§ 4. Конус

А) Конусом называется тело, полученное вращением прямоугольного треугольника вокруг оси, проходящей через один из его катетов (рис. 92). На рис. 93 показано образование конуса при вращении прямоугольного треугольника ABC вокруг прямой l, которой принадлежит катет BC. При этом ломаная BAC описывает поверхность конуса, гипотенуза AB — боковую поверхность, а катет AC — основание конуса (рис. 94). Саму гипотенузу AB называют образующей конуса, неподвижную точку B — вершиной конуса, прямую, проходящую через неподвижный катет BC, — осью конуса, а перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на основание, — высотой конуса (рис. 95). Основание высоты конуса совпадает с центром основания конуса.

Поверхность конуса можно развернуть на плоскость, в результате получится сектор, представляющий боковую поверхность конуса, и круг, представляющий основание конуса. На рис. 96 представлены конус и его развертка.

Развертка боковой поверхности конуса определяется радиусом сектора и центральным углом φ. Радиусом сектора является образующая l конуса. Найдем угол φ. С одной стороны, длина дуги сектора равна длине окружности основания конуса, т. е. $2\pi r$, где r — радиус основания, с другой — $\frac{2\pi l}{360}\cdot\varphi$, поэтому $2\pi r = \frac{2\pi l}{360}\cdot\varphi$, откуда $\varphi = \frac{360r}{l}$.

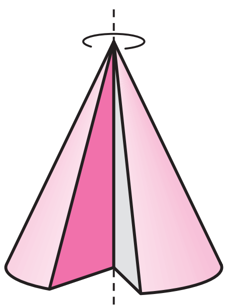


Рис. 92

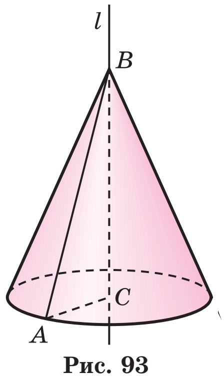


Рис. 93

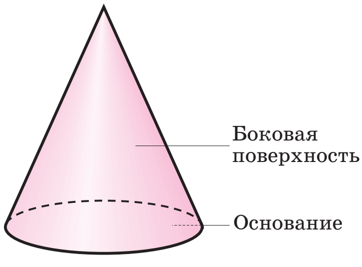


Рис. 94

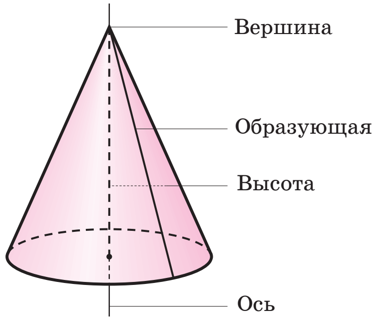


Рис. 95

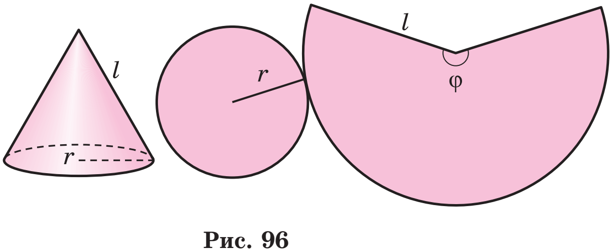


Рис. 96

Теорема 5. Боковая поверхность конуса равна произведению полуокружности его основания и образующей:

$$S_{бок} = \pi r l.$$

Доказательство. Используем формулу для вычисления площади $S_{сект}$ сектора с центральным углом градусной меры φ и радиусом l:

$$S_{сект} = \frac{\pi l^2}{360} \cdot \varphi.$$

Учитывая, что $\varphi = \dfrac{360r}{l}$, получим: $S_{сект} = \pi r l$.

Следствие. Площадь полной поверхности конуса равна произведению полуокружности его основания и суммы радиуса основания и образующей:

$$S_{полн} = \pi r \cdot (r + l).$$

Пример 1. Конус получен вращением прямоугольного треугольника вокруг большего катета. Найдем боковую и полную поверхности конуса, учитывая, что катеты имеют длины 8 см и 15 см.

Р е ш е н и е. Найдем вначале по теореме Пифагора длину гипотенузы:

$$l = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17 \text{ (см)}.$$

Теперь, учитывая, что образующая конуса l равна 17 см и радиус его основания r — 8 см, найдем боковую и полную поверхности конуса:

$$S_{бок} = \pi r l = 136\pi \text{ см}^2; \; S_{осн} = \pi r^2 = 64\pi \text{ см}^2;$$

$$S_{полн} = S_{осн} + S_{бок} = 200\pi \text{ см}^2.$$

О т в е т: 200π см^2.

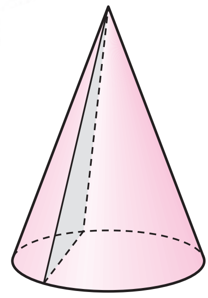


Рис. 97

Б) Важной пространственной конфигурацией, часто встречающейся в задачах, является комбинация конуса и плоскости.

Если конус пересекается плоскостью, проходящей через вершину, то получается равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны являются образующими конуса (рис. 97). Осевое сечение конуса, т. е. сечение плоскостью, проходящей через ось конуса, является равнобедренным треугольником, у которого основание равно диаметру основания конуса (рис. 98).

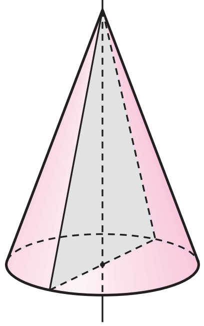


Рис. 98

Пример 2. Периметр осевого сечения конуса равен 16. Найдем полную поверхность конуса, учитывая, что развертка боковой поверхности конуса — сектор с углом в 120°.

Р е ш е н и е. Пусть r — радиус основания конуса, l — его образующая. Длина окружности основания $C = 2\pi r$ совпадает с длиной дуги развертки $\frac{2\pi l \cdot 120^\circ}{360^\circ}$, поэтому $2\pi r = \frac{2\pi l \cdot 120^\circ}{360^\circ}$, или $l = 3r$.

Поскольку периметр осевого сечения равен 16, то $2l + 2r = 16$, или $l + r = 8$, или $4r = 8$, и тогда $r = 2$, а $l = 6$.

Теперь находим: $S_{осн} = \pi r^2 = 4\pi$, $S_{бок} = \pi r l = 12\pi$, $S_{полн} = S_{осн} + S_{бок} = 16\pi$.

О т в е т: 16π.

