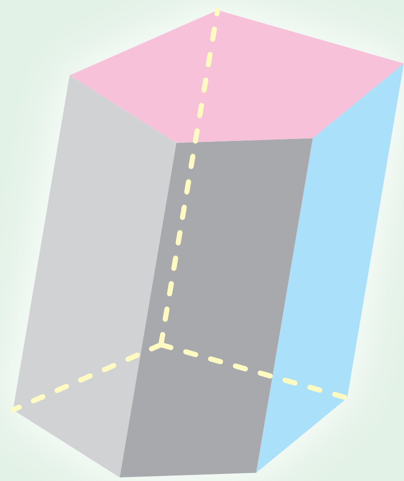
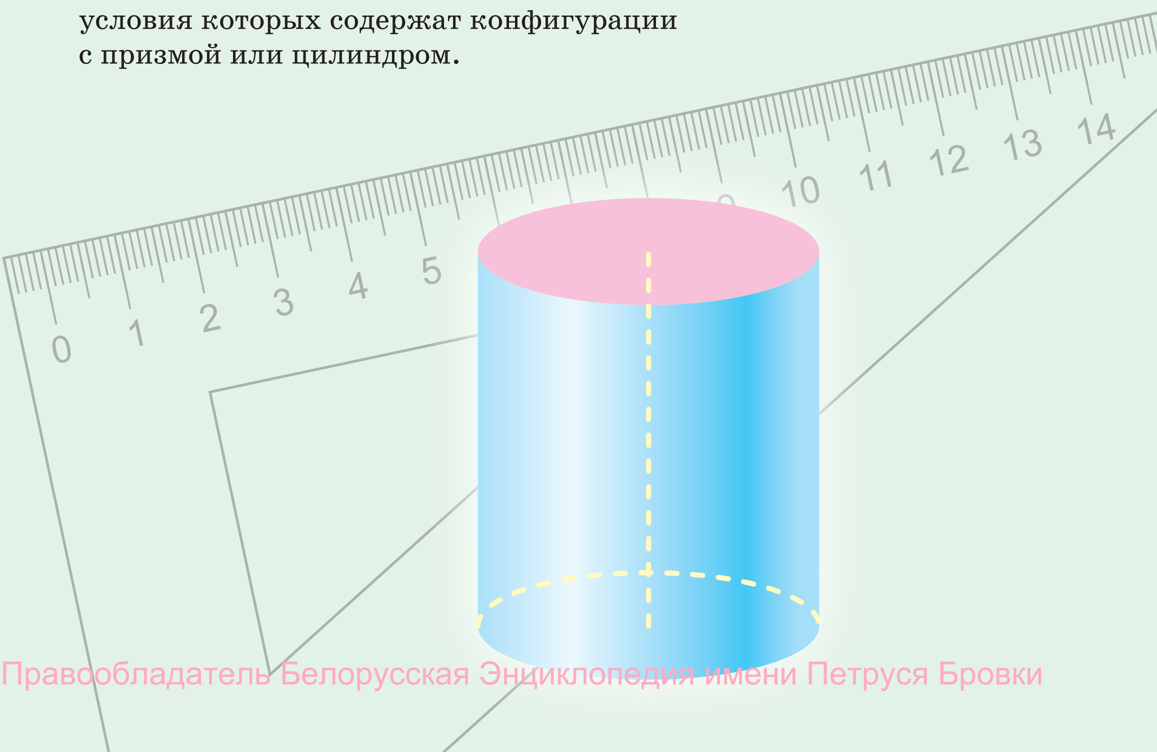
Раздел 1

Призма и цилиндр



В этом разделе вы:

- узнаете, какое тело называется призмой и какое — цилиндром;
- узнаете, чем призма и цилиндр похожи и чем они отличаются;
- познакомитесь с отдельными видами призм и цилиндров;
- познакомитесь с конфигурациями — призмой, вписанной в цилиндр, и цилиндром, вписанным в призму;
- познакомитесь с касательной прямой и касательной плоскостью цилиндра;
- научитесь находить площади поверхностей призм и цилиндров и их объемы;
- научитесь находить по известным характеристикам призмы или цилиндра другие их характеристики;
- научитесь решать разнообразные задачи, условия которых содержат конфигурации с призмой или цилиндром.



§ 1. Призма

А) Ранее вы уже знакомились с **призмой**, многогранником, две грани которого — равные n-угольники, а остальные n граней — параллелограммы.

Равные грани-многоугольники призмы лежат в параллельных плоскостях и называются **основаниями** призмы, а остальные грани-параллелограммы — **боковыми гранями**. Ребра боковых граней, не принадлежащие основаниям, называются **боковыми ребрами**. Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называют **диагональю** призмы (рис. 1). Плоскость, проходящая через два боковых ребра призмы, не принадлежащие одной грани, называется *диагональной плоскостью*, а сечение призмы диагональной плоскостью — *диагональным сечением*. На рис. 2 показаны два диагональных сечения призмы.

Призмы делятся на *треугольные*, *четырехугольные*, *пятиугольные* и т. д. в зависимости от количества сторон их оснований. Призма, изображенная на рис. 1, — шестиугольная, а на рис. 2 — девятиугольная.

Отличают *прямые* и *наклонные* призмы в зависимости от того, перпендикулярны или не перпендикулярны боковые ребра призмы ее основаниям. Обычно при изображении прямой призмы ее боковые ребра проводят вертикально.

Прямая призма, основаниями которой являются правильные многоугольники, называется **правильной призмой**. В прямой призме все боковые грани — прямоугольники, а в правильной — равные прямоугольники.

Перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки одного основания призмы к плоскости другого основания, называется **высотой призмы**. На рис. 3 показаны две высоты DD_2 и HH_1 призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$. У прямой призмы ее высота равна боковому ребру.

Особым видом призмы является *параллелепипед* — призма, основанием которой является параллелограмм. Параллелепипед, как и призма, может быть прямым и наклонным.

