

§ 5. Сфера

А) Сферой называется поверхность, полученная вращением окружности вокруг какого-либо ее диаметра (рис. 135). Центр этой окружности называется **центром сферы**.

Отрезок, соединяющий центр сферы с любой ее точкой, называется **радиусом сферы**. Отрезок, соединяющий две точки сферы, — **хордой сферы**, а хорда, которой принадлежит центр сферы, — **диаметром сферы** (рис. 136).

Из определения сферы следует, что все ее точки равноудалены от центра сферы. Поэтому все радиусы сферы равны друг другу.

Теорема 1. Сечение сферы плоскостью есть окружность, центр которой совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного из центра сферы на секущую плоскость.

Доказательство. Пусть сфера с центром O пересечена плоскостью α , и Q — основание перпендикуляра, опущенного из центра O на плоскость α (рис. 137).

Пусть X и Y — произвольные точки линии пересечения сферы с плоскостью α . Треугольники OQX и OQY оба прямоугольные, так как отрезок OQ перпендикулярен плоскости α , а значит, и отрезкам QX и QY , лежащим в этой плоскости. Отрезок OQ является общим катетом, а гипотенузы этих треугольников равны как радиусы сферы. Поэтому треугольники OQX и OQY равны друг другу, а значит, $QX = QY$. Получили, что любые две точки линии пересечения сферы плоскостью α равноудалены от основания Q перпендикуляра, опущенного из центра сферы на эту плоскость.

Вместе с этим, если точка M плоскости α принадлежит окружности ω с центром Q и радиусом QX , то прямоугольные треугольники OQM и OQX равны, поэтому равны и их гипотенузы OM и OX . Получили, что каждая точка окружности ω принадлежит как плоскости α , так и сфере.

Значит, линия пересечения сферы с плоскостью есть окружность с центром Q .

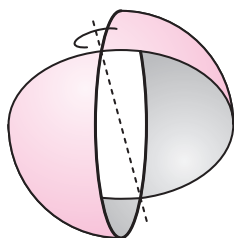


Рис. 135

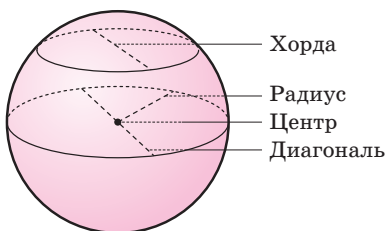


Рис. 136

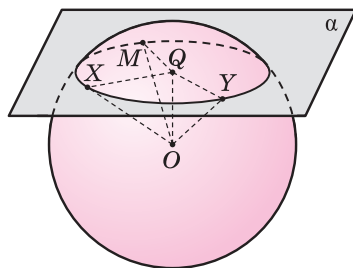


Рис. 137

Следствие. Если плоскость проходит на расстоянии d от центра сферы с радиусом R , то окружность сечения имеет радиус r , равный $\sqrt{R^2 - d^2}$.

Сечение имеет наибольший радиус R , если секущая плоскость проходит через центр сферы, это сечение называют *большой окружностью*, а ограниченный ею круг — *большим кругом*.

Пример 1. Точки A, B, C сферы с радиусом 9 выбраны так, что $AC = 8$ и $\angle ABC = 45^\circ$. Найдём расстояние от центра сферы до плоскости треугольника ABC .

Решение. Пусть OO_1 — перпендикуляр, опущенный из центра O сферы на плоскость ABC (рис. 138). Поскольку наклонные OA, OB, OC равны как радиусы сферы, то равны и их проекции на плоскость ABC , это значит, $O_1A = O_1B = O_1C$. Поэтому O_1 — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Учитывая, что отношение стороны треугольника к синусу противоположного угла равно диаметру описанной окружности, из треугольника ABC найдём:

$$O_1A = \frac{AC}{2\sin \angle ABC} = \frac{8}{2\sin 45^\circ} = 4\sqrt{2}.$$

Теперь можно найти катет OO_1 прямоугольного треугольника AOO_1 :

$$OO_1 = \sqrt{OA^2 - O_1A^2} = \sqrt{81 - 32} = 7.$$

О т в е т: 7.