Пересечение конуса плоскостью, параллельной основанию, есть круг (рис. 99).

Теорема 6. Если конус пересечь плоскостью, параллельной его основанию, то:

а) образующая и высота разделяются на пропорциональные части;

б) площади сечения и основания относятся как квадраты их расстояний от вершины.

Используя рис. 100, докажите эту теорему самостоятельно.

Пример 3. Радиус основания конуса равен 8 см. Плоскость, параллельная его основанию, разделяет высоту в отношении 3 : 5, если считать от вершины. Найдем площадь сечения.

Р е ш е н и е. По теореме **6б**, имеем:

$$\frac{S_{сеч}}{S_{осн}} = \left(\frac{3}{3+5}\right)^2 = \frac{9}{64}.$$

Поэтому $S_{сеч} = \pi r^2 \cdot \frac{9}{64} = \pi \cdot 8^2 \cdot \frac{9}{64} = 9\pi$ (см^2).

О т в е т: 9π см^2.

Секущая плоскость, параллельная основанию конуса, разделяет его на две части (рис. 101). Одна из этих частей также является конусом, а другая — телом, которое называется **усеченным конусом**.

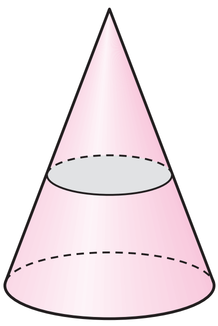


Рис. 99

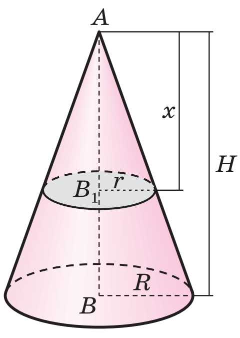


Рис. 100

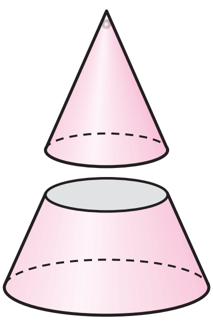


Рис. 101

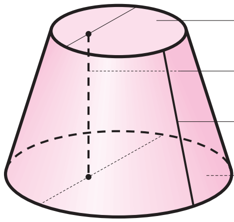


Рис. 102

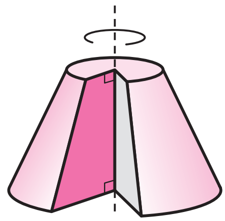


Рис. 103

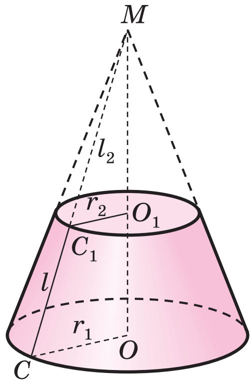


Рис. 104

Основание данного конуса и круг, полученный в сечении, называют **основаниями** усеченного конуса, а отрезок образующей данного конуса, заключенный между его основанием и секущей плоскостью, — **образующей** усеченного конуса (рис. 102). **Высотой** усеченного конуса называется перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки одного его основания к плоскости другого основания.

Усеченный конус можно получить вращением прямоугольной трапеции вокруг боковой стороны, к которой прилежат прямые углы (рис. 103).

Найдем боковую поверхность усеченного конуса. Пусть есть усеченный конус, у которого радиусы оснований CO и C_1O_1 равны r_1 и r_2 соответственно, а образующая CC_1 равна l (рис. 104).

Достроим его до полного конуса. Достроенная часть представляет собой конус, у которого радиус основания равен r_2. Пусть образующая C_1M достроенного конуса равна l_2.

Боковую поверхность $S_{бок}$ усеченного конуса можно получить как разность боковых поверхностей S_1 и S_2 полного и достроенного конусов. Пусть C_1 и C_2 — длины окружностей нижнего и верхнего оснований усеченного конуса. Тогда:

$$S_{бок} = S_1 - S_2 = \frac{1}{2}C_1(l + l_2) - \frac{1}{2}C_2 l_2 = \frac{1}{2}(2\pi r_1 l + 2\pi r_1 l_2 - 2\pi r_2 l_2) = \pi(r_1 l + (r_1 - r_2)l_2).$$

Найдем l_2, учитывая подобие треугольников MCO и MC_1O_1:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{l + l_2}{l_2} \equiv r_1 l_2 = r_2 l + r_2 l_2 \equiv l_2 = \frac{r_2 l}{r_1 - r_2}.$$

Значит,

$$S_{бок} = \pi(r_1 l + (r_1 - r_2)l_2) = \pi\left(r_1 l + (r_1 - r_2)\frac{r_2 l}{r_1 - r_2}\right) = \pi r_1 l + \pi r_2 l = \frac{C_1 + C_2}{2} l.$$

Таким образом, **боковая поверхность усеченного конуса равна произведению полусуммы длин окружностей его оснований и образующей:**

$$S_{бок} = \pi(r_1 + r_2)l.$$

Пример 4. Радиусы оснований усеченного конуса равны 9 и 18, а его высота — 12 (рис. 105). Найдем площадь боковой поверхности этого конуса.

Р е ш е н и е. Пусть h, r_1 и r_2 — высота усеченного конуса и радиусы его оснований. Осевым сечением конуса является равнобедренная трапеция с высотой h и основаниями $2r_1$ и $2r_2$. Боковой стороной трапеции является образующая l конуса. Используя теорему Пифагора, находим:

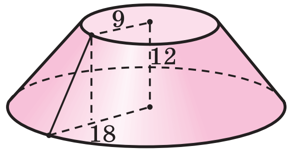


Рис. 105

$$l = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + h^2} = \sqrt{(18-9)^2 + 12^2} = 15.$$

Теперь:

$$S_{\text{бок}} = \pi(r_1 + r_2)l = \pi \cdot (9+18) \cdot 15 = 405\pi.$$

О т в е т: 405π.

Проведем через вершину конуса секущую плоскость и будем ее поворачивать вокруг прямой, перпендикулярной оси конуса (рис. 106). При этом основание треугольника-сечения будет укорачиваться, а его боковые стороны сближаться, пока не совпадут. Получим плоскость, целиком содержащую образующую и не имеющую с конусом других общих точек. Такая плоскость называется **касательной плоскостью конуса**.

