§ 2. Цилиндр

А) Цилиндром называется тело, полученное вращением прямоугольника вокруг оси, проходящей через его сторону (рис. 31). На рис. 32 показано образование цилиндра при вращении прямоугольника $ABCD$ вокруг прямой l, которой принадлежит сторона AD. При этом ломаная $ABCD$ описывает *поверхность* цилиндра, отрезок BC — *боковую поверхность*, а отрезки AB и DC — *основания* цилиндра (рис. 33). Прямая, проходящая через центры оснований, называется *осью* цилиндра, отрезок, соединяющий окружности оснований и перпендикулярный их плоскостям, — *образующей* цилиндра, а перпендикуляр, опущенный из какой-либо точки одного основания на другое основание, — *высотой* цилиндра (рис. 34). Высота цилиндра равна его образующей.

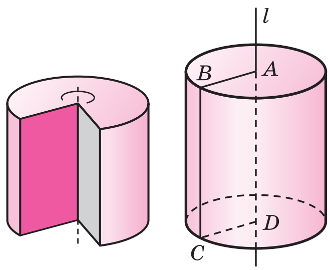

Рис. 31 Рис. 32

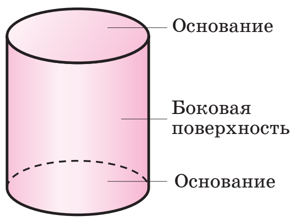

Рис. 33

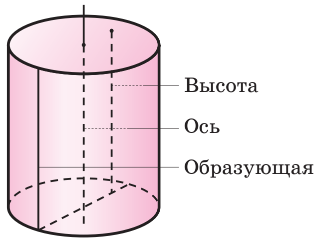

Рис. 34

Поверхность цилиндра можно развернуть на плоскость, в результате получится прямоугольник, представляющий боковую поверхность цилиндра, и два круга, представляющие его основания. На рис. 35 показаны цилиндр и его развертка.

Теорема 4. Боковая поверхность цилиндра равна произведению длины окружности основания и высоты:

$$S_{\text{бок}} = 2\pi rh.$$

Доказательство проведите самостоятельно, используя рис. 35.

Если цилиндр пересечь плоскостью, параллельной основанию, то получится круг, равный основанию (рис. 36), а если плоскостью, перпендикулярной основанию, то прямоугольник, одна сторона которого равна высоте цилиндра (рис. 37). *Осевое сечение* цилиндра, т. е. сечение плоскостью, проходящей через ось цилиндра, является прямоугольником, стороны которого равны высоте цилиндра и диаметру его основания (рис. 38).

Пример 1. Плоскость, параллельная оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу в 60°.

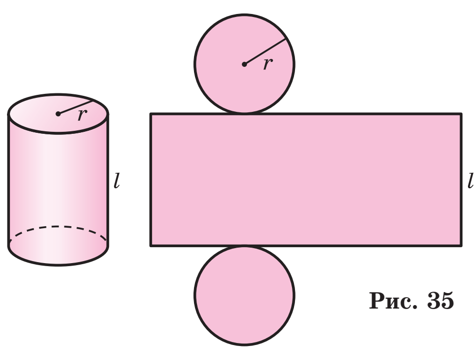

Рис. 35

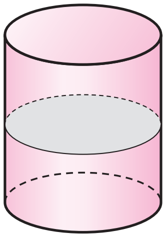

Рис. 36

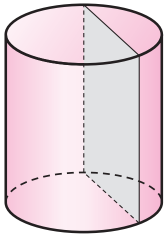

Рис. 37

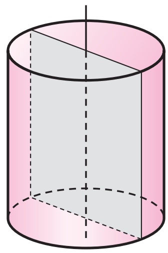

Рис. 38

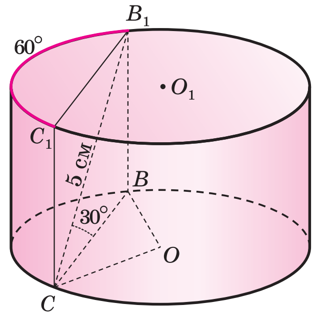

Рис. 39

Диагональ сечения равна 5 см и составляет угол в 30° с плоскостью основания. Найдем полную поверхность цилиндра.

Р е ш е н и е. Пусть плоскость, параллельная оси цилиндра, проходит через образующие BB_1 и CC_1 и отсекает от окружности дугу B_1C_1, равную 60° (рис. 39).

Поскольку $B_1B \parallel O_1O \parallel CC_1$, то $B_1B \perp (OBC)$, сечение BCC_1B_1 является прямоугольником и CB — проекция диагонали B_1C на плоскость основания цилиндра. Поэтому $\angle B_1CB = 30°$, $CB = CB_1 \cos 30° = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ см и $B_1B = \frac{1}{2}CB_1 = 2{,}5$ см.