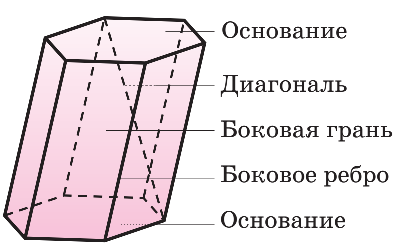


Рис. 1

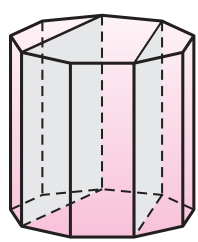


Рис. 2

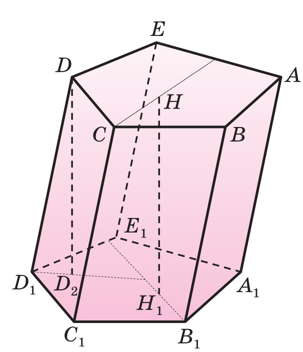


Рис. 3

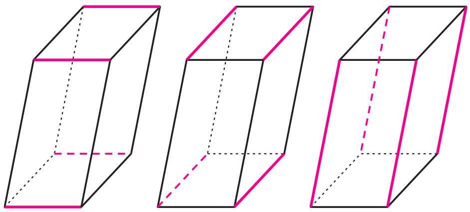


Рис. 4

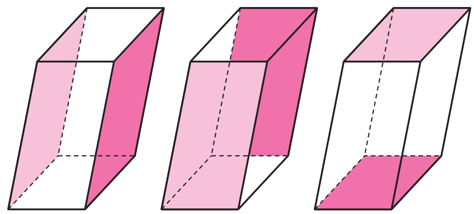


Рис. 5

Прямой параллелепипед, основанием которого является прямоугольник, называется *прямоугольным параллелепипедом*. Прямоугольный параллелепипед, у которого три ребра, сходящиеся в одной вершине, равны между собой, называется *кубом*.

У параллелепипеда все грани — параллелограммы, из которых у прямого параллелепипеда прямоугольниками являются боковые грани, а у прямоугольного параллелепипеда — все грани.

12 ребер параллелепипеда разделяются на три четверки равных ребер (рис. 4), его 6 граней — на три пары равных граней (рис. 5), а четыре диагонали пересекаются в одной точке, являющейся центром симметрии параллелепипеда (рис. 6). Прямой параллелепипед в дополнение имеет ось симметрии (рис. 7) и плоскость симметрии (рис. 8). Прямоугольный параллелепипед имеет три оси симметрии (рис. 9) и три плоскости симметрии (рис. 10).

Ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, называют *измерениями прямоугольного параллелепипеда*. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений (рис. 11), и все его диагонали равны друг другу.

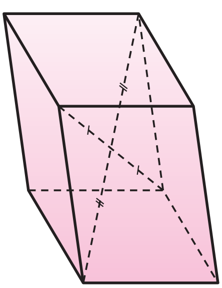


Рис. 6

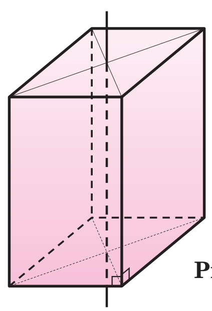


Рис. 7

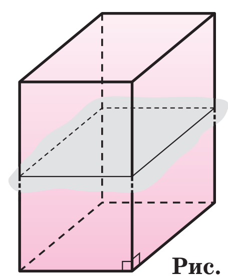


Рис. 8

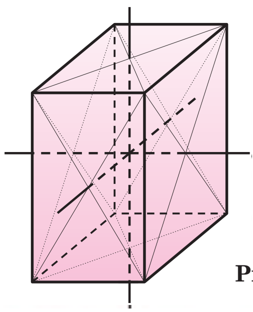


Рис. 9

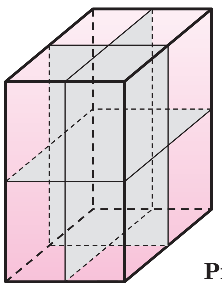


Рис. 10

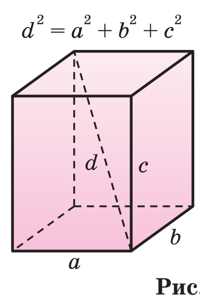


Рис. 11

Пример 1. Найдем диагональ правильной четырехугольной призмы, у которой площадь основания равна 36 см^2, а высота — 7 см.

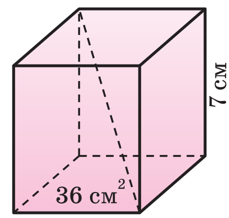


Рис. 12

Р е ш е н и е. Основанием правильной четырехугольной призмы является квадрат (рис. 12), площадь которого равна 36 см^2, тогда сторона основания равна 6 см.

Значит, квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен: 36 + 36 + 49, т. е. 121 см, тогда диагональ равна 11 см.

О т в е т: 11 см.

Б) Боковые грани образуют *боковую поверхность призмы*, а боковые грани вместе с основаниями — *полную поверхность призмы*.

При решении задач бывает полезно так называемое *перпендикулярное сечение призмы*, под которым понимают многоугольник, плоскость которого перпендикулярна прямым, содержащим боковые ребра, а вершины находятся на этих прямых.

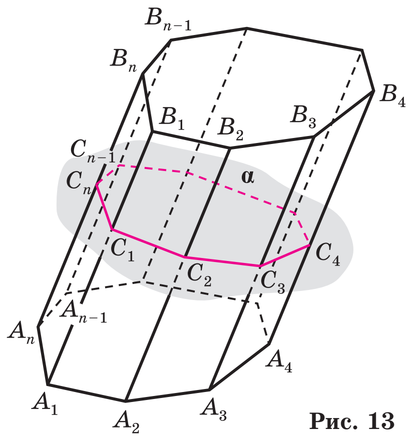


Рис. 13

Теорема 1. Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра ее перпендикулярного сечения и длины бокового ребра:
$$S_{бок} = P \cdot l.$$

