§ 3. Пирамида

А) Вы уже знакомы с **пирамидой** — многогранником, одна грань которого является многоугольником, а остальные грани-треугольники имеют общую вершину.

Треугольные грани пирамиды, имеющие общую вершину, называют **боковыми гранями**, а эту общую вершину — **вершиной** пирамиды. Ребра боковых граней, сходящиеся в вершине пирамиды, называют **боковыми ребрами** пирамиды. Многоугольник, которому не принадлежит вершина пирамиды, называют **основанием** пирамиды (рис. 65).

Пирамиды разделяют на *треугольные*, *четырехугольные*, *пятиугольные* и т. д. в зависимости от количества сторон их оснований. Пирамида, изображенная на рис. 65, — пятиугольная, а на рис. 66 — восьмиугольная. Треугольную пирамиду еще называют *тетраэдром*. У тетраэдра все грани являются треугольниками (рис. 67).

Перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды к плоскости ее основания, называется **высотой пирамиды**. На рис. 66 показана высота SO пирамиды $SABCDEFGH$. Основание высоты может и не принадлежать основанию пирамиды (рис. 68).

Плоскость, проходящая через два боковых ребра пирамиды, не принадлежащие одной грани, называется *диагональной плоскостью*, а сечение пирамиды диагональной плоскостью — *диагональным сечением*. На рис. 69 показано диагональное сечение шестиугольной пирамиды.

Пирамида, основанием которой является правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника, называется **правильной пирамидой** (рис. 70).

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется **апофемой** пирамиды.

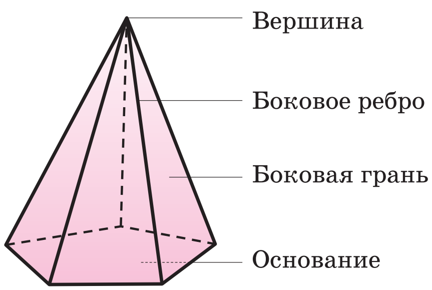

Рис. 65

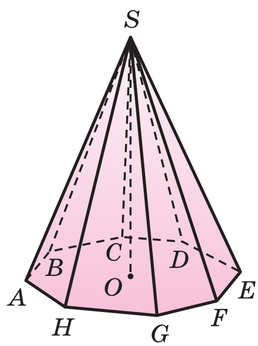

Рис. 66

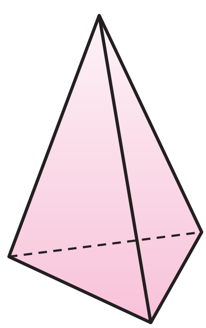

Рис. 67

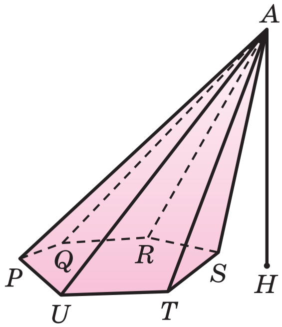

Рис. 68

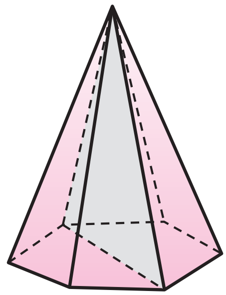

Рис. 69

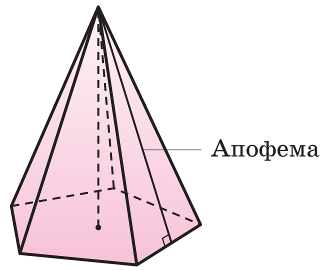

Рис. 70

Отметим, что *в правильной пирамиде*:

- *боковые ребра равны*;
- *боковые грани равны*;
- *апофемы равны*;
- *двугранные углы при основании равны*;
- *двугранные углы при боковых ребрах равны*;
- *каждая точка высоты равноудалена от вершин основания*;
- *каждая точка высоты равноудалена от ребер основания*;
- *каждая точка высоты равноудалена от боковых граней.*

Отметим, что *если в пирамиде равны все*:

- *боковые ребра, то около ее основания можно описать окружность и центр этой окружности совпадает с основанием высоты пирамиды* (рис. 71);
- *двугранные углы при основании, то в это основание можно вписать окружность и центр этой окружности совпадает с основанием высоты пирамиды* (рис. 72).

Боковые грани составляют *боковую поверхность пирамидыы*, а боковые грани вместе с основанием — *полную поверхность пирамиды.*

Вы знаете, что *боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению полупериметра ее основания и апофемы.*

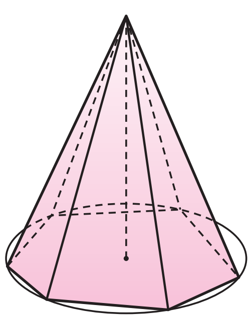

Рис. 71

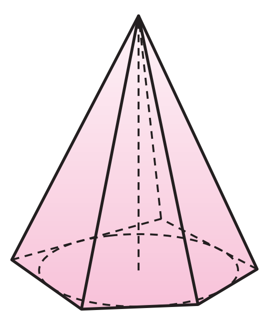

Рис. 72

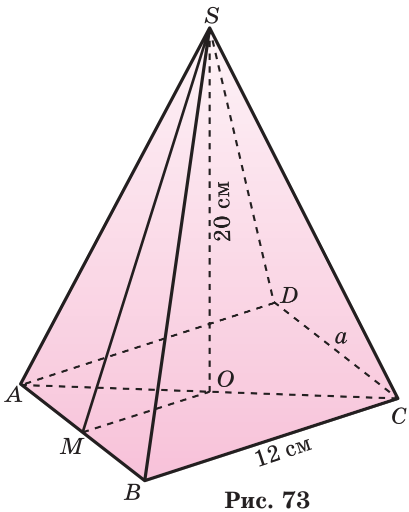

Рис. 73

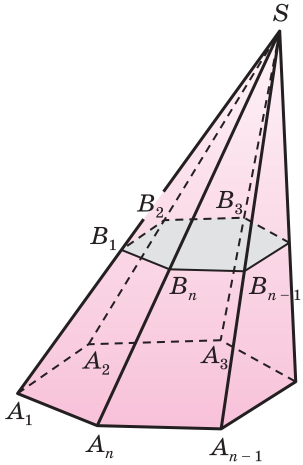

Рис. 74

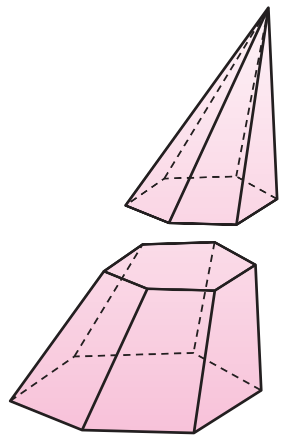

Рис. 75

Пример 1. Найдем площадь полной поверхности правильной черырехугольной пирамиды с ребром основания 12 см и высотой 20 см.