Угол BOC — центральный, он измеряется дугой BC, тогда $\angle BOC = 60°$ и, значит, равнобедренный треугольник BOC является равносторонним. Поэтому $OB = BC = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ см. Тогда $S_{\text{осн}} = \pi \cdot OB^2 = \pi\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{75\pi}{4}$ (см²);

$$S_{\text{бок}} = 2\pi \cdot OB \cdot BB_1 = 2\pi\frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25\pi\sqrt{3}}{2} \text{ (см}^2\text{)};$$

$$S_{\text{полн}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = \frac{25\pi}{2}\left(3+\sqrt{3}\right) \text{ см}^2.$$

О т в е т: $\frac{25\pi}{2}\left(3+\sqrt{3}\right)$ см².

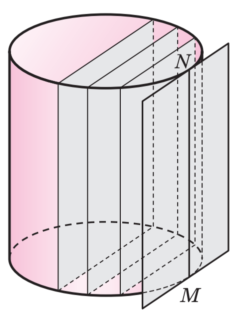

Рис. 40

Б) Будем двигать плоскость, проходящую через ось цилиндра, параллельно самой себе (рис. 40). При этом две противолежащие стороны прямоугольника-сечения цилиндра, являющиеся хордами оснований, будут уменьшаться, а две другие стороны, являющиеся образующими цилиндра, сближаться до того момента, пока не совпадут. Получим плоскость, целиком содержащую образующую цилиндра и не имеющую с ним других общих точек. Такая плоскость называется *касательной плоскостью цилиндра*. Любая прямая, проведенная в касательной плоскости цилиндра и отличная от образующей, имеет с цилиндром единственную общую точку. Такая прямая называется *касательной прямой цилиндра*.

Теорема 5. Если плоскость касается цилиндра по некоторой образующей, то ей перпендикулярна любая прямая, которая пересекает эту образующую, ось цилиндра и перпендикулярна этой оси.

Доказательство. Пусть плоскость α касается цилиндра с осью AB по образующей MN, прямая l пересекает прямую AB в точке C, прямую MN в точке D и $l \perp AB$ (рис. 41). Докажем, что прямая l перпендикулярна плоскости α.

Через точку D проведем плоскость β, перпендикулярную образующей MN. Она пересекает цилиндр по кругу с центром C на прямой AB и плоскость α — по прямой DE, касающейся окружности с центром C. Поскольку $AB \parallel MN$, то $l \perp MN$, а так как l проходит через точку D и пересекает AB, то прямые l и DC совпадают. Прямая DE, по свойству касательной к окружности, перпендикулярна радиусу CD соответствующей окружности.

Таким образом, прямая l перпендикулярна прямым MN и DE, которые пересекаются и лежат в плоскости α, поэтому, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая l перпендикулярна α.

Теорема **5** выражает *свойство касательной плоскости цилиндра*.

Теорема 6. Плоскость касается цилиндра, если она проходит через его образующую и перпендикулярна прямой, которая пересекает эту образующую, ось цилиндра и перпендикулярна этой оси.

Доказательство. Пусть плоскость α проходит через образующую MN цилиндра и перпендикулярна прямой l, которая пересекает эту образующую, ось цилиндра и перпендикулярна оси AB цилиндра (рис. 42).

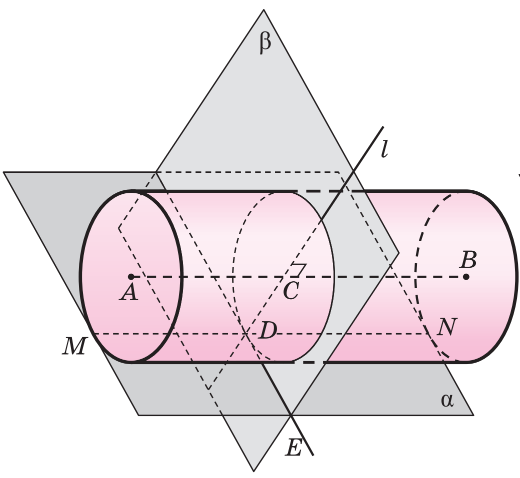

Рис. 41

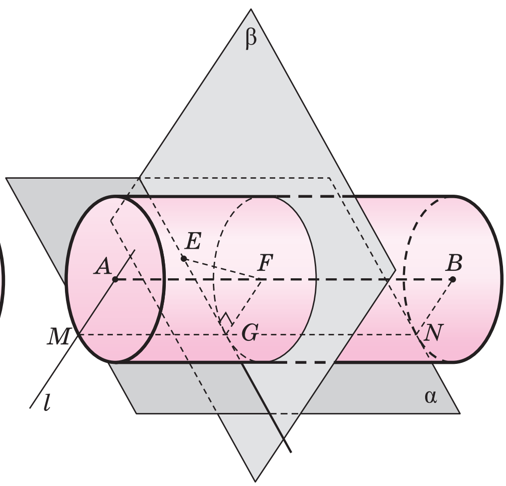

Рис. 42

Докажем, что плоскость α не имеет с цилиндром других общих точек, кроме точек образующей MN.

Пусть E — точка плоскости α, не принадлежащая образующей MN. Через эту точку проведем плоскость β, перпендикулярную оси AB. Она пересечет цилиндр по кругу с центром F, образующую MN в некоторой точке G и плоскость α по прямой GE. Поскольку $FG \parallel l$ и $l \perp \alpha$, то $FG \perp \alpha$, а поэтому $FG \perp GE$. Учитывая, что FE и FG — соответственно гипотенуза и катет прямоугольного треугольника EFG, получаем, что $FE > FG$. Значит, точка E не принадлежит цилиндру с осью AB.