Доказательство. Пусть есть призма $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_nB_1B_2B_3...B_{n-1}B_n$ (рис. 13). Проведем перпендикулярное сечение $C_1C_2C_3...C_{n-1}C_n$. Его стороны перпендикулярны сторонам параллелограммов, которые образуют боковую поверхность призмы. Поэтому для площади боковой поверхности $S_{бок}$ получаем:

$$S_{бок} = S_{A_1B_1B_2A_2} + S_{A_2B_2B_3A_3} + ... + S_{A_{n-1}B_{n-1}B_nA_n} + S_{A_nB_nB_1A_1} =$$
$$= A_1B_1 \cdot C_1C_2 + A_2B_2 \cdot C_2C_3 + ... + A_{n-1}B_{n-1} \cdot C_{n-1}C_n + A_nB_n \cdot C_nC_1 \overset{(1)}{=}$$
$$= (C_1C_2 + C_2C_3 + ... + C_{n-1}C_n + C_nC_1) \cdot A_1B_1 \overset{(2)}{=} P \cdot l.$$

При переходе (1) мы учли то, что все боковые ребра призмы равны друг другу, при переходе (2) — то, что сумма $C_1C_2 + C_2C_3 + ... C_{n-1}C_n + C_nC_1$ выражает периметр P перпендикулярного сечения призмы, а отрезок A_1B_1 — длину l бокового ребра.

Пример 2. Расстояния между боковыми ребрами наклонной треугольной призмы равны 3 см, 4 см и 5 см, а площадь ее боковой поверхности — 132 см^2. Найдем длину бокового ребра.

Р е ш е н и е. Поскольку стороны треугольника, являющегося перпендикулярным сечением призмы (рис. 14), перпендикулярны прямым, на которых лежат боковые ребра, то их длины равны 3 см, 4 см и 5 см. Значит, периметр перпендикулярного сечения — 12 см.

Учитывая, что площадь $S_{бок}$ боковой поверхности призмы, периметр P ее перпендикулярного сечения и длина бокового ребра связаны равенством $S_{бок} = P \cdot l$, находим, что $l = 132 : 12 = 11$ (см).

Ответ: 11 см.

Следствие 1. Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра ее основания и высоты.

Действительно, перпендикулярное сечение прямой призмы равно ее основанию, а боковое ребро является высотой.

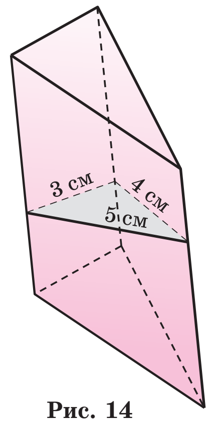


Рис. 14

В) Важной характеристикой плоской фигуры является ее площадь. Подобной характеристикой тела является его объем. Будем считать, что изучаемые нами тела имеют объем.

За единицу объема принимают объем куба с ребром **1**. На практике пользуются разными единицами объема, как метрическими — кубический миллиметр, кубический сантиметр, кубический дециметр, кубический метр, кубический километр, так и неметрическими — галлон, баррель, бушель, кварта.

Для объема тела выполняются его *основные свойства*:

- ***равные тела имеют равные объемы;***
- ***если тело разделено на части, имеющие объем, то его объем равен сумме объемов этих частей.***

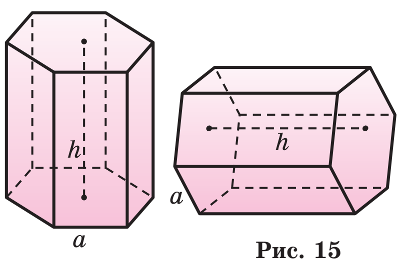


Рис. 15

При этом равными фигурами называют фигуры, которые совмещаются друг с другом. Например, равными являются две шестиугольные правильные призмы, у которых соответственно равны стороны оснований и высоты (рис. 15), или два цилиндра с соответственно равными радиусами оснований и образующими (рис. 16). Тело, изображенное на рис. 17, можно разделить на цилиндр и конус, и его объем равен сумме объемов этих цилиндра и конуса.

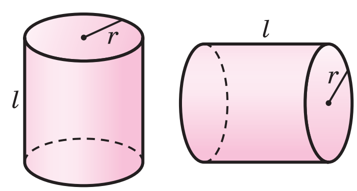


Рис. 16

Два тела с равными объемами называют **равновеликими телами**. Равные тела являются равновеликими, но не наоборот.

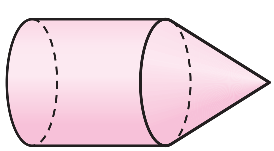


Рис. 17

Вы знаете, что ***объем V прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений a, b, c*** (рис. 18):

$$V = abc.$$

Учитывая, что в формуле $V = abc$ произведение ab выражает площадь S основания прямоугольного параллелепипеда, а число c — его высоту h, получим, что ***объем V прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади его основания и высоты: V = Sh.***

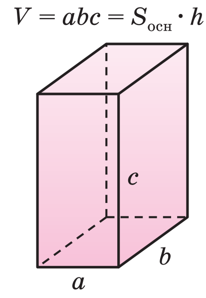


Рис. 18

Пример 3. Площади трех граней прямоугольного параллелепипеда с общей вершиной равны S_1, S_2, S_3.

а) Найдем объем этого параллелепипеда, учитывая, что $S_1 = 12$ дм^2, $S_2 = 24$ дм^2, $S_3 = 36$ дм^2.

б) Выразим объем параллелепипеда через S_1, S_2, S_3.

Решение. Пусть измерения параллелепипеда равны x, y, z (рис. 19).

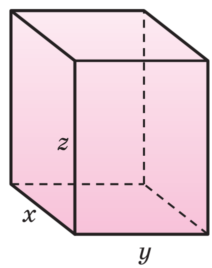


Рис. 19

а) Поскольку, с учетом условия, $xy = 12$, $xz = 24$, $yz = 36$, то $xy \cdot xz \cdot yz = 12 \cdot 24 \cdot 36$, или $(xyz)^2 = 12^2 \cdot 2 \cdot 6^2$, откуда: $xyz = 12 \cdot 6 \cdot \sqrt{2} = 72\sqrt{2}$.

б) Поскольку $xy = S_1$, $xz = S_2$, $yz = S_3$, то $xy \cdot xz \cdot yz = S_1 \cdot S_2 \cdot S_3$.