Р е ш е н и е. В основании правильной четырехугольной пирамиды лежит квадрат. Поэтому $S_{осн} = a^2 = 144$ см^2.

Высота SO пирамиды $SABCD$ проходит через центр O квадрата основания, апофема — через середину M ребра основания (рис. 73). В прямоугольном треугольнике SOM катет OM равен половине ребра основания — $OM = 6$ см, другой катет SO — известная высота. По теореме Пифагора можно найти гипотенузу: $SM = \sqrt{6^2 + 20^2} = 2\sqrt{109}$ (см).

Теперь последовательно находим:

$$S_{SAB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot SM = 6 \cdot 2\sqrt{109} = 12\sqrt{109} \text{ (см}^2\text{)},$$

$$S_{бок} = 4 \cdot S_{SAB} = 48\sqrt{109} \text{ см}^2, \quad S_{полн} = S_{осн} + S_{бок} = 144 + 48\sqrt{109} \text{ (см}^2\text{)}.$$

О т в е т: $144 + 48\sqrt{109}$ см^2.

Б)

Теорема 1. Если пирамиду пересечь плоскостью, параллельной основанию, то:
а) боковые ребра и высота разделяются на пропорциональные части;
б) в сечении получается многоугольник, подобный основанию;
в) площади сечения и основания относятся как квадраты их расстояний от вершины пирамиды.

Используя рис. 74, докажите эту теорему самостоятельно.

Секущая плоскость, параллельная основанию пирамиды, разделяет ее на две части (рис. 75). Одна из этих частей также является пирамидой, а другая — многогранником, который называется **усеченной пирамидой**.

Параллельные грани усеченной пирамиды называются ее **основаниями** (рис. 76). Основания усеченной пирамиды — подобные многоугольники,

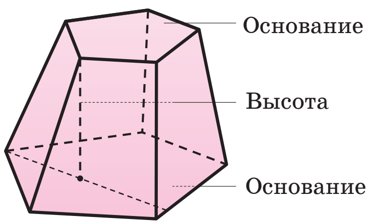

Рис. 76

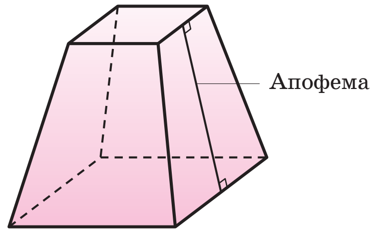

Рис. 77

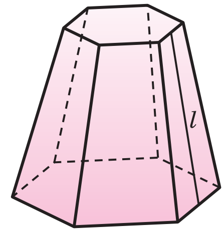

Рис. 78

стороны которых попарно параллельны, поэтому ее боковые грани — трапеции.

Высотой усеченной пирамиды называется перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки одного основания пирамиды к плоскости другого основания.

Усеченная пирамида называется *правильной*, если она является частью правильной пирамиды. Высота боковой грани правильной усеченной пирамиды называется *апофемой* усеченной пирамиды. На рис. 77 показаны четырехугольная правильная усеченная пирамида и одна из ее апофем.

Теорема 2. Боковая поверхность правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров ее оснований и апофемы:

$$S_{бок} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)l.$$

Доказательство. Пусть есть правильная n-угольная усеченная пирамида (рис. 78). Пусть P_1 и P_2 — соответственно периметры нижнего и верхнего оснований и l — апофема пирамиды.

Боковая поверхность данной пирамиды состоит из n равных друг другу трапеций. Пусть a и b — основания одной из этих трапеций, тогда ее площадь равна $\frac{1}{2}(a+b)l$. Учитывая, что боковая поверхность пирамиды состоит из n таких трапеций, получим, что:

$$S_{бок} = \frac{1}{2}(a+b)ln = \frac{1}{2}(an+bn)l = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)l.$$

Пример 2. В правильной треугольной усеченной пирамиде ребра оснований равны $6\sqrt{3}$ и $2\sqrt{3}$, боковое ребро наклонено под углом в $60°$ к плоскости основания. Найдем полную поверхность этой пирамиды.

Р е ш е н и е. Найдем площади оснований:

$$S_1 = \frac{\left(6\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = 27\sqrt{3}, \quad S_2 = \frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}.$$

Чтобы найти боковую поверхность, необходимо знать апофему усеченной пирамиды.

Через параллельные медианы AM и A_1M_1 оснований пирамиды проведем сечение (рис. 79). Оно содержит высоту OO_1 пирамиды, соединяющей центры оснований усеченной пирамиды, и высоту MM_1 боковой грани (апофему). Ребро AA_1 проектируется на прямую AM. Поэтому в трапеции AA_1M_1M угол A_1AM равен 60°. Далее находим:

$$AM = 6\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 9;\quad A_1M_1 = 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3;\quad AO = \frac{2}{3}\cdot AM = 6;$$

$$OM = AM - AO = 9 - 6 = 3;\ A_1O_1 = \frac{2}{3}\cdot A_1M_1 = 2;$$

$$O_1M_1 = A_1M_1 - A_1O_1 = 3 - 2 = 1.$$

Пусть A_1K и M_1P — высоты трапеции AA_1M_1M. Тогда:

$$AK = AO - OK = AO - O_1A_1 = 6 - 2 = 4,$$

$$MP = MO - OP = AO - O_1A_1 = 3 - 1 = 2.$$

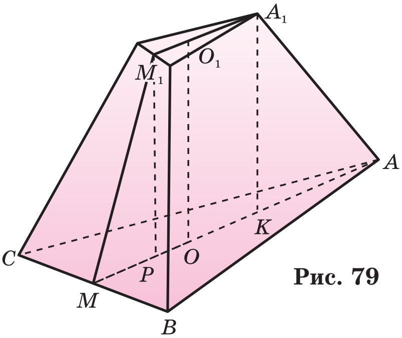

Рис. 79

Из прямоугольного треугольника AKA_1 находим:

$$A_1K = AK\cdot\ \mathrm{tg}\,60^\circ = 4\sqrt{3} = OO_1 = M_1P.$$

Из прямоугольного треугольника PMM_1 находим:

$$MM_1 = \sqrt{PM^2 + PM_1^2} = \sqrt{4+48} = 2\sqrt{13}.$$

Теперь:

$$S_{\text{бок}} = 3\cdot\frac{6\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2}\cdot 2\sqrt{13} = 24\sqrt{39},\quad S_{\text{полн}} = S_1 + S_2 + S_{\text{бок}} = 30\sqrt{3} + 24\sqrt{39}.$$

О т в е т: $30\sqrt{3} + 24\sqrt{39}$.