Теорема **6** выражает *признак касательной плоскости цилиндра*.

Пусть есть цилиндр (рис. 43). Впишем в одно из оснований цилиндра многоугольник $A_1A_2...A_{n-1}A_n$, через его вершины A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n проведем образующие A_1B_1, A_2B_2, ..., $A_{n-1}B_{n-1}$, A_nB_n и соединим их другие концы B_1, B_2, ..., B_{n-1}, B_n. В результате получим призму $A_1A_2...A_{n-1}A_nB_1B_2...B_{n-1}B_n$. Ее называют *призмой, вписанной в цилиндр*, а сам цилиндр называют *цилиндром, описанным около призмы*. Если цилиндр описан около призмы, то основания цилиндра описаны около оснований призмы, а боковая поверхность цилиндра содержит боковые ребра призмы.

Подобным образом вводится понятие *призмы, описанной около цилиндра*, и *цилиндра, вписанного в призму* (рис. 44). Если призма описана около цилиндра, то ее основания описаны около оснований цилиндра, а боковые грани касаются боковой поверхности цилиндра.

Пример 2. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 4 см и $2\sqrt{5}$ см. Найдем площадь полной поверхности цилиндра, описанного около параллелепипеда, учитывая, что его диагональным сечением является квадрат.

Р е ш е н и е. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, $AB = 4$ см, $BC = 2\sqrt{5}$ см (рис. 45). Поскольку около прямоугольника $ABCD$ можно описать окружность, то около прямоугольного параллелепипеда

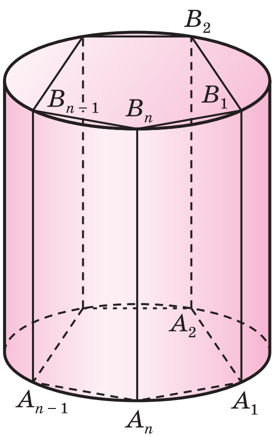

Рис. 43

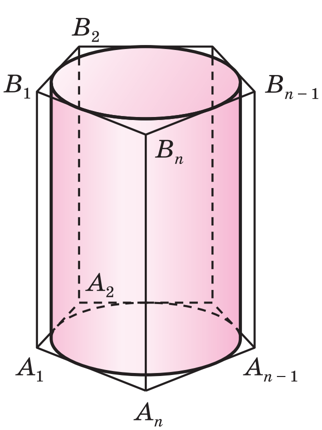

Рис. 44

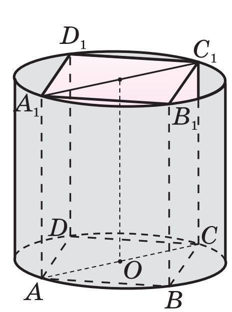

Рис. 45

можно описать цилиндр. Центр O основания цилиндра равноудален от вершин A, B, C, D основания параллелепипеда и поэтому совпадает с точкой пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$. Прямоугольник AA_1C_1C является диагональным сечением цилиндра. По условию $AA_1 = AC$.

Из прямоугольного треугольника ABC найдем диаметр AC основания цилиндра: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + \left(2\sqrt{5}\right)^2} = 6$ (см).

Учитывая, что образующая AA_1 цилиндра равна диаметру его основания, находим:

$$l = 6 \text{ см}, \ r = 3 \text{ см и } S_{\text{полн}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} =$$
$$= 2\pi \cdot r \cdot (r + l) = 2\pi \cdot 3 \cdot (3 + 6) = 54\pi \ (\text{см}^2).$$

Ответ: 54π см^2.

B)

Теорема 7. Объем цилиндра равен произведению площади его основания и образующей:

$$V_{\text{ц}} = S_{\text{осн}} \cdot l.$$

Доказательство. Пусть есть цилиндр с осью OO_1 (рис. 46). В него впишем правильную призму $A_1A_2...A_{n-1}A_nB_1B_2...B_{n-1}B_n$ и около него опишем правильную призму $C_1C_2...C_{n-1}C_nD_1D_2...D_{n-1}D_n$. В соответствии с теоремой **3**, объем первой призмы равен произведению площади многоугольника $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ и высоты призмы, которая равна боковому ребру A_1B_1, а объем второй — произведению площади многоугольника $C_1C_2...C_{n-1}C_n$ и той же высоты. Объем самого цилиндра заключен между этими объемами.

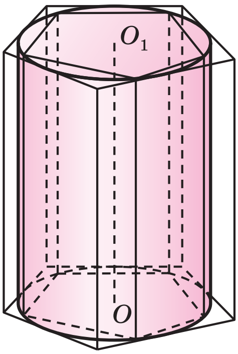

Рис. 46

Будем количество n сторон оснований призмы делать все большим и большим. При этом объем первой призмы увеличивается, объем второй — уменьшается, а разность между ними стремится к нулю, если количество сторон n становится неограниченно большим. То число, к которому приближаются объемы обеих призм, принимается за объем цилиндра.