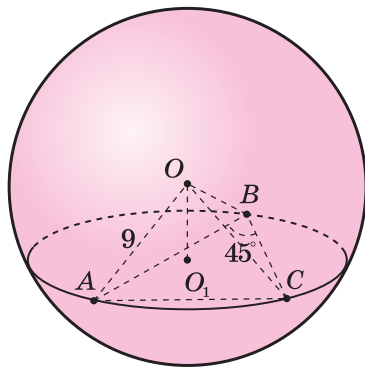


Рис. 138



Теорема 2. Две сферы пересекаются по окружности, плоскость которой перпендикулярна прямой, проходящей через центры сфер.

Доказательство. Пусть есть две пересекающиеся сферы, с центрами O_1 и O_2 , и A — какая-либо их общая точка (рис. 139). Через точку A проведем плоскость α , перпендикулярную прямой O_1O_2 . Пусть эта плоскость пересекает прямую O_1O_2 в точке B . В соответствии с теоремой 1, плоскость α пересекает ту и другую сферы по окружности с центром B . Получили, что окружность с центром B является общей окружностью данных сфер.

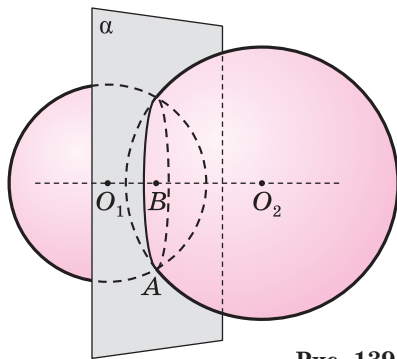


Рис. 139

Других общих точек данные окружности не имеют. Допустим, что это не так. Пусть C — какая-либо общая точка сфер, не принадлежащая окружности с центром B . Через точки C , O_1 и O_2 проведем плоскость, которая пересечет сферы по окружностям с центрами O_1 и O_2 . Эти окружности пересекаются в двух точках, которые принадлежат окружности с центром B , и вместе с этим им обеим принадлежит точка C . Но это противоречит утверждению о том, что две окружности имеют не более двух общих точек.

Б) Плоскость, имеющая со сферой единственную общую точку, называется **касательной плоскостью сферы**. Общая точка сферы и касательной плоскости называется *точкой касания*.

Прямая касательной плоскости сферы, проходящая через точку касания, имеет со сферой единственную общую точку. Такая прямая называется *касательной прямой сферы*.

Теорема 3. Касательная плоскость сферы перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

Доказательство. Пусть плоскость α касается сферы с центром O в точке C (рис. 140). Пусть B — произвольная точка плоскости α , отличная от точки C . Через точки O , C , B проведем плоскость β , она, по теореме 1, пересекает сферу по окружности. По отношению к этой окружности прямая BC является касательной, так как точка C — их единственная общая точка. По свойству касательной к окружности, радиус OC перпендикулярен прямой BC . Таким образом, радиус OC перпендикулярен любой прямой BC , проведенной в плоскости α через ее точку C . Значит, радиус OC перпендикулярен плоскости α .

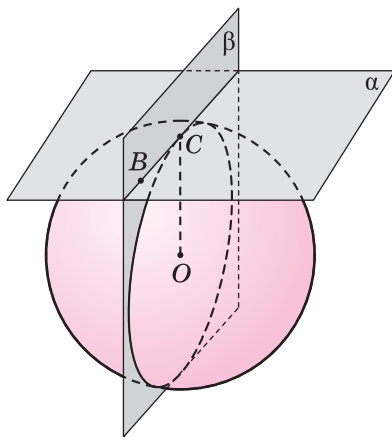


Рис. 140

Теорема 4. Если плоскость проходит через точку сферы и перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку, то она является касательной плоскостью сферы.

Доказательство. Пусть плоскость γ проходит через точку M сферы и перпендикулярна радиусу OM (рис. 141). Пусть N — произвольная точка плоскости γ , отличная от точки M . Треугольник OMN прямоугольный с гипотенузой ON , и она длинее катета.