В) Установим формулу для вычисления объема пирамиды.

Тела, имеющие равные объемы, называются *равновеликими*.

Теорема 3. Треугольные пирамиды с равновеликими основаниями и равными высотами равновелики.

Доказательство. Пусть есть две треугольные пирамиды с равновеликими основаниями и равными высотами (рис. 80). Разделим высоты одной и другой пирамид на n долей и через точки деления проведем плоскости, параллельные основаниям. По теореме **1в**, площади соответствующих сечений пирамид равны. Каждая из пирамид разделяется на n частей-слоев. Для первой пирамиды в каждой части построим, как показано на рис. 80, призму, целиком содержащуюся в этой части, а для каждой части второй пирамиды — призму, целиком содержащую эту часть.

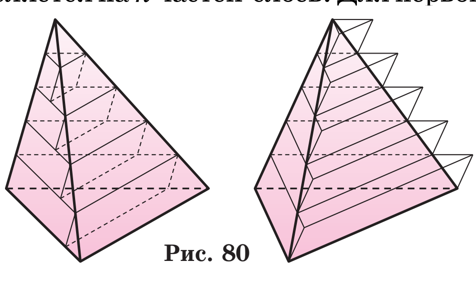
Рис. 80

Пусть V_1 и V_2 — объемы первой и второй пирамид, а Q_1 и Q_2 — суммарные объемы призм, построенных для этих пирамид. При счете от оснований пирамид призма в k-й части первой пирамиды равновелика призме для $(k + 1)$-й части второй пирамиды, так как у этих призм равновеликие основания и равные высоты. Поэтому объем Q_2 больше объема Q_1 на объем первой построенной призмы, у которой основанием является основание второй пирамиды, а высота равна $\frac{h}{n}$, где h — высота пирамиды (см. рис. 80), т. е. $Q_2 = Q_1 + S \cdot \frac{h}{n}$, где S — площадь основания пирамиды. Теперь учтем, что $V_2 < Q_2$ и $V_1 > Q_1$. Будем иметь $V_2 < Q_1 + S \cdot \frac{h}{n} < V_1 + S \cdot \frac{h}{n}$, и поэтому:

$$V_2 - V_1 < S \cdot \frac{h}{n} \quad (1).$$

Такие же рассуждения можно провести, если первую и вторую пирамиды поменять ролями. В результате получим неравенство:

$$V_1 - V_2 < S \cdot \frac{h}{n} \quad (2).$$

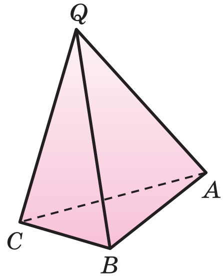

Рис. 81

Если $V_1 \neq V_2$, то неравенства (1) и (2) при любом n не могут одновременно быть истинными. Например, если допустить, что $V_2 > V_1$ и $V_2 - V_1 = a > 0$, то при $n > \frac{Sh}{a}$ неравенство (1) не будет верным. А если допустить, что $V_1 > V_2$ и $V_1 - V_2 = b > 0$, то неравенство (2) не будет верным при $n > \frac{Sh}{b}$.

Получили, что неравенства (1) и (2) истинны только при $V_1 = V_2$.

Теорема 4. Объем пирамиды равен третьей доли произведения площади ее основания и высоты:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H.$$

Доказательство. Пусть есть треугольная пирамида $QABC$ (рис. 81). Достроим ее до призмы $ABCEDQ$ с основанием ABC (рис. 82). Плоскостью QAB отделим от призмы данную пирамиду, получится четырехугольная пирамида $QBDEA$. Диагональная плоскость QDA разделяет пирамиду $QBDEA$ на две пирамиды $QDAB$ и $QDAE$ (рис. 83), у которых одна и та же высота, проведенная из вершины Q, и равные основания ABD и AED.

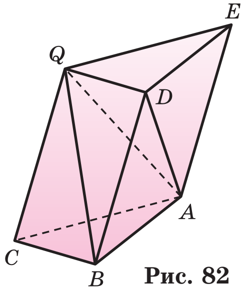

Рис. 82

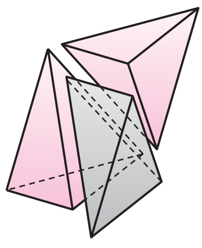
Рис. 83

Поэтому, в соответствии с теоремой **3**, пирамиды $QDAB$ и $QDAE$ равновеликие. Сравним пирамиду $QDAE$ с данной пирамидой $QABC$. У них равны основания QDE и ABC и равны высоты, проведенные из вершин A и Q, поэтому эти пирамиды также равновелики. Получается, что все три пирамиды $QABC$, $QDAB$ и $QDAE$ равновелики. Поскольку объем призмы $ABCEDQ$ равен произведению $S \cdot H$ площади S основания ABC и высоты призмы H, которая равна высоте пирамиды $QABC$, то объем пирамиды $QABC$, т. е. третьей части призмы $ABCEDQ$, равен третьей доле этого объема, т. е. $\frac{1}{3} S \cdot H$.

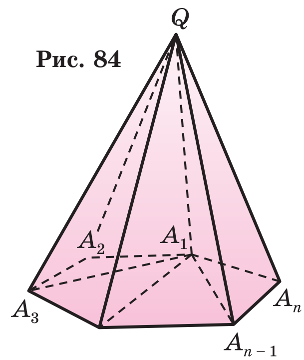
Рис. 84

Пусть теперь есть произвольная пирамида $QA_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ (рис. 84). Через диагонали A_1A_3, A_1A_4, ..., A_1A_{n-1} основания $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$, выходящие из одной вершины A_1, проведем диагональные сечения, они разделят данную пирамиду на треугольные пирамиды $QA_1A_2A_3$, $QA_1A_3A_4$, ..., $QA_1A_{n-1}A_n$. Поскольку все они имеют общую высоту H, то:

$$V = \frac{1}{3} S_{A_1A_2A_3} \cdot H + \frac{1}{3} S_{A_1A_3A_4} \cdot H + \ldots + \frac{1}{3} S_{A_1A_{n-1}A_n} \cdot H =$$
$$= \frac{1}{3} H\left(S_{A_1A_2A_3} + S_{A_1A_3A_4} + \ldots + S_{A_1A_{n-1}A_n}\right) = \frac{1}{3} H \cdot S = \frac{1}{3} S \cdot H.$$

Пример 3. Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды равна 60 см^2, а ее апофема — 5 см. Найдем объем пирамиды.