В описанном процессе высота H призмы остается равной боковому ребру, которое равно образующей цилиндра, а площади многоугольников $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ и $C_1C_2...C_{n-1}C_n$ стремятся к площади S круга, лежащего в основании цилиндра. Следовательно, объем V цилиндра равен произведению площади S основания и образующей l цилиндра:

$$V = S \cdot l.$$

Пример 3. Цилиндр получен вращением квадрата вокруг своей стороны, равной a. Найдем объем цилиндра.

Решение. Поскольку радиус r основания цилиндра и его образующая l (рис. 47) равны стороне a квадрата, то $S_{осн} = \pi \cdot r^2 = \pi a^2$, а $V = S_{осн} \cdot l = \pi a^3$.

Ответ: πa^3.

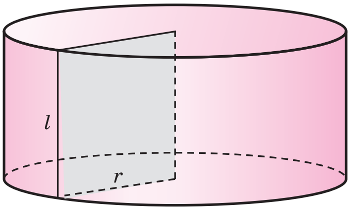

Рис. 47

1. Какое тело называется цилиндром?

2. Что называют поверхностью цилиндра; боковой поверхностью цилиндра; основаниями цилиндра?

3. Какую прямую называют осью цилиндра?

4. Какой отрезок называют образующей цилиндра; высотой цилиндра?

5. Чему равна боковая поверхность цилиндра?

6. Какая фигура получается при пересечении цилиндра плоскостью, параллельной основанию цилиндра; перпендикулярной основанию цилиндра?

7. Какое сечение цилиндра называют осевым сечением?

8. Что называют касательной плоскостью цилиндра и чем является линия касания?

9. Какая прямая называется касательной прямой цилиндра?

10. Сформулируйте свойство касательной плоскости цилиндра.

11. Сформулируйте признак касательной плоскости цилиндра.

12. Когда говорят, что призма вписана в цилиндр; цилиндр описан около призмы?

13. Когда говорят, что цилиндр вписан в призму; призма описана около цилиндра?

14. Чему равен объем цилиндра?

Задача 1. Двугранный угол величиной 60°, ребро которого содержит ось цилиндра, пересекает окружности его оснований в точках A и B, A_1 и B_1 (рис. 48). Найдите длину отрезка AB_1, учитывая, что радиус основания цилиндра равен r, а образующая — l.

Решение. Поскольку $OO_1 \perp (AOB)$, то $\angle AOO_1 = 90°$, $\angle BOO_1 = 90°$, $\angle AOB$ — линейный угол данного двугранного угла, $\angle AOB = 60°$, поэтому треугольник AOB — равносторонний, т. е. $OA = OB = AB = r$. Аналогично получаем, что $\angle A_1O_1O = 90°$, $\angle B_1O_1O = 90°$, $O_1A_1 = O_1B_1 = A_1B_1 = r$. Значит, четырехугольники AOO_1A_1, BOO_1B_1 и ABB_1A_1 — прямоугольники.

Поэтому $AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{r^2 + l^2}$.

Ответ: $\sqrt{r^2 + l^2}$.

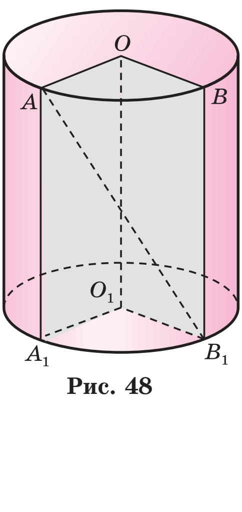

Рис. 48

Задача 2. Найдите объем цилиндра, вписанного в правильную шестиугольную призму, каждое ребро которой равно a.

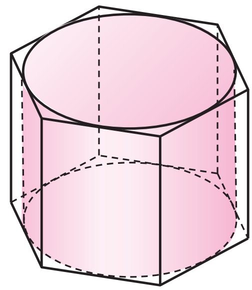

Рис. 49

Р е ш е н и е. Высота цилиндра, вписанного в прямую призму, равна боковому ребру призмы: $H = a$ (рис. 49). Радиус основания цилиндра равен радиусу окружности, вписанной в основание призмы: $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Теперь находим:

$$V = S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{3\pi a^2}{4} \cdot a = \frac{3\pi a^3}{4}.$$

О т в е т: $\frac{3\pi a^3}{4}$.

Задача 3. В цилиндр вписана треугольная призма, основанием которой является прямоугольный треугольник с острым углом в 30° (рис. 50). В эту призму вписан цилиндр. Найдите отношение объемов цилиндров.

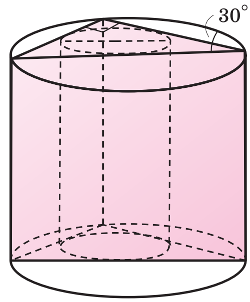

Рис. 50

Р е ш е н и е. Поскольку вписанный в треугольную призму и описанный около нее цилиндры имеют равные высоты, то отношение их объемов равно отношению площадей оснований цилиндров, которое равно квадрату отношения радиусов этих оснований.