Отсюда $xyz = \sqrt{S_1S_2S_3}$.

Ответ: а) $72\sqrt{2}$ дм^3; б) $\sqrt{S_1S_2S_3}$.

Теорема 2. Объем произвольного параллелепипеда равен произведению площади его основания и высоты:

$$V = S_{осн} \cdot h.$$

Доказательство. Пусть есть произвольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 20). На прямой AD выберем точки M и T так, что $AD = MT$, и через точки M и T проведем плоскости, перпендикулярные AD. Они пересекают прямые BC, B_1C_1, A_1D_1 соответственно в точках K и P, K_1 и P_1, M_1 и T_1 (рис. 21). Многогранники $DD_1C_1CTT_1P_1P$ и $AA_1B_1BMM_1K_1K$ равны, так как второй совмещается с первым сдвигом вдоль прямой MD.

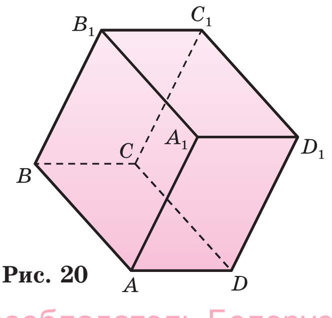


Рис. 20

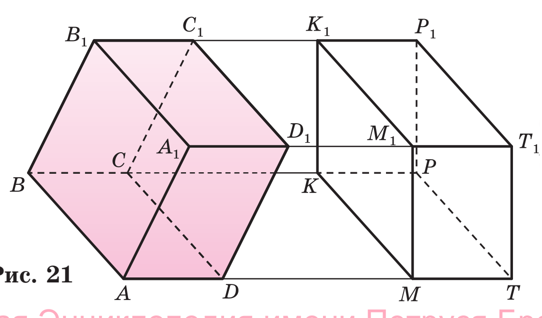


Рис. 21

А поскольку эти многогранники имеют общую часть — многогранник $DD_1C_1CMM_1K_1K$, то их оставшиеся части — параллелепипеды $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и $MKPTM_1K_1P_1T_1$ — имеют также равные объемы. У параллелепипедов $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и $MKPTM_1K_1P_1T_1$ их высоты равны, каждая из них равна расстоянию между параллельными плоскостями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Равны также площади оснований этих параллелепипедов, поскольку у параллелограммов $ABCD$ и $MKPT$ равны стороны AD и MT и равны высоты как расстояния между параллельными прямыми AD и BC.

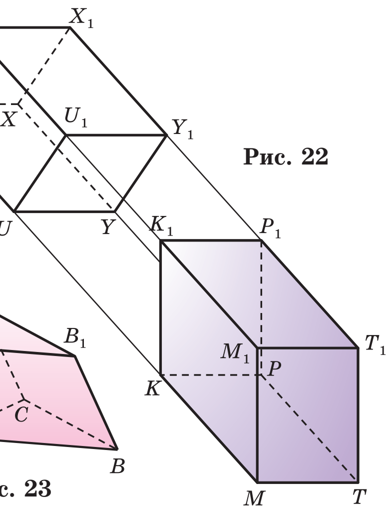


Рис. 22

Получили, что произвольный параллелепипед равновелик с параллелепипедом, у которого такая же высота, а основанием является прямоугольник, равновеликий основанию исходного параллелепипеда.

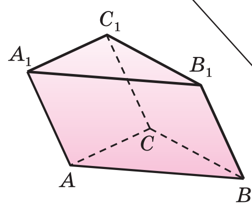


Рис. 23

Теперь можно таким же образом параллелепипед $MKPTM_1K_1P_1T_1$ заменить равновеликим параллелепипедом $UVXYU_1V_1X_1Y_1$ (рис. 22), который является прямоугольным, имеет ту же самую высоту, что и исходный параллелепипед, основание, равное $MKTP$ и, следовательно, равновеликое $ABCD$.

Значит, $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = V_{UVXYU_1V_1X_1Y_1} = S_{UVXY} \cdot UU_1 = S_{ABCD} \cdot UU_1$.

Множитель S_{ABCD} есть площадь основания параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, а множитель UU_1 выражает его высоту, так как UU_1 есть перпендикуляр, восстановленный из точки U плоскости $ABCD$ к плоскости основания $A_1B_1C_1D_1$. Значит, объем произвольного параллелепипеда равен произведению площади его основания и высоты.

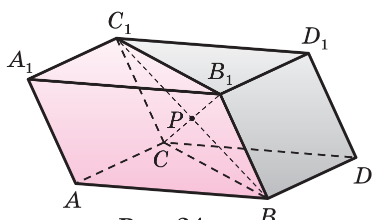


Рис. 24

Теорема 3. Объем призмы равен произведению площади ее основания и высоты:

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 23). Дополним ее до параллелепипеда $ABDCA_1B_1D_1C_1$ (рис. 24). Точка P пересечения диагоналей диагонального сечения BCC_1B_1 этого параллелепипеда является его центром симметрии. Это означает, что достроенная призма $BCDB_1C_1D_1$ симметрична данной призме $ABCA_1B_1C_1$ относительно центра P, поэтому эти призмы равны друг другу.

Следовательно, объем параллелепипеда $ABDCA_1B_1D_1C_1$ равен удвоенному объему данной призмы.

Объем параллелепипеда $ABDCA_1B_1D_1C_1$ равен произведению площади его основания $ABDC$ и высоты. Но площадь его основания $ABDC$ равна удвоенной площади основания ABC данной призмы, а высота параллелепипеда равна высоте призмы. Отсюда следует, что объем призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен площади ее основания ABC и высоты.

