебания (коэффициенты трения сопротивления $\mu_а < \mu_б$): *а* — малая сила трения; *б* — большая сила трения

Примерами таких колебаний могут служить колебания математического и пружинного маятников, происходящие в отсутствие сил трения.

Амплитуда свободных колебаний определяется начальными условиями, т. е. тем начальным отклонением или толчком, который приведет в движение маятник или груз на пружине. Свободные колебания являются самым простым видом колебаний.

В любой реальной колебательной системе всегда присутствуют силы трения (сопротивления), поэтому механическая энергия системы с течением времени уменьшается, переходя во внутреннюю энергию. Убыль механической энергии приводит к уменьшению амплитуды колебаний.

Колебания, амплитуда которых уменьшается с течением времени вследствие потери энергии колебательной системой, называются **затухающими колебаниями** (рис. 23, *б*).

При малых потерях энергии колебания можно считать периодическими и пользоваться такими понятиями, как период и частота колебаний, считая периодом промежуток времени между двумя последовательными максимумами смещения $x(t)$ (рис. 24, *а*).

Колебания в любой реальной системе рано или поздно затухают. Чтобы колебания не затухали, необходимо воздействие внешней силы. Однако не всякая внешняя сила заставляет систему двигаться периодически. Например, невозможно раскачать качели, если действовать на них постоянной силой.

Проведем следующий эксперимент. Соединим математический маятник с метрономом тонким легким стержнем (рис. 25, *а*). Изменяя частоту колебаний метронома (рис. 25, *б*), добиваемся уве-

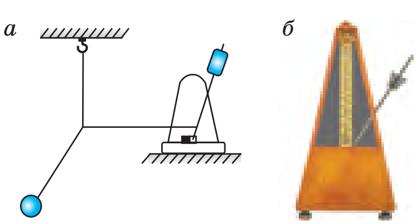

Рис. 25. *а* — наблюдение явления резонанса в системе математический маятник — метроном; *б* — внешний вид метронома

Правообладатель Народная асвета

личения амплитуды колебаний математического маятника. Оказывается, что его амплитуда будет максимальной при совпадении собственной частоты колебаний маятника и метронома.

Колебания тел под действием внешней периодической силы называются **вынужденными,** а сила — **вынуждающей.** В случае действия гармонической вынуждающей силы, например $F(t) = F_0 \sin \omega t$ или $F(t) = F_0 \cos \omega t$, вначале наблюдается достаточно сложное движение тела. Спустя некоторое время после начала действия вынуждающей силы колебания при наличии трения приобретают стационарный характер и не зависят от начальных условий. Частота установившихся вынужденных колебаний всегда равна частоте вынуждающей силы.

Амплитуда и энергия вынужденных колебаний зависят от того, насколько различаются частота вынуждающей силы ω и частота собственных колебаний ω_0, а также от величины трения (сопротивления) в системе.

При вынужденных колебаниях возможно явление, называемое *резонансом* (от лат. слова *resono* — откликаться).

Резонанс — это явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты ω внешней силы, действующей на колебательную систему, к частоте ω_0 собственных колебаний системы $(\omega \to \omega_0)$ (рис. 26).

Подвесим на упругой нити (AB) четыре математических маятника с одинаковыми грузами, три из которых имеют различную длину, а длина четвертого равна длине второго (рис. 27). Сначала посмотрим, что будет с маятниками, если раскачать первый или третий маятник.

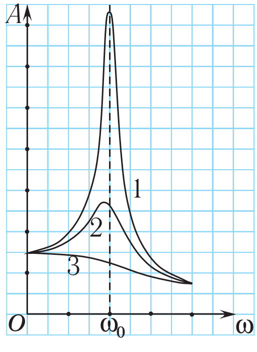

Рис. 26. Резонанс: коэффициенты трения (сопротивления) $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$

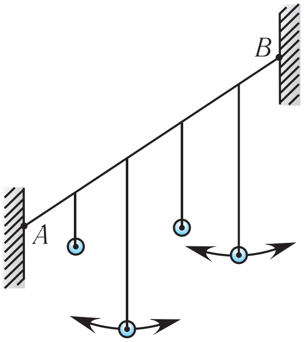

Рис. 27. Наблюдение явления резонанса в системе маятников

Правообладатель Народная асвета

Наблюдения показывают, что через некоторое время начнут качаться и остальные маятники. Но амплитуда их колебаний мала и вскоре колебания затухают. А вот если раскачать второй маятник, то амплитуда колебаний четвертого будет возрастать, пока не достигнет достаточно большого значения.

Это происходит потому, что частота внешней силы, действующей на четвертый маятник, совпадает с частотой его собственных колебаний (т. к. длины второго и четвертого маятников равны). Мы наблюдаем явление резонанса.

Подчеркнем, что при резонансе создаются оптимальные условия для передачи энергии от внешнего источника к колебательной системе.