Выразим радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности через радиус описанной окружности. Поскольку $r = \frac{a+b-c}{2}$ и $R = \frac{c}{2}$, где a и b — катеты прямоугольного треугольника, c — его гипотенуза, r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей, то $c = 2R$, и, учитывая, что катет, противолежащий углу в 30°, равен половине гипотенузы, получаем:

$$a = R,\ b = R\sqrt{3},\ r = \frac{R + R\sqrt{3} - 2R}{2} = \frac{R\left(\sqrt{3}-1\right)}{2} \text{ и } V_2 : V_1 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}.$$

О т в е т: $V_2 : V_1 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

Задача 4. В основании прямой призмы лежит равнобедренная трапеция с меньшим основанием a, боковой стороной $2a$ и острым углом в 60°. Сечение, проходящее через различные основания трапеций, имеет площадь S. Докажите, что в эту призму можно вписать цилиндр и найти его объем.

Р е ш е н и е. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая призма (рис. 51), $AD \parallel BC$, $BC = a$, $AB = CD = 2a$, $\angle BAD = 60°$, $S_{AB_1C_1D} = S$.

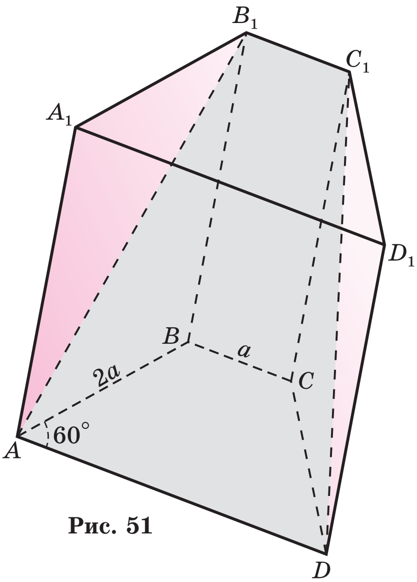

Рис. 51

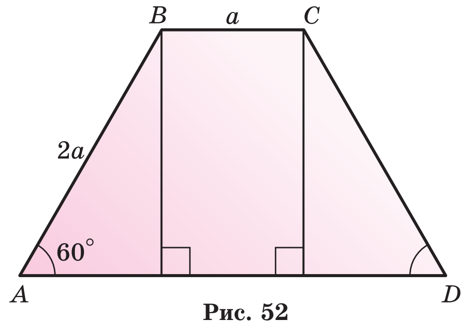

Рис. 52

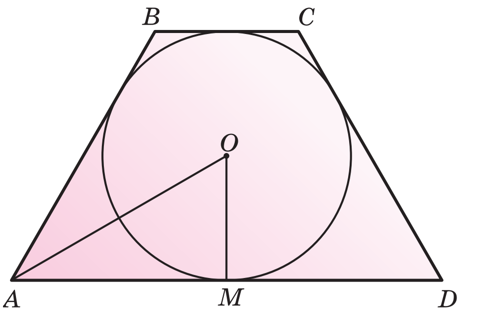

Рис. 53

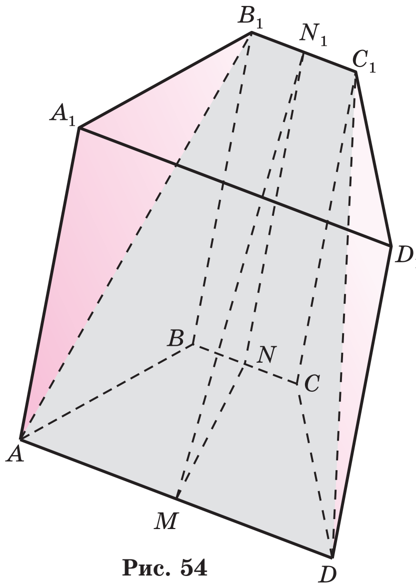

Рис. 54

Для трапеции $ABCD$ (рис. 52) находим:

$$AD = BC + 2AB\cos\angle BAD = a + 2\cdot 2a\cos 60° = 3a.$$

Поскольку $AB + CD = 4a = AD + BC$, то в трапецию $ABCD$ можно вписать окружность, а в прямую призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — цилиндр.

Пусть O — центр окружности, вписанной в трапецию $ABCD$, M — точка касания этой окружности со стороной AD (рис. 53). Тогда M — середина AD, AO — биссектриса угла BAD,

$$AM = \frac{1}{2}AD = \frac{3a}{2},\ MO = AM\,\mathrm{tg}\,30° = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Поскольку $B_1C_1 \parallel BC \parallel AD$, то сечение AB_1C_1D — трапеция, причем равнобедренная с основаниями B_1C_1 и AD, равными a и $3a$ соответственно. Поэтому $S = \frac{B_1C_1 + AD}{2}\cdot h = 2ah$, где h — высота трапеции AB_1C_1D.

Отсюда $h = \frac{S}{2a}$.