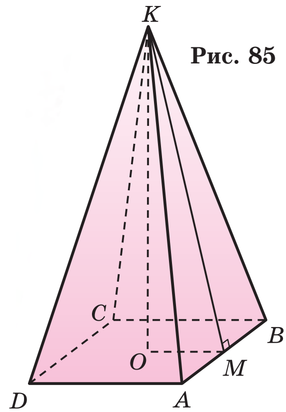
Рис. 85

Р е ш е н и е. Пусть KM — апофема правильной пирамиды $KABCD$, KO — ее высота (рис. 85). Тогда M — середина ребра AB, O — центр квадрата $ABCD$ и $KM = 5$ см.

Поскольку $S_{бок} = \frac{1}{2} nal$, где n — количество сторон основания пирамиды, a — длина стороны пирамиды, l — апофема пирамиды, то $60 \cdot 2 = BC \cdot 4 \cdot 5$, откуда $BC = 6$ см, $S_{ABCD} = BC^2 = 36$ см^2, $OM = \frac{1}{2} BC = 3$ см.

Из прямоугольного треугольника KOM найдем высоту KO пирамиды: $KO = \sqrt{KM^2 - MO^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ (см).

Теперь найдем объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot KO = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4 = 48 \text{ (см}^3\text{)}.$$

О т в е т: 48 см^3.

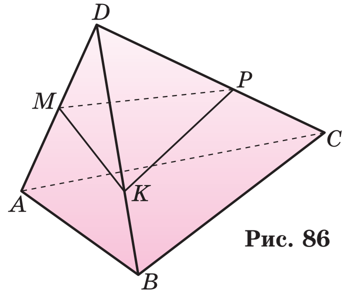

Рис. 86

Пример 4*. На ребрах DA, DB и DC пирамиды $DABC$ выбраны точки M, K и P соответственно так, что $DM : MA = 1 : 1$, $DK : KB = 2 : 1$ и $DP : PC = 3 : 2$ (рис. 86). Найдем отношение, в котором плоскость MKP делит объем пирамиды.

Докажем, что $\frac{V_{DMKP}}{V_{DABC}} = \frac{DM \cdot DK \cdot DP}{DA \cdot DB \cdot DC}$.

Пусть CC_1 и PP_1 — высоты в пирамидах $DABC$ и $DMKP$. Из подобия прямоугольных треугольников DCC_1 и DPP_1 следует, что $PP_1 : DP = CC_1 : DC$. Поэтому:

$$\frac{V_{DMKP}}{V_{DABC}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot S_{DMK} \cdot PP_1}{\frac{1}{3} \cdot S_{DAB} \cdot CC_1} = \frac{S_{DMK}}{S_{DAB}} \cdot \frac{DP}{DC}.$$

Далее:

$$\frac{S_{DMK}}{S_{DAB}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot DM \cdot DK \cdot \sin\angle MDK}{\frac{1}{2} \cdot DA \cdot DB \cdot \sin\angle ADB} = \frac{DM \cdot DK}{DA \cdot DB}.$$

Нужное равенство обосновано.

Заметим, что доказанное утверждение верно и тогда, когда пирамиды $DABC$ и $DMKP$ имеют общую вершину D, а остальные их вершины находятся на трех прямых, проходящих через вершину D.

Из условия следует, что $DM : DA = 1 : 2$, $DK : DB = 2 : 3$ и $DP : DC = 3 : 5$.

Поэтому $\frac{V_{DMKP}}{V_{DABC}} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{1}{5}$.

Значит, плоскость MKP делит объем пирамиды в отношении $1 : 4$.

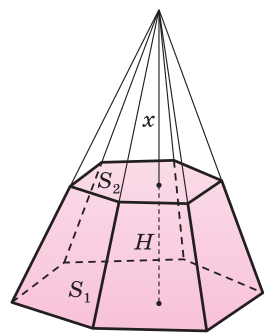

Рис. 87

Г) Теперь установим формулы для вычисления объема усеченной пирамиды. Пусть в усеченной пирамиде нижнее и верхнее основания имеют площади S_1 и S_2, а высота равна H (рис. 87). Для вычисления объема усеченной пирамиды достроим ее до полной пирамиды. Пусть высота дополняющей пирамиды равна x. Искомый объем V можно вычислить как разность объемов полной и дополняющей пирамид:

$$V = \frac{1}{3}S_1(H + x) - \frac{1}{3}S_2 x = \frac{1}{3}\left(S_1 H + S_1 x - S_2 x\right) = \frac{1}{3}\left(S_1 H + \left(S_1 - S_2\right)x\right).$$

Чтобы найти высоту x, используем установленное в теореме **1** утверждение о том, что площади сечений пирамиды относятся как квадраты их расстояний от вершины: $\frac{S_2}{S_1} = \frac{x^2}{(H+x)^2}$. Решим это уравнение, учитывая, что S_1 и S_2 — положительные числа:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{x^2}{(H+x)^2} \equiv \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}} = \frac{x}{H+x} \equiv H\sqrt{S_2} + x\sqrt{S_2} = x\sqrt{S_1} \equiv$$

$$\equiv H\sqrt{S_2} = x\left(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}\right) \equiv x = \frac{H\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}.$$

Значит:

$$V = \frac{1}{3}\left(S_1H + \frac{(S_1 - S_2)H\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}\right) = \frac{1}{3}H\left(S_1 + \frac{\left(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}\right)\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}H\left(S_1 + \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)\sqrt{S_2}\right) = \frac{1}{3}H\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right).$$

Таким образом, **объем V усеченной пирамиды равен третьей доле произведения высоты H пирамиды и суммы площадей S_1 и S_2 оснований пирамиды и их среднего геометрического $\sqrt{S_1S_2}$:**

$$V = \frac{1}{3}H\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right).$$

1. Какой многогранник называется пирамидой?

2. Какую пирамиду называют тетраэдром?

3. Какую грань пирамиды называют ее основанием и какие грани — боковыми гранями?