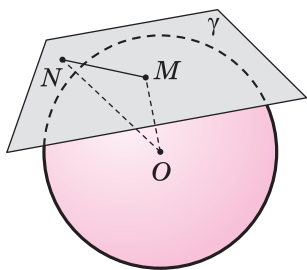


Рис. 141

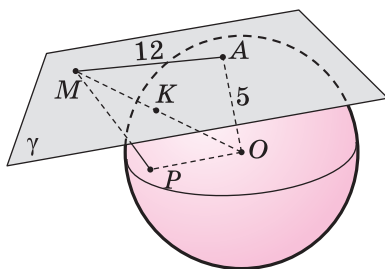


Рис. 142

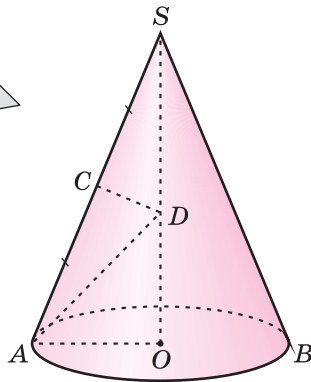


Рис. 143

Поэтому точка N расположена вне сферы. Получается, что любая точка плоскости γ , кроме точки M , не принадлежит сфере. Значит, точка M — единственная общая точка плоскости γ и сферы, а поэтому плоскость γ является касательной плоскостью сферы.

Теоремы 3 и 4 выражают соответственно *свойство* и *признак касательной плоскости сферы*.

Пример 2. Плоскость γ касается сферы с радиусом 5 в точке A . На плоскости γ выбрана точка M . Найдём расстояние от M до ближайшей точки сферы, учитывая, что $AM = 12$.

Решение. Пусть O — центр сферы (рис. 142). Поскольку $OA \perp AM$, то:

$$OM = \sqrt{OA^2 + AM^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13.$$

Пусть P — некоторая точка сферы, тогда, из неравенства треугольника, следует, что:

$$MP + PO \geq OM, \text{ или } MP \geq OM - PO = 13 - 5 = 8.$$

Если K — точка сферы на отрезке OM , то выполняется равенство $MK = OM - KO$. Поэтому наиболее близкая к M точка сферы находится на расстоянии 8.

Ответ: 8.

В) Прежде чем доказать утверждение о площади поверхности сферы, обобщим утверждения о боковых поверхностях конуса, усеченного конуса и цилиндра.



Теорема 5. Боковая поверхность конуса, усеченного конуса, цилиндра равна боковой поверхности цилиндра с той же высотой и радиусом основания, равным длине перпендикуляра, соединяющего середину образующей с точкой на оси этого тела.

Доказательство. Пусть есть конус с вершиной S , основанием которого является круг с центром O . Пусть SAB — осевое сечение конуса (рис. 143). В плоскости AOS к образующей AS из ее середины C возведем перпендикуляр, который пересечет ось SO в некоторой точке D .

Прямоугольные треугольники AOS и DCS подобны, так как у них угол при вершине S общий. Поэтому:

$$\frac{OA}{OS} = \frac{CD}{CS}, \text{ или } \frac{OA}{OS} = \frac{2CD}{2CS}, \text{ или } \frac{OA}{OS} = \frac{2CD}{AS}.$$

Отсюда $AS \cdot OA = 2OS \cdot CD$.

С учетом этого для боковой поверхности $S_{\text{бок}}$ конуса будем иметь:

$$S_{\text{бок}} = \pi \cdot AS \cdot OA = 2\pi \cdot OS \cdot CD.$$

Пусть есть усеченный конус, полученный вращением прямоугольной трапеции O_1EGO_2 со средней линией HL вокруг боковой стороны O_1O_2 , которая перпендикулярна основаниям O_1E и O_2G , отрезок EM — проекция EG на основание O_1E (рис. 144). В плоскости O_1EG к образующей EG усеченного конуса из его середины H возведем перпендикуляр, который пересечет ось SO в некоторой точке K . Прямоугольные треугольники EGM и KHL подобны, так как их стороны попарно перпендикулярны. Поэтому:

$$\frac{HK}{HL} = \frac{EG}{GM} \text{ или } \frac{HK}{HL} = \frac{EG}{O_1O_2}.$$

Отсюда $EG \cdot HL = O_1O_2 \cdot HK$. С учетом этого для боковой поверхности $S_{\text{бок}}$ усеченного конуса будем иметь:

$$S_{\text{бок}} = 2\pi \cdot EG \cdot HL = 2\pi \cdot O_1O_2 \cdot HK.$$

Для цилиндра утверждение очевидно (рис. 145).