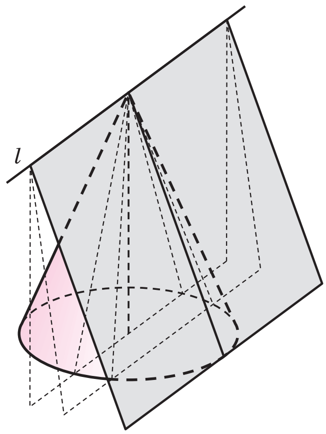


Рис. 106

> **Теорема 7. Если плоскость касается конуса по некоторой образующей, то ей перпендикулярна плоскость, проходящая через эту образующую и ось конуса.**

Доказательство*. Пусть плоскость α касается конуса с осью AB по образующей AC (рис. 107). Докажем, что плоскость, содержащая образующую и ось AB, перпендикулярна плоскости α.

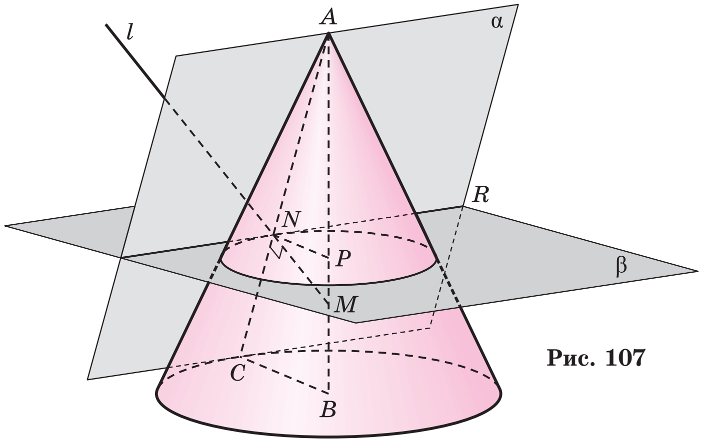


Рис. 107

Проведем прямую l, которая перпендикулярна образующей AC, пересекает ее в точке N и ось конуса в точке M, отличной от вершины A. Через точку N проведем плоскость β, перпендикулярную оси AB, она пересечет конус по кругу с центром P и плоскость α — по прямой NR, касающейся окружности с центром P. Эта касательная, по свойству касательной к окружности, перпендикулярна радиусу PN соответствующей окружности. Но этот радиус есть проекция наклонной MN на плоскость β, поэтому, по теореме о трех перпендикулярах, прямая NR перпендикулярна наклонной MN, т. е. прямой l.

Таким образом, прямая l перпендикулярна прямым AC и NR, которые пересекаются и лежат в плоскости α, поэтому, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая l перпендикулярна плоскости α. Следовательно, плоскость ABC, содержащая прямую l, перпендикулярна плоскости α.

Теорема **7** выражает *свойство касательной плоскости конуса*.

Теорема 8. Плоскость касается конуса, если она проходит через его образующую и перпендикулярна плоскости, проходящей через эту образующую и ось конуса.

Доказательство*. Пусть плоскость α проходит через образующую AC конуса с осью AB и перпендикулярна плоскости ABC (рис. 108). Докажем, что плоскость α касается конуса, т. е. что точки образующей AC и только они являются общими точками конуса и плоскости α.

Точки образующей AC принадлежат и конусу, и плоскости α. Пусть E — какая-либо точка плоскости α вне образующей AC. Через эту точку проведем плоскость β, перпендикулярную оси AB, она пересекает поверхность конуса по окружности ω с центром F, образующую AC — в некоторой

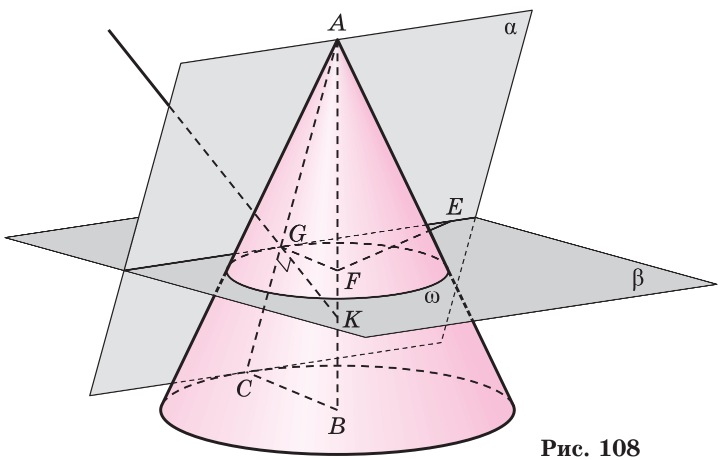


Рис. 108

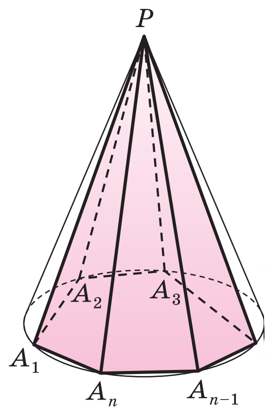


Рис. 109

точке G и плоскость α — по прямой GE. Пусть GK — прямая, которая перпендикулярна плоскости α и пересекает ось AB в точке K. Тогда, по теореме о трех перпендикулярах, прямая GE, проведенная в плоскости β через основание наклонной GK перпендикулярно ей, перпендикулярна ее проекции FG. Следовательно, GE — касательная к окружности ω, и поэтому точка E находится вне окружности ω, а значит, и вне конуса.

Теорема **8** выражает *признак касательной плоскости конуса*.

В) Пусть есть конус с вершиной P (рис. 109). Впишем в основание конуса многоугольник $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ и через его вершины A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n проведем образующие A_1P, A_2P, ..., $A_{n-1}P$, A_nP. В результате получим тело $PA_1A_2...A_{n-1}A_n$, являющееся пирамидой. Ее называют *пирамидой, вписанной в конус*, а сам конус — *конусом, описанным около пирамиды*.

Пример 5. Усеченный конус описан около правильной шестиугольной пирамиды с ребрами оснований 5 и 2 и высотой 4 (рис. 110). Найдем площадь полной поверхности конуса.