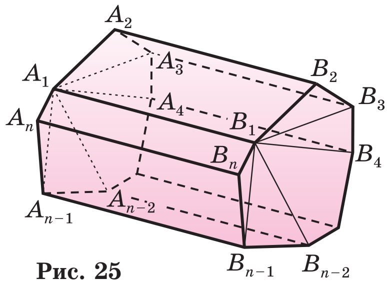


Рис. 25

Теперь рассмотрим произвольную призму $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_nB_1B_2B_3...B_{n-1}B_n$ (рис. 25). Диагональными сечениями, проходящими через вершину A_1, разобьем ее на треугольные призмы-части $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$, $A_1A_3A_4B_1B_3B_4$, ..., $A_1A_{n-2}A_{n-1}B_1B_{n-2}B_{n-1}$, $A_1A_{n-1}A_nB_1B_{n-1}B_n$, которые все имеют одну и ту же высоту, равную высоте h данной призмы. Объем данной призмы равен сумме объемов призм-частей. По уже доказанному для объема V данной призмы получим:

$$V = S_{A_1A_2A_3} \cdot h + S_{A_1A_3A_4} \cdot h + \ \dots \ + S_{A_1A_{n-2}A_{n-1}} \cdot h + S_{A_1A_{n-1}A_n} \cdot h =$$
$$= \left(S_{A_1A_2A_3} + S_{A_1A_3A_4} + \ \dots \ + S_{A_1A_{n-2}A_{n-1}} + S_{A_1A_{n-1}A_n}\right) \cdot h.$$

Учитывая, что сумма в скобках выражает площадь S основания данной призмы, получаем:

$$V = S \cdot h.$$

Следствие 2. Объем прямой призмы равен произведению площади ее основания и бокового ребра.

Следствие 3. Объем призмы равен произведению площади ее перпендикулярного сечения и бокового ребра.

Это утверждение можно доказать сначала для треугольной призмы, а потом и для произвольной призмы, если использовать ее перпендикулярное сечение.

?

1. Какой многогранник называется призмой?

2. Какие грани призмы называют ее основаниями; боковыми гранями и какие ребра призмы называют боковыми ребрами?

3. Какой отрезок называют диагональю призмы; высотой призмы?

4. Какая плоскость называется диагональной плоскостью призмы и какой многоугольник называют диагональным сечением призмы?

5. Какая призма называется прямой призмой; наклонной призмой?

6. Какая прямая призма называется правильной?

7. Какая призма называется параллелепипедом?

8. Какой параллелепипед называется прямым? Какой прямой параллелепипед называется прямоугольным? Какой прямоугольный параллелепипед называется кубом?

9. Сформулируйте свойства ребер параллелепипеда; граней параллелепипеда; диагоналей параллелепипеда; диагоналей прямоугольного параллелепипеда.

10. Какие ребра прямоугольного параллелепипеда называются его измерениями?

11. Как связаны диагональ прямоугольного параллелепипеда и его измерения?

12. Из чего состоит боковая поверхность призмы; полная поверхность призмы?

13. Как связаны между собой боковая поверхность призмы, периметр ее перпендикулярного сечения и боковое ребро?

14. Как найти боковую поверхность прямой призмы?

15. Что принимают за единицу объема? Сформулируйте основные свойства объема.

16. Какие фигуры называют равными; равновеликими? Как связаны равенство и равновеликость фигур?

17. Как найти объем прямоугольного параллелепипеда, если известны его измерения?

18. Чему равен объем произвольного параллелепипеда?

19. Чему равен объем призмы; объем прямой призмы?

Задача 1. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с прямым углом C. Найдите площадь сечения, проведенного через ребро AB под углом в $60°$ к плоскости основания, учитывая, что боковое ребро призмы равно 9 см, а сечение проходит через вершину C_1.

Решение. Пусть CH — высота треугольника ABC (рис. 26). Тогда поскольку $CC_1 \perp (ABC)$, то $C_1H \perp AB$ (по теореме о трех перпендикулярах).

Поскольку треугольник C_1CH прямоугольный, $\angle C_1CH = 90°$, $\angle C_1HC = 60°$ и $CC_1 = 9$ см, то $CH = CC_1 \cdot \operatorname{ctg} 60° = \dfrac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$ (см), однако $C_1H = 2CH = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ (см).

Поскольку в треугольнике ABC $\angle ACB = 90°$, $AH = HB = CH$, то $AB = 2CH = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ (см). Тогда для площади $S_{\text{сеч}}$ сечения AC_1B получаем:

$$S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot C_1H = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} = 54\,(\text{см}^2).$$

Ответ: 54 см^2.

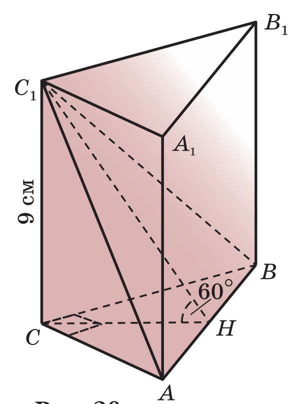


Рис. 26

Задача 2. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является правильный треугольник. Боковое ребро AA_1 длиной 6 см образует с прилежащими сторонами основания углы в 45°. Найдите высоту призмы.

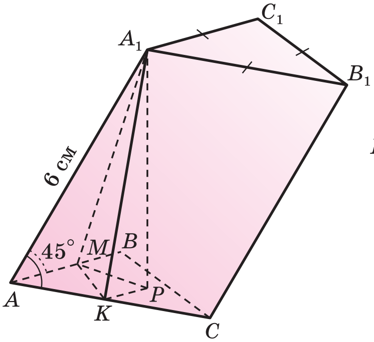


Рис. 27

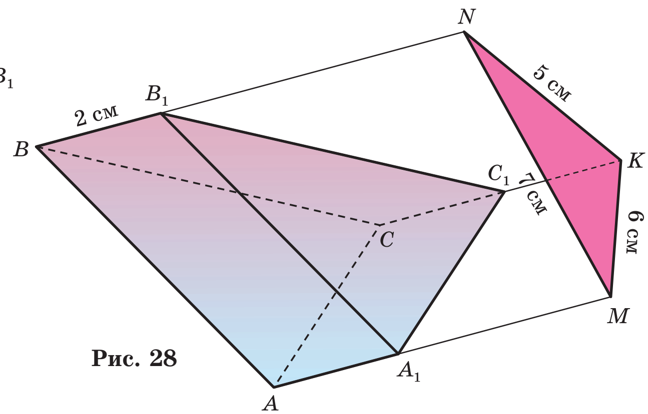


Рис. 28

Р е ш е н и е. Пусть A_1P — высота наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$, проведенная из вершины A_1 к основанию ABC, AM и AK — высоты боковых граней (рис. 27).