Пусть N и N_1 — середины ребер BC и B_1C_1 соответственно (рис. 54), тогда N_1M — высота трапеции, NN_1 — касательная прямая вписанного цилиндра, $N_1N \perp (ABC)$. Значит, $\angle N_1NM = 90°$, поэтому треугольник N_1NM прямоугольный и:

$$N_1N = \sqrt{MN_1^2 - MN^2} = \sqrt{\left(\frac{S}{2a}\right)^2 - \left(a\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{2a}\sqrt{S^2 - 12a^4}.$$

Поскольку радиус MO основания вписанного цилиндра равен $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, а его образующая — $\frac{1}{2a}\sqrt{S^2 - 12a^4}$, то объем цилиндра:

$$V = \pi OM^2 \cdot N_1N = \frac{3\pi a}{8}\sqrt{S^2 - 12a^4}.$$

Ответ: $\frac{3\pi a}{8}\sqrt{S^2 - 12a^4}$.

71. Верно ли, что:

а) высота цилиндра равна его образующей;

б) сечение цилиндра плоскостью, параллельной основанию, есть круг, равный основанию;

в) сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной основанию, есть прямоугольник, одна сторона которого равна высоте цилиндра;

г) ось цилиндра параллельна его образующей;

д) осевое сечение цилиндра является прямоугольником, смежные стороны которого равны высоте цилиндра и диаметру основания;

е) плоскость, параллельная основанию цилиндра, отсекает от него тело, которое также является цилиндром?

72. Имеет ли цилиндр:

а) центр симметрии; б) оси симметрии;

в) плоскости симметрии?

73. Определите, какую фигуру образуют точки поверхности цилиндра, равноотстоящие от:

а) двух точек основания;

б) двух образующих.

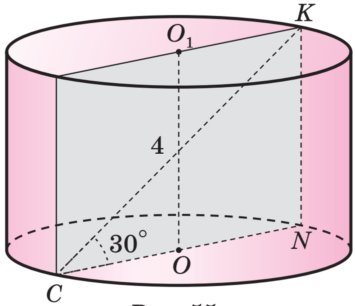

Рис. 55

74. Найдите радиус основания и высоту цилиндра по данным, приведенным на рис. 55.

75. Найдите диагональ осевого сечения цилиндра, учитывая, что радиус цилиндра и его высота соответственно равны:

а) 1,5 м и 4 м; б) 10 см и 21 см; в) 22 и 117.

76. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 24 см, а угол между ней и образующей цилиндра — 60°. Найдите:
а) высоту цилиндра; б) радиус цилиндра; в) площадь сечения.

77. Цилиндр получен вращением квадрата со стороной a вокруг одной из его сторон. Найдите:
а) площадь осевого сечения цилиндра;
б) площадь боковой и полной поверхности цилиндра.

78. Осевое сечение цилиндра — квадрат, диагональ которого равна 40 см. Найдите:
а) высоту цилиндра;
б) площадь основания цилиндра;
в) боковую поверхность цилиндра;
г) полную поверхность цилиндра.

79. Осевые сечения двух цилиндров равны. Можно ли утверждать, что равны и высоты этих цилиндров?

80. Площадь осевого сечения цилиндра равна 40 м^2, а площадь его основания — 10 м^2. Найдите высоту цилиндра.

81. Высота цилиндра равна 16 см, радиус его основания — 10 см. Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной его оси, учитывая, что расстояние между этими плоскостью и осью равно 6 см.

82. Цилиндр, высота которого равна 12 см, а радиус основания — 10 см, пересечен такой плоскостью, параллельной оси цилиндра, что в сечении получился квадрат. Найдите расстояние от оси цилиндра до секущей плоскости.

83. Через образующие AB и CD цилиндра с радиусом основания r и высотой h проведено сечение, которое отсекает от окружности основания дугу в 60°. Найдите площадь этого сечения.

84. Есть цилиндр, радиус основания которого равен r, а высота — h. Точки A и B на окружностях оснований цилиндра выбраны так, что прямая AB находится на расстоянии d от оси цилиндра. Найдите:
а) h, учитывая, что $r = 10$ дм, $d = 8$ дм, $AB = 13$ дм;
б) d, учитывая, что $h = 12$ см, $r = 10$ см, $AB = 20$ см.

85. Через одну образующую цилиндра проведены две секущие плоскости, из которых одна проходит через ось цилиндра под углом φ к другой. Найдите отношение площадей сечений цилиндра этими плоскостями.

86. Высота цилиндра равна h, а площадь осевого сечения — S. Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной его оси и отстоящей от нее на d.

87. Через образующую цилиндра проведено две такие взаимно перпендикулярные плоскости, что площади полученных сечений равны S каждая. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

88. Найдите площадь осевого сечения цилиндра, боковая поверхность которого равна S.

89. Найдите радиус основания цилиндра с полной поверхностью 288π см^2 и его высоту, учитывая, что она на 12 см больше радиуса основания.

90. Определите, сколько квадратных метров листовой жести пойдет на изготовление трубы длиной 4 м и диаметром 25 см, учитывая, что на швы необходимо добавить 2,5 % площади ее боковой поверхности.