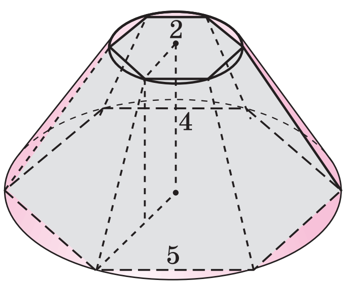


Рис. 110

Р е ш е н и е. Усеченные конус и пирамида имеют общую высоту: $h = 4$. Основания пирамиды являются правильными шестиугольниками, вписанными в основания усеченного конуса. Поэтому радиусы этих кругов равны ребрам оснований: $r_1 = 5$, $r_2 = 2$. Образующей l усеченного конуса является боковое ребро пирамиды. Если из вершины одного основания пирамиды опустить высоту на другое основание, то получится прямоугольний треугольник, в котором боковое ребро будет гипотенузой, а проведенная высота и отрезок, равный разности радиусов оснований, — катетами. Поэтому:

$$l^2 = h^2 + (r_1 - r_2)^2, \quad l = \sqrt{4^2 + (5-2)^2} = 5.$$

Теперь находим:

$$S_{1\,осн} = \pi r_1^2 = 25\pi, \quad S_{2\,осн} = \pi r_2^2 = 4\pi,$$
$$S_{бок} = \pi \cdot (r_1 + r_2) \cdot l = 35\pi,$$
$$S_{полн} = S_{1\,осн} + S_{2\,осн} + S_{бок} = 64\pi.$$

О т в е т: 64π.

Если основание конуса вписано в основание пирамиды, а боковая поверхность конуса касается боковых граней пирамиды, то говорят, что *пирамида описана около конуса* или *конус вписан в пирамиду* (рис. 111).

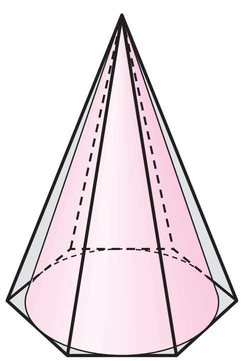


Рис. 111

Теорема 9. Объем конуса равен третьей доле произведения площади его основания и высоты:

$$V = \frac{1}{3} S \cdot H.$$

Доказательство. Пусть есть конус с осью MN (рис. 112). В него впишем правильную пирамиду $MA_1A_2...A_{n-1}A_n$, а около него опишем правильную пирамиду $MB_1B_2...B_{n-1}B_n$. В соответствии с теоремой **4** объем первой пирамиды равен третьей доли произведения площади многоугольника $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ и высоты H пирамиды, т. е. высоты конуса, а объем второй — произведению площади многоугольника $B_1B_2...B_{n-1}B_n$ и той же высоты. Объем самого конуса заключен между этими числами.

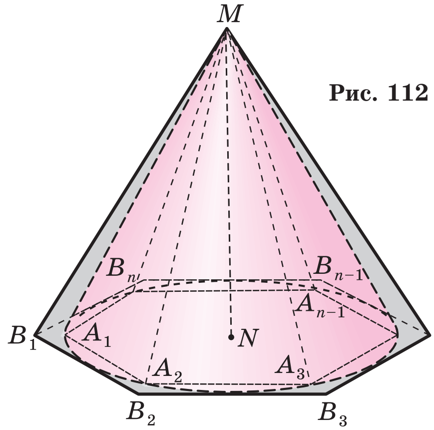


Рис. 112

Будем увеличивать количество n сторон оснований пирамид. Тогда объем первой пирамиды будет увеличиваться, объем второй — уменьшаться, причем их разность стремится к нулю, если значение переменной n неограниченно увеличивается. То число, к которому приближаются объемы обеих пирамид, принимается за объем конуса.

В описанном процессе высота H пирамиды не изменяется, а площади многоугольников $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ и $B_1B_2...B_{n-1}B_n$ стремятся к площади S круга, являющегося основанием конуса. Значит, объем V конуса равен третьей доле произведения площади S основания конуса и его высоты H:

$$V = \frac{1}{3} S \cdot H.$$

Используя рис. 113, можем, как и для усеченной пирамиды (см. § 3), доказать, что **объем V усеченного конуса равен третьей доле произведения высоты H конуса и суммы площадей S_1 и S_2 оснований конуса и их среднего геометрического $\sqrt{S_1S_2}$:**

$$V = \frac{1}{3} H\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right).$$

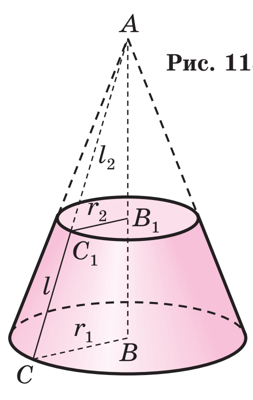


Рис. 113

Пример 6. Объем конуса равен 54π. Сечение, параллельное основанию, по площади в 9 раз меньше него. Найдем объем усеченного конуса.

Р е ш е н и е. Пусть r — радиус основания конуса, h — его высота, r_1 — радиус сечения, h_1 — высота отсеченного конуса (рис. 114).

По теореме **6а**, $r_1 = kr$, $h_1 = kh$ при определенном k. Поскольку по условию $\frac{\pi r_1^2}{\pi r^2} = \frac{1}{9}$, то $k = \frac{1}{3}$.

Найдем объем V_1 отсеченного конуса:

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 = \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{27} \cdot 54\pi = 2\pi.$$

Значит, объем усеченного конуса равен $54\pi - 2\pi$, т. е. 52π.

О т в е т: 52π.

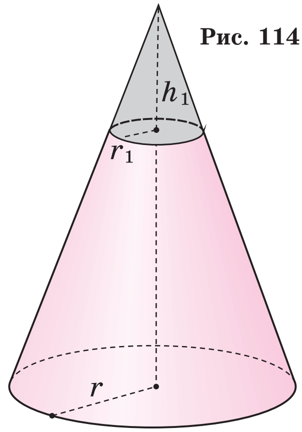


Рис. 114

1. Какое тело называется конусом?

2. Что называют поверхностью конуса; боковой поверхностью конуса; основанием конуса?

3. Какую прямую называют осью конуса?

4. Какой отрезок называют образующей конуса; высотой конуса?

5. Чему равна боковая поверхность конуса?

6. Какая фигура получается при пересечении конуса плоскостью, параллельной его основанию; плоскостью, проходящей через вершину?

7. Какое сечение конуса называют осевым сечением?

8. Сформулируйте свойства отрезков образующей и высоты конуса, на которые они разделяются плоскостью, параллельной основанию.

9. Сформулируйте свойства сечения конуса плоскостью, параллельной основанию.

10. Какое тело называется усеченным конусом?

11. Что называют основаниями усеченного конуса, его образующей и высотой?

12. Какую плоскость называют касательной плоскостью конуса?

13. Сформулируйте свойство касательной плоскости конуса.

14. Сформулируйте признак касательной плоскости конуса.

15. Когда говорят, что пирамида вписана в конус; конус описан около пирамиды?