4. Какие ребра пирамиды называют боковыми ребрами и какую точку — вершиной пирамиды?

5. Какой отрезок называют высотой пирамиды?

6. Какая плоскость называется диагональной плоскостью пирамиды и какой многоугольник — диагональным сечением пирамиды?

7. Какая пирамида называется правильной пирамидой?

8. Какой отрезок называется апофемой пирамиды?

9. Сформулируйте свойства элементов правильной пирамиды: боковых ребер; боковых граней; апофем; двугранных углов при основании; двугранных углов при боковых ребрах; точек высоты.

10. Сформулируйте свойство основания пирамиды, у которой равны все: боковые ребра; двугранные углы при основании.

11. Что понимают под боковой поверхностью пирамиды; полной поверхностью пирамиды?

12. Как связаны между собой боковая поверхность правильной пирамиды, периметр ее основания и апофема?

13. Сформулируйте свойства отрезков боковых ребер и высоты пирамиды, на которые они разделяются плоскостью, параллельной основанию.

14. Сформулируйте свойства сечения пирамиды плоскостью, параллельной основанию.

15. Какой многогранник называется усеченной пирамидой?

16. Какие грани усеченной пирамиды называют ее основаниями и какой отрезок — ее высотой?

17. Какая усеченная пирамида называется правильной и какой отрезок называется апофемой правильной усеченной пирамиды?

18. Как связаны между собой боковая поверхность правильной усеченной пирамиды, периметры ее оснований и апофема?

19. Какие тела называют равновеликими?

20. Какое свойство имеют треугольные пирамиды с равновеликими основаниями и равными высотами?

21. Чему равен объем пирамиды?

22. Чему равен объем усеченной пирамиды?

Задача 1. В правильной треугольной пирамиде высота равна $6\sqrt{3}$, радиус окружности, описанной около основания, — 12. Найдите:

а) апофему пирамиды; б) двугранный угол при основании пирамиды.

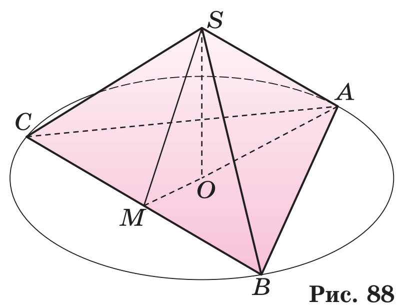

Рис. 88

Р е ш е н и е. а) Пусть SO — высота правильной треугольной пирамиды $SABC$ (рис. 88) и $SO = 6\sqrt{3}$.

OA — радиус описанной окружности, $OA = 12$ (O — основание высоты и центр треугольника ABC), $OM \perp BC$, где M — середина стороны BC, и $OM = \frac{1}{2} \cdot OA = 6$.

SM — апофема пирамиды $SABC$, $SM \perp BC$ по теореме о трех перпендикулярах:

$$SM = \sqrt{OM^2 + OS^2} = \sqrt{6^2 + \left(6\sqrt{3}\right)^2} = 12.$$

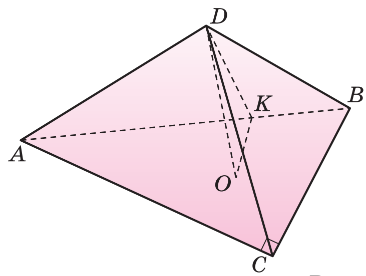

Рис. 89

б) $OM \perp BC$ и $SM \perp BC$, поэтому SMO — линейный угол двугранного угла при основании пирамиды:

$$\sin \angle SMO = \frac{SO}{SM} = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ поэтому } \angle SMO = 60°.$$

О т в е т: а) 12; б) 60°.

Задача 2. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой 17 см и катетом 15 см, а ее высота равна $3\sqrt{3}$ см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, учитывая, что все двугранные углы при ребрах основания равны.

Р е ш е н и е. Пусть у пирамиды $DABC$ $AB = 17$ см, $AC = 15$ см, $\angle ACB = 90°$, $DO \perp (ABC)$ и $OK \perp AB$ (рис. 89).

O — центр вписанной в треугольник ABC окружности, OK — ее радиус (все двугранные углы при ребрах основания равны).

$$\triangle ABC\colon BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8 \text{ (см)},$$

$$OK = \frac{AC + BC - AB}{2} = \frac{15 + 8 - 17}{2} = 3 \text{ (см)},\ S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 8 = 60 \text{ (см)}.$$

$$\triangle DKO\colon \operatorname{tg} \angle DKO = \frac{DO}{OK} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3},\ \angle DKO = 60°,\ \cos \angle DKO = \frac{1}{2}.$$

$$S_{\text{бок}} = \frac{S_{ABC}}{\cos \angle DKO} = \frac{60}{0{,}5} = 120 \text{ (см}^2\text{)},\ S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = 120 + 60 = 180 \text{ (см}^2\text{)}.$$

О т в е т: 180 см^2.

Задача 3. Площадь основания пирамиды равна 243 см^2, а площадь сечения, параллельного основанию, — 48 см^2. Найдите расстояние между плоскостью сечения и плоскостью основания, учитывая, что высота пирамиды равна 18 см.

Р е ш е н и е. Пусть x см — искомое расстояние. Тогда, по теореме **1в**, имеем: $\frac{48}{243} = \left(\frac{18 - x}{18}\right)^2$, или $1 - \frac{x}{18} = \frac{4}{9}$, откуда $x = 10$.

О т в е т: 10 см.

Задача 4. Найдите объем треугольной пирамиды, ребра основания которой равны 13, 14, 15, учитывая, что боковые ребра образуют с плоскостью основания углы, равные α.

Р е ш е н и е. Пусть SO — высота пирамиды $SABC$. Отрезки OA, OB, OC — проекции наклонных SA, SB, SC на плоскость основания, $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \alpha$ (рис. 90). Прямоугольные треугольники SOA, SOB, SOC равны, так как имеют общий катет SO и по равному острому углу. Поэтому катеты OA, OB, OC равны, точка O — центр описанной около треугольника ABC окружности.