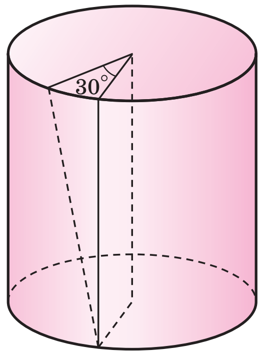

Рис. 56

91. Концы отрезка лежат на окружностях оснований цилиндра, а угол между радиусами, проведенными в его концы, равен 30° (рис. 56). Найдите угол между этим отрезком и осью, учитывая, что осевым сечением цилиндра является квадрат.

92. Плоскость, параллельная оси цилиндра с высотой 10 дм, пересекает его по прямоугольнику с площадью 240 дм^2. Найдите боковую поверхность цилиндра, учитывая, что расстояние от оси цилиндра до плоскости равно 9 дм.

93. На окружностях оснований цилиндра, высота и радиус основания которого соответственно равны 20 см и 70 см, выбраны точки A, B, C, D, являющиеся вершинами квадрата (рис. 57). Найдите его сторону.

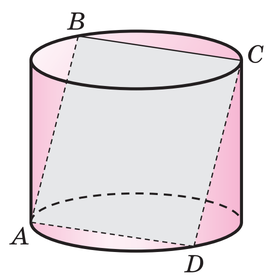

Рис. 57

94. Найдите боковую и полную поверхности цилиндра, у которого угол между диагоналями развертки боковой поверхности равен φ, а сама диагональ — d.

95. Учитывая, что один цилиндр получен вращением прямоугольника $ABCD$ вокруг прямой AB, другой — вращением того же прямоугольника вокруг прямой BC:
а) докажите, что боковые поверхности этих цилиндров равны;
б) найдите отношение площадей полных поверхностей этих цилиндров, учитывая, что $AB = p$, $BC = q$.

96. При вращении прямоугольника вокруг неравных сторон получаются цилиндры, полные поверхности которых равны S_1 и S_2. Найдите диагональ прямоугольника.

97. Боковая поверхность цилиндра равна площади круга, описанного вокруг его осевого сечения. Найдите отношение радиуса цилиндра к его высоте.

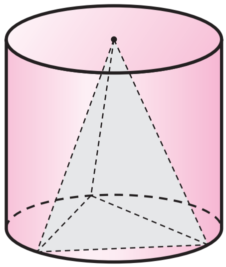

Рис. 58

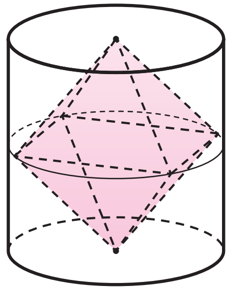

Рис. 59

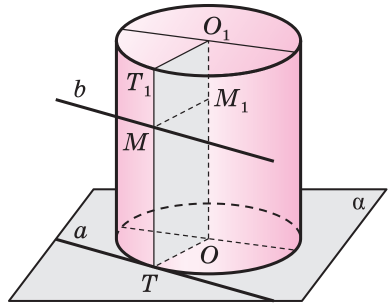

Рис. 60

98*. Найдите высоту и радиус цилиндра, у которого площадь боковой поверхности наибольшая, учитывая, что периметр осевого сечения цилиндра равен $2p$.

99*. Треугольная пирамида, все ребра которой равны a, и цилиндр расположены так, что одна вершина пирамиды является центром основания цилиндра, а три остальные лежат на окружности другого основания (рис. 58). Найдите полную поверхность цилиндра.

100*. Восьмигранник, все грани которого являются правильными треугольниками, и цилиндр расположены так, что две вершины восьмигранника являются центрами оснований цилиндра, а остальные лежат на цилиндрической поверхности (рис. 59). Найдите площадь осевого сечения цилиндра, учитывая, что его высота равна h.

101. Учитывая, что точка M является точкой образующей TT_1 цилиндра с осью OO_1, точка M_1 — проекцией точки M на эту ось, прямая a касается окружности основания с центром O, а прямая b касается цилиндра в точке M (рис. 60), укажите, какой может быть величина угла между:

а) плоскостью TT_1O и прямой a; в) прямыми TT_1 и TO;
б) плоскостью TT_1O и прямой b; г) прямыми TT_1 и MM_1.

102. Верно ли, что:

а) плоскость, определенная осью цилиндра и образующей, по которой другая плоскость касается цилиндра, перпендикулярна касательной плоскости;

б) плоскость, проходящая через образующую цилиндра и перпендикулярная плоскости, определенной этими образующей и осью цилиндра, является касательной плоскостью цилиндра?

103. Докажите, что если плоскость параллельна оси цилиндра и отстоит от нее на радиус цилиндра, то она содержит образующую цилиндра, и притом только одну, т. е. является касательной плоскостью цилиндра.