16. Когда говорят, что конус вписан в пирамиду; пирамида описана около конуса?

17. Чему равен объем конуса; объем усеченного конуса?

Задача 1. Высота конуса равна $6\sqrt{3}$. Найдите площадь полной поверхности конуса, учитывая, что его диагональным сечением является правильный треугольник.

Р е ш е н и е. Пусть ABC — осевое сечение конуса с осью CQ (рис. 115). Тогда $CQ = 6\sqrt{3}$, а треугольник ABC — равносторонний. Значит, для образующей l получаем:

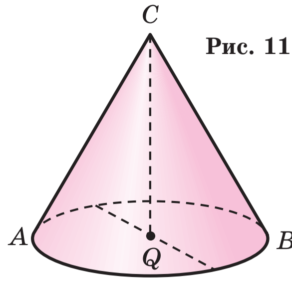


Рис. 115

$$l = AC = \frac{CQ}{\cos\angle ACQ} = \frac{6\sqrt{3}}{\cos 30^\circ} = 12, \text{ так как } \angle AQC = 90^\circ,\ \angle ACQ = 30^\circ.$$

Тогда для радиуса r основания конуса верно: $r = AQ = \frac{1}{2}AC = 6$.

Поэтому $S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = \pi r(r + l) = \pi \cdot 6 \cdot (6 + 12) = 108\pi$.

Ответ: 108π.

Задача 2. Центральный угол развертки боковой поверхности конуса равен 240°. Найдите площадь боковой поверхности конуса, учитывая, что его высота равна $4\sqrt{5}$.

Решение. Образующая l конуса, его высота h, радиус r основания и центральный угол φ развертки боковой поверхности связаны равенствами $l^2 = r^2 + h^2$ и $\varphi l = 360r$. Поэтому $l = 1{,}5r$ и $2{,}25r^2 = r^2 + 80$, откуда $r = 8$ и $l = 12$.

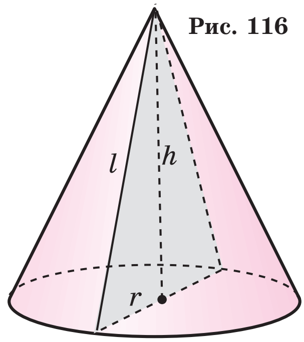


Рис. 116

Значит, $S_{\text{бок}} = \pi rl = \pi \cdot 8 \cdot 12 = 96\pi$.

Ответ: 96π.

Задача 3. Объем конуса равен 36π, а площадь осевого сечения — 18. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

Решение. Пусть r — радиус основания конуса, h — его высота (рис. 116). Тогда: $V_{\text{к}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, или $36\pi = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, или $r^2 h = 108$. Но rh есть площадь осевого сечения, и по условию $rh = 18$. Поэтому $r^2 h = rh \cdot r = 18r$, значит, $18r = 108$. Далее находим: $r = 108 : 18 = 6$, $h = 18 : 6 = 3$.

По теореме Пифагора, радиус основания конуса, его высота и образующая l связаны равенством $r^2 + h^2 = l^2$, тогда:

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{36 + 9} = 3\sqrt{5} \text{ и } S_{\text{бок}} = \pi rl = 18\pi\sqrt{5}.$$

Ответ: $18\pi\sqrt{5}$.

Задача 4. В правильную треугольную пирамиду с боковым ребром 6 вписан конус (рис. 117). Найдите площадь боковой поверхности конуса, учитывая, что плоские углы при вершине пирамиды прямые.

Решение. Боковые грани пирамиды — прямоугольные равнобедренные треугольники с катетами 6. Поэтому ребро a основания пирамиды равно $6\sqrt{2}$, а высота h, проведенная в боковой грани к ребру основания (гипотенузы), — $3\sqrt{2}$.

Конус, вписанный в пирамиду, имеет с ней общую высоту. Поскольку пирамида правильная, то основание O высоты является центром правильного треугольника основания и центром круга, который касается сторон треугольника основания и является основанием конуса.

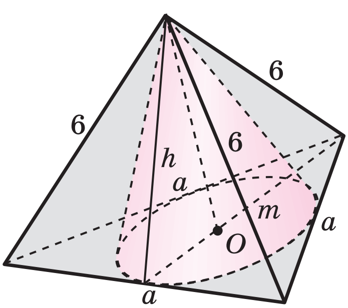


Рис. 117

Находим медиану m основания пирамиды $m = a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{6}$ и радиус r основания конуса $r = \dfrac{1}{3}m = \sqrt{6}$. Поскольку основание конуса касается ребер основания пирамиды в их серединах, то, по теореме о трех перпендикулярах, образующей конуса является высота h боковой грани пирамиды. Поэтому $S_{\text{бок}} = \pi r h = 6\sqrt{3}\pi$.

Ответ: $6\sqrt{3}\pi$.

Задача 5. Есть конус с высотой h и радиусом основания r. Найдите, на каком расстоянии от плоскости основания необходимо провести параллельную плоскость, чтобы она разделяла конус на части, объемы которых относились бы как 7 : 1.

Решение. Пусть плоскость, параллельная основанию конуса, проходит на расстоянии x от основания и пересекает конус по окружности радиуса r_1. Тогда, по теореме **6а**, $r_1 = kr$, $h - x = kh$ при определенном k. Поскольку по условию $\dfrac{1}{3}\pi r_1^2(h-x) : \left(\dfrac{1}{3}\pi r^2 h\right) = 1 : (1+7)$, $k^3 = \dfrac{1}{8}$, поэтому $k = \dfrac{1}{2}$. Значит, $\dfrac{h-x}{h} = \dfrac{1}{2}$, и поэтому $x = \dfrac{h}{2}$.

Ответ: $\dfrac{h}{2}$.