$\triangle AMA_1 = \triangle AKA_1$ (прямоугольные, AA_1 — общая гипотенуза, $\angle A_1AM = \angle A_1AK = 45°$), значит, $AM = AK = AA_1 \cdot \cos 45° = 3\sqrt{2} = MA_1 = KA_1$.

$PM = PK$ — проекции равных наклонных.

$PM \perp AM$ и $PK \perp AK$ по теореме о трех перпендикулярах.

$\triangle APM = \triangle APK$ (прямоугольные, $AM = AK$, $PM = PK$ — катеты). Поэтому:

$$\angle PAM = \angle PAK = \frac{1}{2} \cdot \angle MAK = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°,\ AP = \frac{AM}{\cos 30°} = 2\sqrt{6} \text{ см}.$$

В треугольнике AA_1P:

$$\angle A_1PA = 90°,\ A_1P = \sqrt{AA_1^2 - AP^2} = \sqrt{6^2 - \left(2\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

О т в е т: $2\sqrt{3}$ см.

Задача 3. Найдите площадь боковой поверхности и объем наклонной призмы с боковым ребром 2 см, учитывая, что расстояния между прямыми, которым принадлежат боковые ребра, равны 5 см, 6 см и 7 см.

Р е ш е н и е. Пусть в наклонной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковое ребро AA_1 равно 2 см, а расстояния между прямыми AA_1 и BB_1, BB_1 и CC_1, CC_1 и AA_1 соответственно равны 7 см, 5 см, 6 см. Тогда перпендикулярное сечение призмы — треугольник MNK — имеет стороны MN, NK и MK длиной 7 см, 5 см и 6 см соответственно (рис. 28). Для его периметра P_{MNK} и площади S_{MNK} найдем:

$$P_{MNK} = MN + NK + KM = 7 + 5 + 6 = 18 \text{ (см)};$$
$$S_{MNK} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3} = 6\sqrt{6} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Теперь для боковой поверхности $S_{\text{бок}}$ и объема V получим:

$$S_{\text{бок}} = P_{MNK} \cdot AA_1 = 18 \cdot 2 = 36 \text{ (см}^2\text{)};$$

$$V = S_{MNK} \cdot l = 6\sqrt{6} \cdot 2 = 12\sqrt{6} \text{ (см}^3\text{)}.$$

О т в е т: $S_{\text{бок}} = 36$ см^2, $V = 12\sqrt{6}$ см^3.

1. Верно ли, что в прямой призме:
а) все боковые грани — прямоугольники;
б) ее высота равна боковому ребру?

2. Верно ли, что сечение призмы плоскостью, параллельной основанию, равно этому основанию?

3. Верно ли, что в правильной призме:
а) все боковые грани — равные друг другу прямоугольники;
б) двугранные углы при боковых ребрах равны друг другу;
в) любая точка прямой, проходящей через центры оснований, равноудалена от боковых граней, а также от боковых ребер?

4. Верно ли, что:
а) у параллелепипеда все грани — параллелограммы;
б) у прямого параллелепипеда основания — параллелограммы, а боковые грани — прямоугольники;
в) у прямоугольного параллелепипеда все грани — прямоугольники?

5. Верно ли, что у параллелепипеда:
а) есть три четверки равных ребер;
б) есть три пары равных граней;
в) его четыре диагонали пересекаются в одной точке, являющейся центром симметрии параллелепипеда?

6. Определите:
а) может ли какая-либо боковая грань наклонного параллелепипеда быть прямоугольником;
б) сколько боковых граней наклонного параллелепипеда могут быть прямоугольниками.

7. Верно ли, что у прямого параллелепипеда есть:
а) ось симметрии; б) плоскость симметрии?

8. Верно ли, что у прямоугольного параллелепипеда:
а) есть три оси симметрии;
б) есть три плоскости симметрии;
в) квадрат диагонали равен сумме квадратов трех его измерений;
г) все четыре диагонали равны друг другу;
д) с двумя равными измерениями есть пять плоскостей симметрии;
е) с тремя равными измерениями есть девять плоскостей симметрии;
ж) с тремя равными измерениями есть девять осей симметрии?

9. Найдите диагональ правильной четырехугольной призмы, у которой площадь основания равна 121 см^2, а высота — 12 см.

10. Найдите диагональ:

а) куба, учитывая, что диагональ его боковой грани равна $6\sqrt{2}$ см;

б) прямоугольного параллелепипеда, учитывая, что диагонали его граней равны 11 см, 19 см и 20 см.

11. В прямоугольном параллелепипеде диагональ образует с плоскостью основания угол в 60°. Найдите диагональ параллелепипеда, учитывая, что радиус окружности, описанной около основания, равен 3 см.

12. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания и боковое ребро относятся как 4 : 4 : 7. Найдите высоту параллелепипеда, учитывая, что его диагональ равна 33 см.

13. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 24 см и 10 см, а его диагональ образует с плоскостью основания угол в 45°. Найдите боковое ребро параллелепипеда.

14. Боковое ребро призмы наклонено к плоскости основания под углом в 60°. Найдите высоту призмы, учитывая, что длина бокового ребра равна $10\sqrt{3}$ см.

15. Основанием $ABCD$ наклонной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат с центром O и стороной 2 см. Найдите боковое ребро призмы, учитывая, что $A_1O = \sqrt{2}$ см, а расстояние между плоскостями оснований равно $\sqrt{2}$ см.

16. В основании прямой призмы лежит равнобедренная трапеция с основаниями 50 см и 18 см и высотой 16 см. Найдите двугранные углы при боковых ребрах призмы.

17. Боковое ребро AA_1 призмы, основанием которой является правильный треугольник ABC, образует равные углы со сторонами основания AC и AB. Докажите, что:

а) стороны BC и AA_1 перпендикулярны;

б) четырехугольник CC_1B_1B является прямоугольником.

18. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 32 см, а боковое ребро — 24 см. Найдите площадь сечения, проходящего через сторону верхнего основания и противолежащую вершину нижнего основания.

19. Боковое ребро правильной треугольной призмы равно 8 см, а сторона основания — 4 см. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, которая проходит через:

а) боковое ребро и середину стороны основания, не имеющей с этим ребром общих точек;

б) три вершины призмы, не принадлежащие одной грани.

20. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = AC = 13$ см, $BC = 10$ см и боковое ребро образует с плоскостью основания угол в 45°. Проекцией вершины A_1 на плоскость треугольника ABC является точка пересечения его медиан. Найдите площадь грани CC_1B_1B.

21. Найдите площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, учитывая, что его измерения равны 8 см, 10 см, 11 см.

22. В прямой треугольной призме с боковой поверхностью 48 см^2 все ребра равны. Найдите высоту призмы.

23. По стороне основания a и боковому ребру l найдите полную поверхность правильной призмы, основанием которой является:
а) треугольник; б) четырехугольник; в) шестиугольник.

24. Боковое ребро наклонной четырехугольной призмы равно 24 см, а перпендикулярным сечением является ромб со стороной 10 см. Найдите боковую поверхность призмы.

25. Расстояния между последовательными боковыми ребрами наклонной четырехугольной призмы равны 3 см, 5 см, 2 см, 6 см. Найдите боковое ребро призмы, учитывая, что ее боковая поверхность равна 48 см^2.

26. Две боковые грани наклонной треугольной призмы перпендикулярны друг другу, их общее ребро равно 72 см и отстоит от двух других боковых ребер на 36 см и 105 см. Найдите боковую поверхность призмы.

27. В наклонной треугольной призме расстояния между боковыми ребрами равны 15 см, 17 см, 8 см. Найдите боковое ребро призмы, учитывая, что ее боковая поверхность равновелика перпендикулярному сечению.

28. Найдите полную поверхность и объем прямоугольного параллелепипеда, учитывая, что:
а) его диагональ равна 81 см, а измерения относятся как 2 : 7 : 26;
б) диагонали его граней равны 7 см, 8 см и 9 см;
в) его диагональ длиной 12 см составляет с одной боковой гранью угол в 30°, а с другой — угол в 45°;
г) сторона его основания длиной a составляет с диагональю основания угол α, а с диагональю боковой грани, в которой эта сторона лежит, — угол β;
д) диагональ прямоугольного параллелепипеда равна l и составляет с одной боковой гранью угол в 30°, а с другой — угол в 45°.

29. Найдите боковую поверхность прямого параллелепипеда, учитывая, что стороны его основания равны 2 см и 7 см, меньшая диагональ параллелепипеда — 8 см и один из углов основания — 60°.

30. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 3 м и 9 м, а его диагонали составляют с плоскостью основания углы в 45° и 60°. Найдите диагонали параллелепипеда, его боковую поверхность.

31. Найдите боковую поверхность призмы, у которой основанием является ромб со стороной 10 см и углом в 60° и:

а) боковые грани — прямоугольники, меньшая диагональ составляет с основанием угол в 45°;

б) все грани — равные ромбы.

32*. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и образует с плоскостью основания угол φ, а с меньшей боковой гранью — угол α. Найдите боковую поверхность параллелепипеда.

33*. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник с острым углом φ. Через противолежащий ему катет и противолежащую этому катету вершину основания проведено сечение, составляющее угол β с плоскостью основания. Определите, какую часть от площади боковой поверхности призмы составляет площадь сечения.

34. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, стороны основания которого равны a и b, а высота — h, учитывая, что:

а) $a = 22$, $b = 24$, $h = 30$; в) $a = 72$, $b = 20\sqrt{3}$, $h = 52$;

б) $a = 9\sqrt{2}$, $b = 3\sqrt{5}$, $h = 30\sqrt{10}$; г) $a = 3\frac{1}{3}$, $b = \sqrt{5}$, $h = 0{,}96$.

35. Найдите массу кирпича размером 25 см × 12 см × 6,5 см, учитывая, что плотность кирпича равна 1,9 г/см^3.

36. Найдите боковую и полную поверхности правильной призмы по данным, приведенным на рис. 28.

37. Найдите объем прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$, учитывая, что $\angle BAC = 90°$, $BC = 37$ см, $AB = 35$ см, $AA_1 = 11$ см.

38. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 5 см. Найдите объем призмы, учитывая, что радиус окружности, описанной около основания призмы, равен 6,5 см, а высота призмы — 10 см.

39. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда $PQRTP_1Q_1R_1T_1$, учитывая, что $PR_1 = 13$ см, $QT = 12$ см и $QR_1 = 11$ см.

40. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого:

а) равна 18 см и составляет угол в 30° с плоскостью одной из боковых граней и угол в 45° с боковым ребром;

б) составляет угол α с плоскостью одной из боковых граней и угол β с плоскостью основания, а его высота равна h.

41. Диагональ B_1D прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ составляет с плоскостью основания угол в $45°$, а двугранный угол A_1B_1BD равен $60°$. Найдите объем параллелепипеда, учитывая, что диагональ основания равна 12 см.

42. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда $MNOPM_1N_1O_1P_1$, учитывая, что:

а) $MO_1 = 1$ м, $\angle O_1MO = 45°$, $\angle O_1MN = 60°$;

б) $MO_1 = 24$ см, $\angle O_1MP_1 = 45°$ и диагональ MO_1 составляет угол в $30°$ с плоскостью одной из боковых граней.

43. Найдите объем прямой призмы $XYZX_1Y_1Z_1$, учитывая, что:

а) $\angle YXZ = 120°$, $XY = 5$ см, $XZ = 3$ см и наибольшая из площадей боковых граней равна 35 см^2;

б) $\angle XY_1Z = 60°$, $XY = 4$, $ZY_1 = 12$ и двугранный угол с ребром YY_1 прямой.

44. Докажите, что:

а) равные тела являются равновеликими;

б) равновеликие тела не обязательно являются равными.