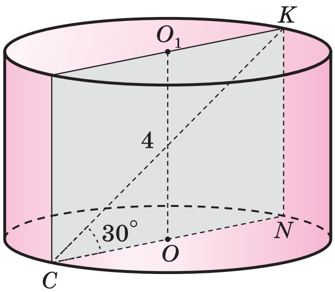

Рис. 61

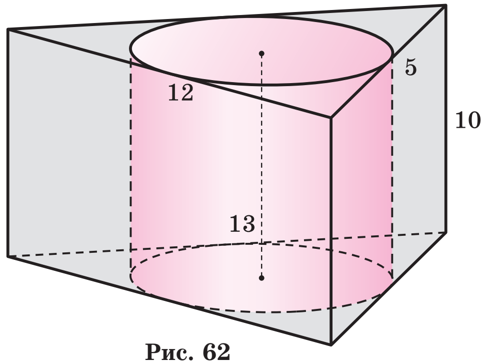

Рис. 62

104. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник с углом в 30° и противолежащим катетом, равным 8 см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в эту призму, учитывая, что его осевым сечением является квадрат.

105. Найдите полную поверхность цилиндра, вписанного в призму, по данным, приведенным на рисунке:

а) 61; б) 62.

106. В цилиндр, радиус основания и высота которого равны, вписана правильная шестиугольная призма. Найдите угол между диагональю ее боковой грани и осью цилиндра.

107. Есть правильная треугольная призма с боковым ребром a. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в эту призму, учитывая, что отрезок, соединяющий середину бокового ребра с центром основания, составляет с основанием угол α (рис. 63).

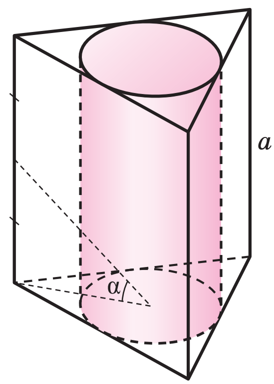

Рис. 63

108. Определите, можно ли вписать цилиндр в прямую призму, если ее основанием является:

а) треугольник; в) прямоугольник; б) ромб; г) трапеция.

109. Определите, можно ли описать цилиндр около прямой призмы, если ее основанием является:

а) треугольник; б) ромб; в) прямоугольник; г) трапеция.

110. Определите, около какой прямой призмы можно описать цилиндр, если эта призма:

а) четырехугольная; б) шестиугольная.

111. Определите, в какую прямую призму можно вписать цилиндр, если эта призма:

а) четырехугольная; б) шестиугольная.

112. Докажите, что:

а) если прямая четырехугольная призма вписана в цилиндр, то сумма противолежащих двугранных углов при боковых ребрах равна 180°;

б) если четырехугольная прямая призма описана около цилиндра, то суммы площадей противоположных боковых граней равны.

113. Учитывая, что V, r и h — соответственно объем, радиус и высота цилиндра, найдите:

а) V, если $r = 3\sqrt{2}$ см, $h = 6$ см;

б) r, если $V = 120$ см^3, $h = 3{,}6$ см;

в) h, если $r = h$, $V = 27\pi$ см^3.

114. Найдите объем цилиндра, осевым сечением которого является квадрат с диагональю 30 см.

115. Найдите длину алюминиевого провода диаметром 4 мм, учитывая, что его масса равна 6,8 кг, а плотность алюминия — 2,6 г/см^3.

116. Определите, сколько тонн нефти содержит цилиндрическая цистерна диаметром 18 м и высотой 7 м, учитывая, что плотность нефти равна 0,85 г/см^3?

117. Найдите боковую поверхность и объем цилиндра, диаметр основания которого равен 1 м, а высота равна длине окружности основания.

118. Найдите объем цилиндра, у которого площадь основания равна Q, а площадь осевого сечения — S.

119. Найдите массу свинцовой трубы длиной 25 м с толщиной стенок 4 мм и внутренним диаметром 13 мм, учитывая, что плотность свинца равна 11,34 г/см^3.

120. Определите, во сколько раз нужно увеличить:

а) высоту цилиндра без изменения его основания, чтобы объем увеличился в n раз;

б) радиус основания цилиндра без изменения его высоты, чтобы объем увеличился в n раз.

121*. Докажите, что полная поверхность цилиндра равна боковой поверхности другого цилиндра того же радиуса, высота которого равна сумме радиуса и высоты данного цилиндра.

122*. В цилиндр вписана призма, основанием которой является прямоугольный треугольник с катетом a и прилежащим к нему углом α. Найдите объем цилиндра, учитывая, что высота призмы равна h.

123*. Найдите объем цилиндра, учитывая, что диагональ вписанного в него прямоугольного параллелепипеда равна m и составляет с основанием угол α.

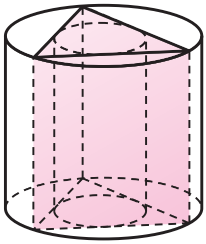

Рис. 64

124. В цилиндр вписана правильная треугольная призма, а в призму вписан цилиндр (рис. 64). Найдите отношение объемов цилиндров.

125. Найдите объем цилиндра, вписанного в правильную шестиугольную призму, у которой каждое ребро равно a.

126. В цилиндр вписана правильная n-угольная призма. Найдите отношение объемов призмы и цилиндра, учитывая, что:

а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) $n = 8$; д) n — натуральное число.

127*. Цилиндр вписан в прямой параллелепипед, основанием которого является ромб с меньшей диагональю m и большим углом α. Сечение, проведенное через меньшую диагональ одного основания и конец большей диагонали другого, составляет с основанием угол в $45°$. Найдите объем цилиндра.