190. Найдите:

а) образующую конуса, учитывая данные, приведенные на рис. 118;

б) высоту конуса, учитывая данные, приведенные на рис. 119;

в) боковую поверхность конуса, учитывая данные, приведенные на рис. 120;

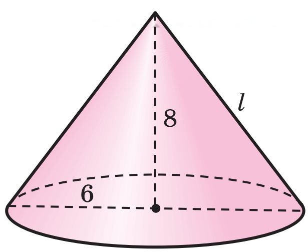


Рис. 118

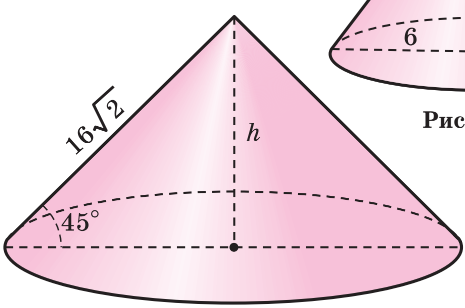


Рис. 119

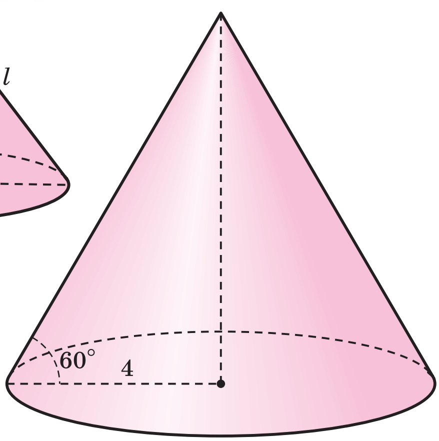


Рис. 120

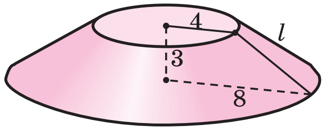


Рис. 121

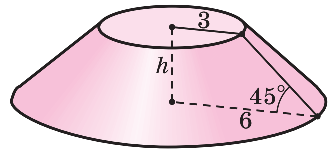


Рис. 122

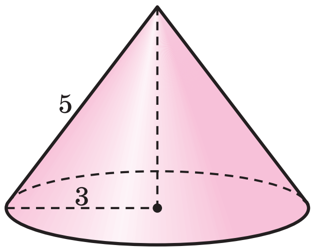
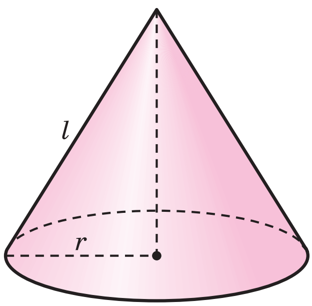


Рис. 123



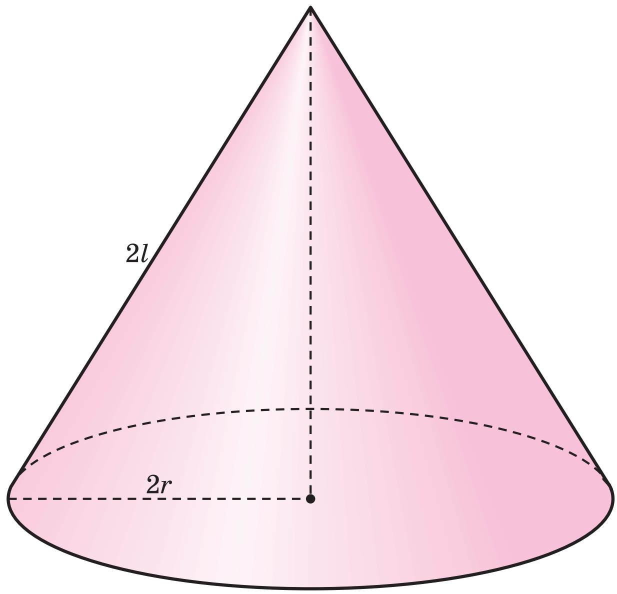


Рис. 124

г) образующую усеченного конуса, учитывая данные, приведенные на рис. 121;

д) высоту усеченного конуса, учитывая данные, приведенные на рис. 122;

е) полную поверхность конуса, учитывая данные, приведенные на рис. 123;

ж) отношение полных поверхностей конусов, учитывая данные, приведенные на рис. 124.

191. Найдите образующую конуса, высота которого равна 45 см, а радиус основания — 24 см.

192. Образующая конуса, равная 12 см, наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите площадь основания конуса, учитывая, что:
а) $\alpha = 30°$; б) $\alpha = 45°$; в) $\alpha = 60°$.

193. Найдите боковую поверхность и площадь основания конуса, учитывая, что его осевое сечение — равносторонний треугольник с высотой $2\sqrt{3}$ см.

194. Найдите поверхность тела, образованного вращением:
а) прямоугольного треугольника с катетами 6 см и 8 см вокруг меньшего катета;
б) равнобедренного треугольника с боковой стороной m и углом при основании φ вокруг основания;
в) прямоугольного треугольника с катетом a и прилежащим к нему углом в 60° вокруг оси, проходящей через вершину данного острого угла перпендикулярно катету.

195. Найдите полную поверхность конуса, у которого:
а) площадь осевого сечения равна 0,6 м^2, а высота конуса — 1,2 м;
б) площадь осевого сечения равна 25 см^2, а угол между высотой и образующей — 45°;
в) образующая наклонена под углом φ к основанию, а вписанный в него треугольник имеет одной стороной отрезок длиной a и противолежащий угол величиной α.

196. Найдите боковую поверхность конуса, высота которого равна 4 см, а угол при вершине осевого сечения равен 90°.

197. Определите угол развертки боковой поверхности конуса, у которого:
а) наибольший угол между образующими является прямым;
б) образующая составляет с плоскостью основания угол в 30°;
в) радиус основания которого равен r, а образующая — l.

198. Сектор с радиусом 6 м и углом в 120° свернут в коническую поверхность. Найдите площадь основания и высоту соответствующего конуса.

199. Полукруг свернут в коническую поверхность. Найдите угол между образующей соответствующего конуса и его высотой.

200. Отношение боковой и полной поверхностей конуса равно $\frac{1}{8}$. Найдите угол между образующей и плоскостью основания конуса.

201. Площадь основания конуса равна S_1, а его боковая поверхность — S_0. Найдите площадь осевого сечения конуса.

202. Через вершину конуса и хорду основания, стягивающую дугу в 120°, проведено сечение, составляющее с плоскостью основания угол в 45°. Найдите площадь сечения, учитывая, что радиус основания равен 20 см.

203. Найдите площадь сечения конуса плоскостью, учитывая, что:
а) она проведена через вершину конуса и отсекает от окружности основания дугу в 90°, а высота конуса равна радиусу основания r;
б) она проведена через две взаимно перпендикулярные образующие, высота конуса равна h и наклонена к образующей под углом в 60°;
в) она проведена через вершину конуса, составляет с плоскостью основания угол в 60° и отсекает от окружности основания с радиусом r дугу в 120°;

г) она проведена через вершину конуса и отстоит от центра основания на 24 см, высота конуса равна 40 см, а радиус основания — 50 см;
д) она параллельна основанию конуса с радиусом R и отстоит на d от вершины, а высота конуса равна H.