45. Тело P составлено из тел M и N, имеющими соответственно объемы V_1 и V_2. Выразите объем V тела P через объемы V_1 и V_2, учитывая, что:

а) тела M и N не имеют общих внутренних точек;

б) тела M и N имеют общую часть, объем которой равен $\frac{1}{3}V_1$.

46. Пять ребер прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник, равны a, а остальные четыре ребра равны друг другу. Найдите объем призмы.

47. Найдите объем прямой призмы $BCDB_1C_1D_1$, учитывая, что $BC = CD$, $\angle BCD = \alpha$, диагональ B_1D равна l и составляет с плоскостью основания угол β.

48. Основанием прямой призмы является параллелограмм. Через его сторону, равную a, и противолежащую ей сторону другого основания проведено сечение, составляющее угол β с плоскостью основания. Найдите объем призмы, учитывая, что площадь сечения равна Q.

49. Через сторону нижнего основания и противолежащую вершину верхнего основания правильной треугольной призмы проведено сечение, образующее с плоскостью основания угол в $60°$. Найдите объем призмы, учитывая, что сторона основания равна a.

50. Найдите объем правильной шестиугольной призмы, наибольшая диагональ которой равна 8 см и составляет с боковым ребром угол в $30°$.

51. Найдите объем наклонной призмы, основанием которой является треугольник со сторонами 10 см, 10 см и 12 см, а боковое ребро, равное 8 см, составляет с плоскостью основания угол в 60°.

52. Найдите боковую поверхность призмы и объем наклонной треугольной призмы, у которой:

а) расстояния между параллельными прямыми, проходящими через боковые ребра наклонной треугольной призмы, равны 2 см, 3 см и 4 см, а сами ребра — 5 см;

б) две боковые грани равны и образуют угол в 60°, а прямая, которой принадлежит их общее ребро длиной a, находится на расстоянии a от плоскости противолежащей боковой грани.

53. Основанием призмы является вписанный в окружность с радиусом 4 см равнобедренный треугольник с углом в 30° при основании. Найдите объем призмы, учитывая, что ее высота равна боковой стороне основания.

54. Основанием призмы $KLMK_1L_1M_1$ является равносторонний треугольник KLM со стороной l. Вершина K_1 проектируется в центр этого основания, а ребро KK_1 составляет с плоскостью основания угол φ. Найдите объем призмы.

55. Найдите объем параллелепипеда, учитывая, что:

а) его основанием является прямоугольник со сторонами a и b, а боковое ребро длиной c составляет со смежными сторонами основания углы, равные φ;

б) все его грани — равные ромбы с диагоналями, равными 6 см и 8 см.

56. Найдите объем наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$, учитывая, что $AB = BC = CA = a$, ABB_1A_1 — ромб, $AB_1 < BA_1$, $AB_1 = b$, а двугранный угол с ребром AB прямой.

57. Докажите, что объем наклонной призмы равен произведению бокового ребра и площади перпендикулярного сечения призмы.

58. Найдите объем наклонной треугольной призмы, учитывая, что расстояния между ее боковыми ребрами равны 37 см, 13 см и 30 см, а площадь боковой поверхности — 480 см^2.

59. Площадь боковой поверхности призмы равна $S_{бок}$, периметр и площадь перпендикулярного сечения — P и $S_{перп}$. Выразите объем этой призмы через $S_{бок}$, P и $S_{перп}$.

60. У трех граней прямоугольного параллелепипеда диагонали, выходящие из одной вершины, равны 21 см, 24 см и 27 см. Найдите объем этого параллелепипеда.

61. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 7 см и $3\sqrt{2}$ см, а острый угол между ними — 45°. Найдите объем параллелепипеда, учитывая, что его меньшая диагональ составляет с плоскостью основания угол в 45°.

62. Диагонали BD_1 и A_1C прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взаимно перпендикулярны и равны 6 см и 8 см, а ребро AB равно 3 см. Найдите объем параллелепипеда.

63. Объем прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник, равен 3 м^3, а наименьшая и наибольшая из площадей боковых граней — 3 м^2 и $3\sqrt{5}$ м^2. Найдите длины ребер призмы.

64. Докажите, что объем треугольной призмы равен половине произведения площади боковой грани и расстояния от этой грани до параллельного ей ребра.

65. На трех данных параллельных прямых, не лежащих в одной плоскости, отложены три равных отрезка AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что объем призмы, боковыми ребрами которой являются эти отрезки, не зависит от положения отрезков на данных прямых.

66. Найдите объем наклонной треугольной призмы, площади боковых граней которой пропорциональны числам 20, 37 и 51, ее боковое ребро равно 0,5 дм, а боковая поверхность — 10,8 дм^2.

67. На рис. 29 показана деталь. Найдите площадь ее поверхности и объем, учитывая, что размеры даны в миллиметрах.

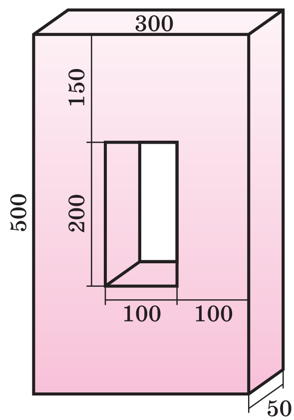


Рис. 29

68. Основанием наклонной призмы $IJKI_1J_1K_1$ является прямоугольный треугольник IJK с катетами IJ и IK, соответственно равными 7 см и 24 см. Вершина I_1 равноудалена от вершин I, J и K. Найдите объем призмы, учитывая, что ребро II_1 составляет с плоскостью основания угол в 45°.

69. Равносторонний треугольник со стороной $\sqrt{3}$ см является основанием треугольной призмы, у которой одна из вершин верхнего основания равноудалена от всех сторон нижнего основания, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол в 60°. Найдите боковую поверхность призмы и ее объем.

70. Основанием прямого параллелепипеда является ромб с площадью S_0 (рис. 30). Найдите объем параллелепипеда, учитывая, что его диагональные сечения имеют площади S_1 и S_2.

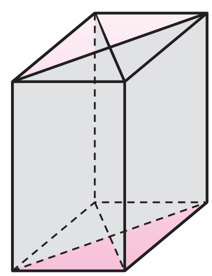


Рис. 30