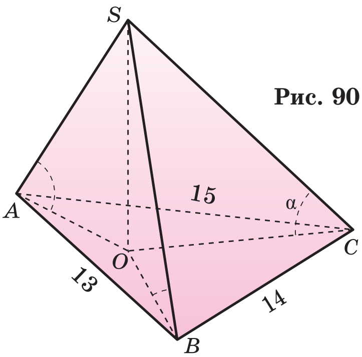

Рис. 90

Для вычисления радиуса описанной окружности используем формулу $R = \frac{abc}{4S_\triangle}$, где $S_\triangle$ — площадь треугольника, а a, b, c — его стороны. Площадь треугольника ABC найдем по формуле Герона:

$$S = \sqrt{\frac{13+14+15}{2} \cdot \frac{14-13+15}{2} \cdot \frac{13-14+15}{2} \cdot \frac{13+14-15}{2}} = 84.$$

Тогда $R = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = \frac{65}{8}$. Найдем из прямоугольного треугольника SOA высоту SO пирамиды, а потом и ее объем.

$$SO = AO \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{65}{8} \cdot \operatorname{tg}\alpha,\ V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 84 \cdot \frac{65}{8} \cdot \operatorname{tg}\alpha = 227{,}5 \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

О т в е т: $227{,}5 \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

Задача 5*. В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция, у которой $AD \parallel BC$ и $AD = 2BC$. На ребрах SA, SB и SC выбраны точки M, K и P соответственно так, что $SM : MA = 1 : 1$, $SK : KB = 1 : 2$ и $SP : PC = 1 : 3$. Найдите отношение, в котором плоскость MKP делит объем пирамиды.

Р е ш е н и е. Пусть объем пирамиды $SABCD$ равен $3V$. Поскольку площадь треугольника ABC составляет третью долю площади $ABCD$, то объем пирамиды $SABC$ равен V, а объем пирамиды $SACD$ равен $2V$.

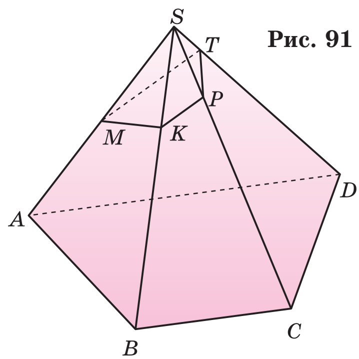

Рис. 91

Найдем объем пирамиды $SMKP$, используя равенство $\dfrac{V_{SMKP}}{V_{SABC}} = \dfrac{SM \cdot SK \cdot SP}{SA \cdot SB \cdot SC}$. Будем иметь:

$$V_{SMKP} = V\frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{24}V.$$

Пусть T — точка пересечения прямой SD с плоскостью MKP (рис. 91). Тогда $\overrightarrow{ST} = x \cdot \overrightarrow{SD}$ и, кроме того, вектор $\overrightarrow{KT}$ компланарен с векторами $\overrightarrow{KM}$ и $\overrightarrow{KP}$, т. е. $\overrightarrow{KT} = m\overrightarrow{KM} + p\overrightarrow{KP}$ при определенных множителях m и p. Выразим векторы $\overrightarrow{SD}$, $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{KS}$, $\overrightarrow{KP}$, $\overrightarrow{ST}$ и $\overrightarrow{KT}$ через векторы $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BS}$. Последовательно получаем:

$$\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BS} - \overrightarrow{BA}\right), \overrightarrow{BP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BS} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC},$$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BS},$$

$$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{6}\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{KS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BS},$$

$$\overrightarrow{KP} = \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{12}\overrightarrow{BS},\ \overrightarrow{ST} = x\overrightarrow{BA} + 2x\overrightarrow{BC} - x\overrightarrow{BS},$$

$$\overrightarrow{KT} = \overrightarrow{KS} + \overrightarrow{ST} = \left(\frac{1}{3} - x\right)\overrightarrow{BS} + x\overrightarrow{BA} + 2x\overrightarrow{BC}.$$

Вместе с тем $\overrightarrow{KT} = m\overrightarrow{KM} + p\overrightarrow{KP} = m\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{6}\overrightarrow{BS}\right) + p\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{12}\overrightarrow{BS}\right) =$

$$= \frac{m}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{p-2m}{12}\overrightarrow{BS} + \frac{p}{4}\overrightarrow{BC}.$$

Поскольку векторы $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BS}$ некомпланарны, то вектор $\overrightarrow{KT}$ через них выражается однозначно. Тогда одновременно выполняются равенства $\frac{m}{2} = x$, $\frac{p-2m}{12} = \frac{1}{3} - x$, $\frac{p}{4} = 2x$. Отсюда $m = 2x$, $p = 8x$ и $x = \frac{1}{4}$. Теперь найдем объем пирамиды $SKPT$, используя равенство:

$$\frac{V_{SKPT}}{V_{SACD}} = \frac{ST \cdot SK \cdot SP}{SA \cdot SD \cdot SC}; \; V_{SKPT} = 2V \cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{1}{16}V.$$

Далее имеем: $V_{SMKTP} = V_{SMKP} + V_{SKPT} = \frac{1}{24}V + \frac{1}{16}V = \frac{5}{48}V = \frac{5}{144} \cdot 3V$. Поэтому плоскость MKP делит объем пирамиды в отношении 5 : 139.

О т в е т: 5 : 139.

128. Установите, сколько вершин, ребер и граней имеет:
а) n-угольная пирамида; б) усеченная n-угольная пирамида.

129. В правильной пирамиде найдите точку, равноудаленную от всех ее:
а) вершин; б) ребер; в) граней.

130. Есть правильная пирамида. Можно ли утверждать, что она имеет плоскость симметрии?

131. Докажите, что в правильной пирамиде:
а) боковые ребра равны;
б) боковые грани равны;
в) апофемы равны;
г) двугранные углы при основании равны;
д) двугранные углы при боковых ребрах равны;
е) каждая точка высоты равноудалена от вершин основания;
ж) каждая точка высоты равноудалена от ребер основания;
з) каждая точка высоты равноудалена от боковых граней.

132. Боковые ребра пирамиды равны друг другу. Определите, может ли основанием пирамиды быть:
а) ромб; в) трапеция;
б) прямоугольник; г) правильный шестиугольник.

133. Докажите, что если у пирамиды равны все:
а) боковые ребра, то около ее основания можно описать окружность и центр этой окружности совпадает с основанием высоты пирамиды;
б) двугранные углы при основании, то в это основание можно вписать окружность и центр этой окружности совпадает с основанием высоты пирамиды.

134. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 12 см, а ее высота — $4\sqrt{3}$. Найдите:
а) боковое ребро пирамиды;
б) угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.

135. Найдите площадь диагонального сечения правильной четырехугольной пирамиды, у которой:
а) боковое ребро равно b и составляет с плоскостью основания угол α;
б) сторона основания равна a, а двугранный угол при основании — α.

136. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна a, а боковое ребро — $2a$. Найдите:
а) угол между боковым ребром и основанием;
б) площадь каждого диагонального сечения.

137. Есть пирамида, у которой двугранные углы при основании равны друг другу. Верно ли, что:
а) высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в основание;
б) высоты всех боковых граней, проведенные из вершины пирамиды, равны;
в) боковая поверхность равна произведению полупериметра основания и высоты боковой грани, проведенной из вершины пирамиды?

138. Основанием пирамиды является ромб, сторона которого равна 13 см, а одна из диагоналей — 10 см. Найдите боковые ребра пирамиды, учитывая, что ее высота проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 35 см.

139. Основанием пирамиды является параллелограмм со сторонами основания 6 см и 14 см и одной из диагоналей 12 см, а ее высота проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 8 см. Найдите боковые ребра пирамиды.

140. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 20 см. Боковые ребра пирамиды равны друг другу, а ее высота равна 24 см. Найдите боковое ребро пирамиды.

141. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с углом в $120°$, а боковые ребра образуют с высотой пирамиды, равной 16 см, углы в $45°$. Найдите площадь основания пирамиды.

142. Трапеция с основаниями 6 см и $4\sqrt{6}$ см и высотой 5 см является основанием пирамиды, каждое боковое ребро которой равно 13 см. Найдите высоту пирамиды.

143. Докажите, что боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению полупериметра ее основания и апофемы.

144. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды имеет длину 12 см и образует угол в $60°$ с плоскостью основания. Найдите поверхность пирамиды.

145. Учитывая, что высота треугольной пирамиды равна 40 см, высота каждой боковой грани, проведенная из вершины пирамиды, — 41 см, а периметр основания — 42 см, докажите, что высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в ее основание, и найдите площадь этого основания.

146. Найдите высоту пирамиды, стороны основания которой равны 13, 14 и 15, учитывая, что:

а) все боковые ребра составляют с основанием углы, равные α;
б) все боковые грани составляют с основанием углы, равные β.

147. Прямоугольный треугольник ABC, гипотенуза AB и катет AC которого соответственно равны 29 см и 21 см, является основанием пирамиды $DABC$. Ее ребро DA перпендикулярно плоскости основания и равно 20 см. Найдите боковую поверхность пирамиды.

148. В основании пирамиды лежит параллелограмм со сторонами 60 см и 108 см и площадью 3240 см^2, точка пересечения диагоналей которого является основанием высоты пирамиды. Найдите боковую поверхность пирамиды, учитывая, что ее высота равна 36 см.

149. Есть пирамида с квадратным основанием. Одно из боковых ребер пирамиды перпендикулярно плоскости основания, а один из двугранных углов при основании равен 45°. Учитывая, что наибольшее боковое ребро равно 12 см, найдите:
а) высоту пирамиды; б) боковую поверхность пирамиды.

150. Прямоугольник с диагональю 24 см является основанием пирамиды, плоскости двух боковых граней которой перпендикулярны плоскости основания, а плоскости двух других боковых граней образуют с основанием углы в 30° и 45°. Найдите поверхность пирамиды.

151. Основанием пирамиды является треугольник со сторонами 24 см, 20 см и 20 см, а каждая боковая грань наклонена к основанию под углом в 45°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

152. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, а ее высота — H. Найдите:
а) боковое ребро пирамиды;
б) плоский угол при вершине пирамиды;
в) угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды;
г) угол между боковой гранью и основанием пирамиды;
д) двугранный угол при боковом ребре пирамиды.

153. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна l, а плоский угол при вершине — α. Найдите:
а) высоту пирамиды;
б) боковое ребро;
в) угол между боковой гранью и плоскостью основания;
г) двугранный угол при боковом ребре пирамиды.

154*. Найдите боковую поверхность правильной шестиугольной пирамиды, учитывая, что сторона ее основания равна a, а площадь боковой грани равна площади сечения, проведенного через вершину пирамиды и бóльшую диагональ основания.

155*. Двугранные углы при основании пирамиды все равны φ. Докажите, что $S_{бок} = \dfrac{Q}{\cos\varphi}$, $S_{полн} = \dfrac{2Q\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}$, где $S_{бок}$ и $S_{полн}$ — боковая и полная поверхности пирамиды, Q — площадь ее основания.

156. Докажите, что если пирамиду пересечь плоскостью, параллельной основанию, то:
а) боковые ребра и высота разделятся на пропорциональные части;
б) в сечении получится многоугольник, подобный основанию;
в) площади сечения и основания относятся как квадраты их расстояний от вершины пирамиды.

157. Докажите, что в правильной усеченной пирамиде:
а) боковые ребра равны;
б) боковые грани равны;
в) апофемы равны;
г) двугранные углы при основании равны;
д) двугранные углы при боковых ребрах равны;
е) сумма двугранных углов при параллельных ребрах одной боковой грани равна 180°.

158. Сечение пирамиды, параллельное ее основанию, делит высоту в отношении 2 : 3, если считать от вершины. Найдите площадь сечения, учитывая, что она на 105 см^2 меньше площади основания.

159. Найдите апофему и высоту правильной усеченной треугольной пирамиды, у которой стороны оснований равны 15 см и 5 см, а боковое ребро — 13 см.

160. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 63 см, апофема — 65 см, а стороны оснований относятся как 7 : 3. Найдите эти стороны.

161. Плоскость, параллельная основанию правильной четырехугольной пирамиды, делит высоту пирамиды в отношении 1 : 2, если считать от вершины. Апофема полученной усеченной пирамиды равна 4 дм, а площадь ее полной поверхности — 186 дм^2. Найдите высоту усеченной пирамиды.

162. Основаниями усеченной пирамиды являются правильные треугольники со сторонами 5 см и 3 см, а одно из ее боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно 1 см. Найдите боковую поверхность пирамиды.

163. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 5 м и 8 м, а высота — 3 м. Плоскость проходит через сторону нижнего основания и противолежащую вершину верхнего основания. Найдите площадь сечения и двугранный угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.

164. Найдите площадь диагонального сечения правильной усеченной четырехугольной пирамиды, у которой стороны оснований равны a и b, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α.

165. Найдите объем пирамиды с высотой h, учитывая, что:
а) $h = 20$ см, а основанием является квадрат со стороной 30 см;
б) $h = 22$ м, а основанием является треугольник ABC, в котором $AB = 2$ м, $BC = 1{,}35$ м, $\angle ABC = 30°$.