204. Осевое сечение конуса — правильный треугольник со стороной $2m$. Найдите площадь сечения, проведенного через две образующие конуса, угол между которыми равен:
а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°.

205*. Найдите косинус угла при вершине осевого сечения конуса, который имеет три попарно перпендикулярные образующие.

206*. Определите, на каком расстоянии от основания проходят две плоскости, параллельные плоскости основания и делящие боковую поверхность конуса на три равные части, учитывая, что высота конуса равна H.

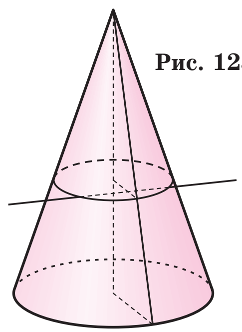


Рис. 125

207. Через середину высоты конуса проведена прямая, параллельная его образующей, длина которой равна l. Найдите длину отрезка прямой, который заключен внутри конуса.

208. Есть конус с образующей 13 см и высотой 12 см, пересеченный прямой, параллельной основанию и отстоящей от основания на 6 см, а от высоты на 2 см (рис. 125). Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного внутри конуса.

209. Через середину высоты конуса, боковая поверхность которого равна 80 см^2, проведена плоскость, перпендикулярная высоте. Найдите боковую поверхность образовавшегося усеченного конуса.

210. Учитывая, что радиусы оснований усеченного конуса равны:
а) 9 см и 18 см, а высота — 12 см, найдите его образующую;
б) 16 см и 4 см, а образующая — 20 см, найдите его высоту.

211. Найдите поверхность усеченного конуса, учитывая, что радиусы его оснований равны 6 см и 10 см, а образующая — 10 см.

212. Докажите, что:
а) боковая поверхность конуса равна боковой поверхности цилиндра с той же высотой и радиусом основания, равным высоте равнобедренного треугольника, основанием которого является образующая, а вершина лежит на оси конуса (рис. 126);

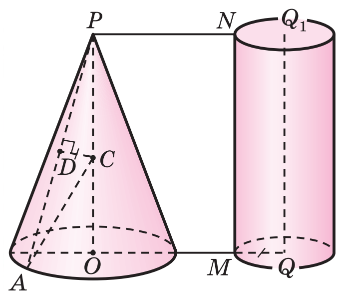


Рис. 126

б) боковая поверхность усеченного конуса равна боковой поверхности цилиндра с той же высотой и радиусом основания, равным высоте равнобедренного треугольника, основанием которого является образующая, а вершина лежит на оси конуса (рис. 127).

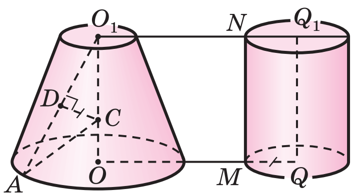


Рис. 127

213. Найдите площадь сечения усеченного конуса плоскостью, учитывая, что она проходит через:

а) две его образующие, отсекает от окружности основания дугу в $120°$, радиусы оснований конуса равны 3 и 5, а высота — $\sqrt{2}$;

б) середину высоты, параллельна основаниям, площади которых равны 16 дм^2 и 64 дм^2.

214. Найдите:

а) объем V конуса, учитывая данные, приведенные на рис. 128;

б) отношение объемов конусов, учитывая данные, приведенные на рис. 129.

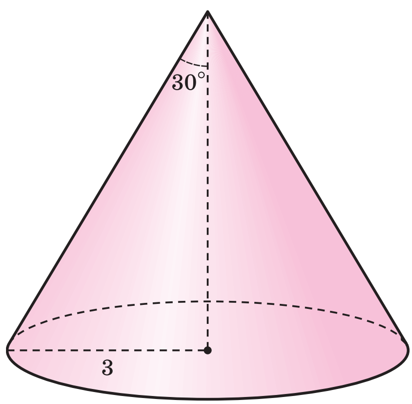


Рис. 128

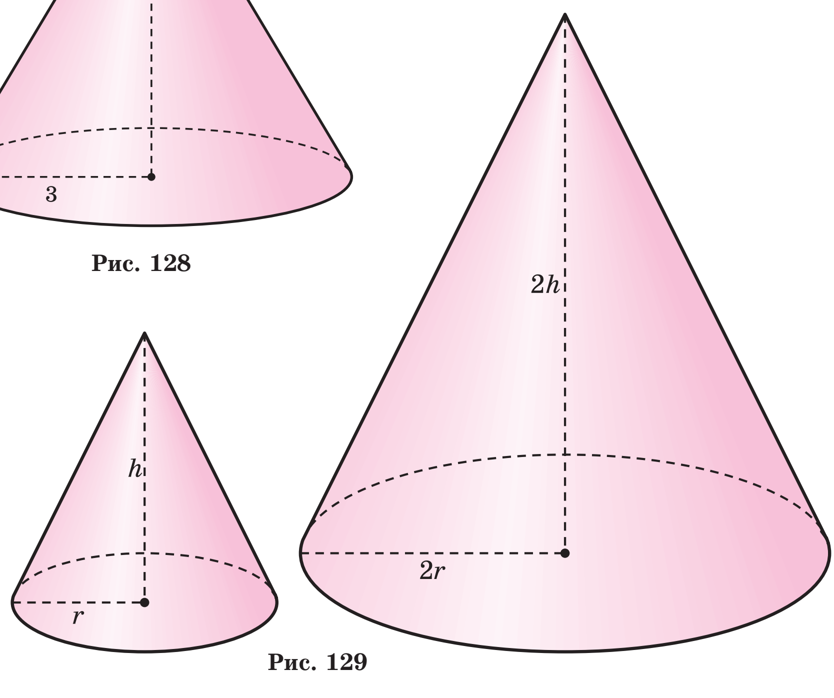


Рис. 129

215. Найдите объем конуса, у которого:
а) диаметр основания равен 40 см, а высота — 50 см;
б) образующая равна 60 см, а высота — 30 см;
в) радиус основания равен 85 см, а образующая составляет с осью конуса угол в 30°;
г) радиус основания равен 42 см, а образующая наклонена к плоскости основания под углом в 65°;
д) полная поверхность равна 680 дм^2, а образующая — 25 дм;
е) полная поверхность равна 160 см^2, а образующая больше радиуса основания на 2 см.

216. Пусть h, r и V — соответственно высота, радиус основания и объем конуса. Найдите:
а) V, учитывая, что $h = 12$ см, $r = 6$ см;
б) h, учитывая, что $r = 4$ см, $V = 48\pi$ см^3;
в) r, учитывая, что $h = m$, $V = p$.