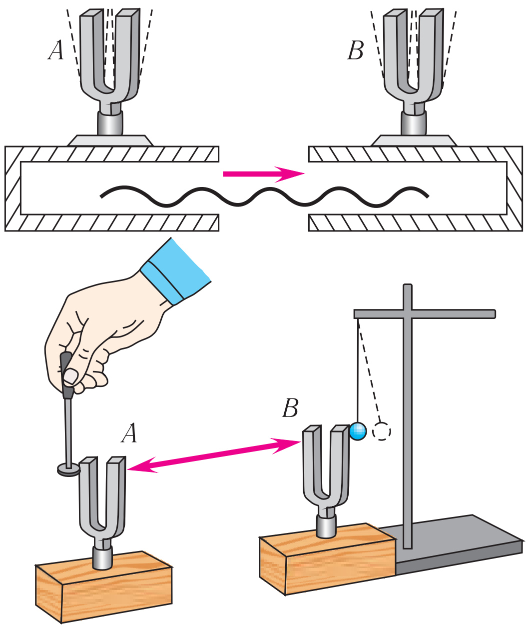

Рис. 28. Наблюдение явления резонанса в двух одинаковых камертонах *A* и *B*

Так при возбуждении камертона *A* (рис. 28) такой же камертон *B* через некоторое время также начинает активно звучать. При этом исходной внешней силой является удар молотком по первому камертону, а внешней силой, действующей на второй камертон, — сила давления воздуха при колебаниях.

Вспомним также процесс раскачивания на качелях. Если их раскачивать с очень малой или очень большой частотой, то эффект будет крайне мал. Раскачивание будет очень эффективным, если подобрать частоту толчков, равную частоте собственных колебаний качелей.

Большинство сооружений и механизмов способно совершать свободные колебания. При внешних периодических воздействиях с частотой, близкой к резонансной, в них могут возбуждаться колебания большой амплитуды, что может привести к разрушительным последствиям. В связи с этим, например, при прохождении по мостам войсковых частей солдатам дают команду идти вольным шагом (не в ногу). По той же причине поезда движутся по мостам либо очень медленно, либо на максимальной скорости.

Правообладатель Народная асвета

В 1850 г. цепной мост через реку Мен вблизи г. Анжер (Франция) разрушился во время прохождения по нему отряда солдат, так как частота их шага совпала с частотой свободных колебаний моста.

7 ноября 1940 г. сильный порывистый ветер вызвал резонансные колебания висячего Такомского моста (США), что привело к его разрушению (рис. 29).

Заметим, что современные висячие мосты — это устойчивые конструкции, которые выдерживают сильные порывистые ветры и прочие нагрузки благодаря новым инженерным решениям.

Рис. 29. Разрушенный мост через реку Такома (США)

1. Какие колебания называются незатухающими?
2. Какие колебания называются свободными (собственными)?
3. Почему собственные колебания маятника затухают с течением времени?
4. От чего зависит частота собственных колебаний?
5. Какие колебания называются вынужденными? От чего зависит частота вынужденных колебаний?
6. Почему для возникновения колебаний в системе внешняя сила должна быть непостоянной?
7. Что такое резонанс? Приведите примеры полезного и вредного влияния резонанса.
8. Вода в ведре, которое несет мальчик, начала сильно расплескиваться. Почему расплескивание может прекратиться при изменении темпа ходьбы?

Пример решения задачи

Определите модуль скорости v движения поезда, при которой математический маятник, подвешенный в вагоне, особенно сильно раскачивается. Длина маятника $l = 11$ см, расстояние между стыками рельсов $L = 12,5$ м.

Дано:

$l = 11$ см $= 0,11$ м

$L = 12,5$ м

v — ?

Решение

Маятник начинает сильно раскачиваться, когда частота его собственных колебаний совпадает с частотой вынуждающей силы. Частота вынуждающей силы совпадает с частотой ударов колес вагона о стыки рельс.

Правообладатель Народная асвета

Промежуток времени между двумя последовательными ударами (период):

$$T = \frac{L}{v}.$$

Частота вынуждающей силы:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{v}{L}. \qquad (1)$$

Частота собственных колебаний математического маятника:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}. \qquad (2)$$

Приравняв формулы (1) и (2), получим:

$$\frac{v}{L} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Откуда:

$$v = \frac{L}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}},$$

$$v = \frac{12{,}5\ \text{м}}{2 \cdot 3{,}14} \cdot \sqrt{\frac{9{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{0{,}11\ \text{м}}} = 19\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $v = 19\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Упражнение 4

1. Нарисуйте график затухающих колебаний груза на пружине, если амплитуда каждого следующего колебания уменьшается в $n = 1{,}5$ раза. Начальная амплитуда $A = 30$ мм, длительность одного колебания $T = 0{,}50$ с.
2. Для чего все вибрирующие устройства (электродвигатели, дизельные установки и т. д.) в высотных зданиях ставят на специальные резиновые или металлические амортизаторы?
3. При движении поезда вагоны испытывают периодические удары на стыках рельсов. Определите скорость v поезда, при которой пассажиры будут ощущать наиболее сильное вертикальное раскачивание вагона, если длина рельса $L = 12{,}5$ м, а период собственных вертикальных колебаний вагона $T = 1{,}5$ с.
4. Какой должна быть длина l математического маятника, подвешенного в вагоне, чтобы он раскачивался наиболее сильно при движении вагона со скоростью, модуль которой $v = 67{,}5\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$? Расстояние между стыками рельсов $L = 12{,}5$ м.

Правообладатель Народная асвета