166. Найдите поверхность и объем правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 8 см, а высота — 20 см.

167. Найдите боковую поверхность и объем правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6 см, а высота — 12 см.

168. Все боковые грани пирамиды $SABC$ наклонены к основанию под углом в 45°. Найдите объем пирамиды, учитывая, что $AC = 15$ см, $BC = 8$ см, $\angle ACB = 60°$.

169*. Квадрат является основанием пирамиды, две ее грани перпендикулярны основанию, двугранный угол между противолежащими боковыми гранями равен α, а высота пирамиды — h. Найдите объем, боковую и полную поверхность пирамиды.

170. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, у которой:
а) высота равна 15 см, а сторона основания — 12 см;
б) боковое ребро равно b и составляет с плоскостью основания угол α;
в) боковое ребро b и составляет с прилежащей стороной основания угол α;
г) боковое ребро равно l и составляет с плоскостью основания угол φ;
д) радиус окружности, описанной около боковой грани, равен R, а плоский угол при вершине основания — α;
е) боковое ребро равно l, а плоский угол при вершине — β;
ж) плоский угол при вершине равен φ, а сторона основания — a.

171. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны равны 25 см, а третья сторона — 48 см. Найдите объем пирамиды, учитывая, что каждое ее боковое ребро равно 105 см.

172. Найдите объем и боковую поверхность правильной шестиугольной пирамиды, учитывая, что ее боковое ребро равно 37 см, а диаметр круга, вписанного в основание, — $12\sqrt{3}$ см.

173. Найдите объем пирамиды, основанием которой является:
а) равнобедренный треугольник ABC с боковыми сторонами AB и BC, равными 26 см, и основанием AC, равным 20 см, а каждое боковое ребро пирамиды образует с ее высотой угол в 30°;

б) прямоугольный треугольник с катетами a и b, а каждое боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом φ;
в) ромб со стороной 15 см, каждый из двугранных углов при основании равен 45°, а высота пирамиды равна 6 см.

174. Найдите объем треугольной пирамиды $QABC$, учитывая, что:
а) $AB = 12$, $BC = CA = 10$ см и двугранные углы при основании равны 45°;
б) $\angle CAB = 90°$, $BC = c$, $\angle ABC = \varphi$ и каждое боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α;
в) боковые ребра попарно перпендикулярны и имеют длины a, b и c.

175. Основанием пирамиды $IJKL$ является треугольник, в котором $JK = 20$ см, $JL = 29$ см, $KL = 21$ см. Грани IJK и IJL перпендикулярны плоскости основания, а грань IKL составляет с ней угол в 60°. Найдите объем пирамиды.

176. Одно ребро тетраэдра равно 12 см, а остальные ребра — 9 см каждое. Найдите объем тетраэдра.

177. Одна из сторон основания треугольной пирамиды равна 16 см, противолежащее ей боковое ребро — 18 см, каждое из остальных четырех ребер — 17 см. Найдите объем пирамиды.

178. Определите, как изменится площадь боковой, полной поверхности и объем пирамиды, если, оставив углы прежними, все ее ребра:
а) увеличить в 2 раза; б) уменьшить в 5 раз.

179. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетами 24 дм и 10 дм, а каждое боковое ребро равно 85 дм. Пирамида пересечена плоскостью, которая параллельна плоскости основания и делит боковое ребро пополам. Найдите объем полученной усеченной пирамиды.

180. Кристалл кварца состоит из правильной шестиугольной призмы с боковым ребром 6,2 см и стороной основания 1,7 см и двух правильных шестиугольных пирамид с боковым ребром 2,5 см. Найдите массу кристалла, учитывая, что плотность кварца равна 2,7 г/см^3.

181. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, у которой:
а) высота равна h, а двугранный угол при основании — α;
б) сторона основания равна a, а плоский угол при вершине — α;
в)* сторона основания равна a, а двугранный угол при боковом ребре — α;
г)* радиус окружности, вписанной в боковую грань, равен r, а острый плоский угол при одной из вершин основания — α;
д)* высота равна H, а двугранный угол при основании — β;
е)* сторона основания равна m, а плоский угол при вершине — α;
ж)* боковое ребро равно l и составляет с плоскостью основания угол φ.

182. Основание четырехугольной пирамиды — прямоугольник с диагональю b и углом α между диагоналями. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом. Найдите этот угол, учитывая, что объем пирамиды равен V.

183. Основанием пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$. На ребрах SA, SB и SC точки M, K и P выбраны так, что $SM : MA = 2 : 3$, $SK : KB = 1 : 2$ и $SP : PC = 3 : 4$. Найдите отношение, в котором плоскость MKP делит объем пирамиды.

184. Пирамида $PEFGH$ имеет своим основанием ромб $EFGH$. На ее ребрах PE, PF и PG точки X, Y и Z выбраны так, что $PX : XE = 3 : 2$, $PY : YF = 1 : 1$ и $PZ : ZG = 4 : 3$. Найдите отношение, в котором плоскость XYZ делит объем пирамиды.

185. В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция, в которой $AD \parallel BC$ и $AD = 3BC$. На ребрах SA, SB и SC точки E, F и G выбраны так, что $SE : EA = 1 : 2$, $SF : FB = 1 : 1$ и $SG : GC = 3 : 2$. Найдите отношение, в котором плоскость EFG делит объем пирамиды.

186. Четырехугольник $ABCD$ является основанием пирамиды $SABCD$. Его диагонали пересекаются в такой точке O, что $AO : OC = 1 : 2$, $BO : OD = 1 : 5$. Точки M, K и P на ребрах SA, SB и SC выбраны так, что $SM : MA = 1 : 2$, $SK : KB = 1 : 1$ и $SP : PC = 2 : 3$. Найдите отношение, в котором плоскость MKP делит объем пирамиды.

187. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 7 см, а стороны оснований — 10 см и 2 см. Найдите боковое ребро пирамиды, ее диагональ и объем.

188. Стороны оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны 4 см и 10 см, а площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани, равна 42 см^2. Найдите объем пирамиды.

189*. Найдите объем частей пирамиды, на которые она рассечена плоскостью, параллельной основанию, учитывая, что:

а) это основание и полученное сечение являются равнобедренными прямоугольными треугольниками с гипотенузами m и n, две боковые грани, содержащие катеты, перпендикулярны основанию, а третья составляет с ней угол φ;

б) пирамида правильная четырехугольная, стороны основания и полученного сечения равны a и $\frac{a}{2}$, а апофема — a.