217. Две стороны треугольника равны b и c, а тупой угол между ними — α. Найдите объем тела, образованного вращением треугольника около стороны b.

218. Найдите объем конуса, учитывая, что его:
а) высота равна H и равна диаметру его основания;
б) образующая равна 13 см, а площадь осевого сечения — 60 см^2;
в) образующая равна l, а боковая поверхность — P;
г) площадь его основания равна Q, а боковая поверхность — P.

219. Докажите, что если треугольник вращается вокруг стороны, то объем полученного тела равен $\frac{1}{3}\pi R^2 h$, где h — сторона, вокруг которой осуществляется вращение, а R — высота треугольника, опущенная на эту сторону.

220. Найдите объем тела, полученного вращением:
а) треугольника со сторонами 15 см, 41 см и 52 см вокруг большей стороны;
б) прямоугольного треугольника с площадью S и острым углом α около его гипотенузы;
в) параллелограмма с площадью Q вокруг стороны длиной a.

221. На расстоянии 2 см от вершины конуса с высотой 5 см проведена плоскость, параллельная основанию. Найдите объем исходного конуса, учитывая, что объем конуса, отсеченного от исходного, равен 24 см^3.

222. Высота конуса разделена на три доли, и через точки деления проведены плоскости, параллельные плоскости основания конуса. Определите, в каком отношении этими плоскостями делится объем конуса.

223. Есть конус, радиус основания которого равен r, а высота — H. Определите, на каком расстоянии от плоскости основания нужно провести плоскость, параллельную ей, чтобы этой плоскостью конус разделился на части, объемы которых относятся как:
а) 1 : 1; б) 3 : 5; в) 5 : 3; г) 7 : 1.

224. Плоскость, параллельная основанию конуса с радиусом 6 м, пересекает его по кругу с радиусом 3 м. Найдите объемы полученных частей конуса, учитывая, что плоскость разделяет образующую конуса на части, из которых та, что ограничена этой плоскостью и основанием конуса, равна 5 м.

225. Плоскость, параллельная основанию конуса с радиусом 6 м, пересекает его по кругу с радиусом 4 м. Образованный усеченный конус равновелик цилиндру такой же высоты. Найдите радиус основания этого цилиндра.

226*. Прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α вращается вокруг прямой, параллельной гипотенузе, отстоящей от нее на высоту, проведенную к гипотенузе, и не имеющей с треугольником общих точек (рис. 130). Найдите объем полученного тела.

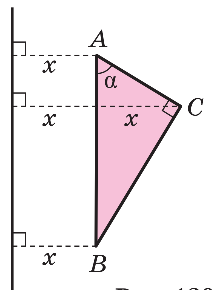


Рис. 130

227. В конусе просверлили цилиндрическое отверстие, ось которого совпадает с осью конуса. Найдите объем образовавшегося тела, учитывая, что высота конуса равна 30 см, диаметр его основания — 20 см, а диаметр цилиндрического отверстия — 10 см.

228. В треугольную пирамиду с равными ребрами вписан конус, и около этой пирамиды описан конус. Определите, во сколько раз полная поверхность описанного конуса больше полной поверхности вписанного конуса.

229. Высота конуса равна 4 см, а радиус — 6 см. Найдите полную поверхность правильной n-угольной пирамиды, вписанной в конус, учитывая, что:
а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) $n = 5$.

230. В конус вписана пирамида, основанием которой является прямоугольник. Меньшая сторона прямоугольника равна a, а острый угол между его диагоналями — α. Боковая грань, содержащая меньшую сторону основания, составляет с плоскостью основания угол β. Найдите объем конуса.

231. Основанием пирамиды является ромб со стороной a и острым углом φ. В пирамиду вписан конус, образующая которого составляет с плоскостью основания угол β. Найдите объем конуса.

232. Есть конус с радиусом основания 5 см и высотой 4 см, в который вписана правильная n-угольная пирамида. Плоскость, параллельная основанию конуса, пересекает его по кругу с радиусом 2 см. Найдите полную поверхность части пирамиды, заключенной между основанием конуса и секущей плоскостью, учитывая, что:
а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) $n = 5$.

233. Найдите ребро:
а) куба, вписанного в конус с радиусом основания R и высотой H (рис. 131);
б) правильной треугольной призмы, у которой боковые грани являются квадратами и которая вписана в конус с радиусом основания R и высотой H.

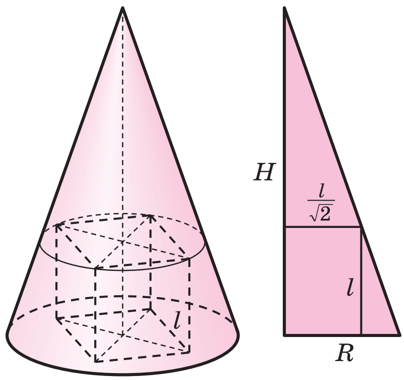


Рис. 131

234*. Есть конус с образующей l, наклоненной к плоскости основания конуса под углом в 60°. В него вписана правильная треугольная призма, боковое ребро которой в два раза больше стороны основания (рис. 132). Найдите это ребро.

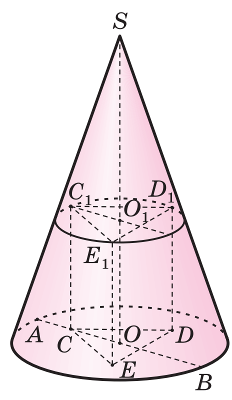


Рис. 132

235. Приняв плотность стали равной 7,8 г/см^3, найдите массу стальной круглой детали, измерения которой в миллиметрах даны на рисунке:
а) 133; б) 134.

236*. Вокруг конуса описана четырехугольная пирамида. Докажите, что суммы площадей ее не смежных боковых граней равны между собой.

237*. Вокруг конуса описана треугольная пирамида. Площади ее боковых граней относятся как 5 : 6 : 7. Определите, в каком отношении линии касания разделяют боковую поверхность пирамиды.

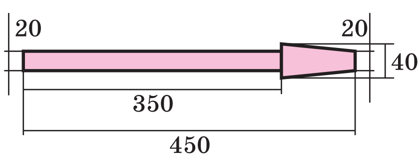


Рис. 133

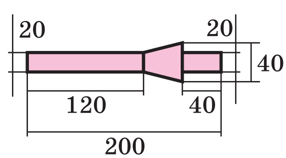


Рис. 134