Теорема 6. Поверхность сферы равна учетверенной площади большого круга:

$$S = 4\pi R^2.$$



Доказательство. Пусть есть сфера, образованная вращением полуокружности AB вокруг своего диаметра (рис. 146). Впишем в эту дугу ломаную $AM_1M_2M_3...M_{n-1}M_nB$ с равными звеньями и из точек $M_1, M_2, M_3, ..., M_{n-1}, M_n$ опустим перпендикуляры $M_1P_1, M_2P_2, M_3P_3, ..., M_{n-1}P_{n-1}, M_nP_n$ на диаметр AB .

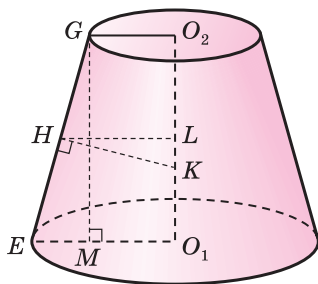


Рис. 144

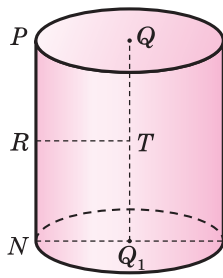


Рис. 145

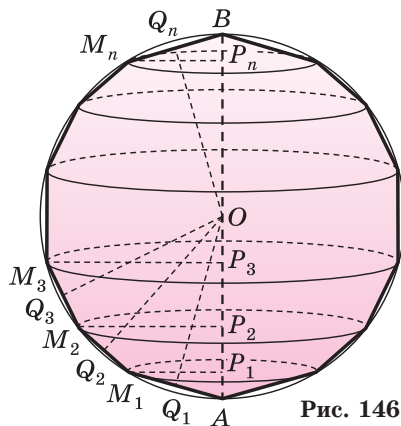


Рис. 146

Пусть $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_{n-1}, Q_n$ — середины звеньев ломаной. Тогда $OQ_1, OQ_2, OQ_3, \dots, OQ_{n-1}, OQ_n$ — срединные перпендикуляры к этим звеньям. При вращении вокруг AB звенья ломаной будут описывать или конусы, или усеченные конусы, или цилиндр. Поэтому, в соответствии с теоремой 5, для образовавшейся поверхности S_n получим:

$$S_n = 2\pi \cdot AP_1 \cdot OQ_1 + 2\pi \cdot P_1P_2 \cdot OQ_2 + 2\pi \cdot P_2P_3 \cdot OQ_3 + \dots + \\ + 2\pi \cdot P_{n-1}P_n \cdot OQ_{n-1} + 2\pi \cdot P_nB_n \cdot OQ_n.$$

Учтем, что отрезки $OQ_1, OQ_2, OQ_3, \dots, OQ_{n-1}, OQ_n$ все равны друг другу:

$$S_n = 2\pi \cdot OQ_1 \cdot (AP_1 + P_1P_2 + P_2P_3 + \dots + P_{n-1}P_n + P_nB) = 2\pi \cdot OQ_1 \cdot AB.$$

Пусть радиус сферы равен R . Тогда $AB = 2R$.

Будем неограниченно увеличивать количество звеньев ломаной. Тогда отрезок OQ_1 будет стремиться к радиусу сферы, а выражение $2\pi \cdot OQ_1 \cdot AB$ — к выражению $2\pi \cdot R \cdot 2R$, т. е. к выражению $4\pi R^2$. Этот предел и принимается в качестве площади поверхности сферы.

Учитывая, что πR^2 выражает площадь большого круга, получим, что поверхность сферы равна учетверенной площади большого круга.



Пример 3. Две сферы пересекаются по окружности длиной $4,8\pi$.

Найдем площадь третьей сферы, которая проходит через центры этих двух сфер и линию их пересечения, учитывая, что радиус одной из данных сфер равен 3.

Решение. Пусть A и B — центры пересекающихся сфер, K — центр окружности, по которой они пересекаются, и C — точка на линии их пересечения (рис. 147). Поскольку центр искомой сферы равноудален от каждой точки линии пересечения данных сфер, то он принадлежит прямой AB . Поэтому AB — диаметр третьей сферы и $\angle ACB = 90^\circ$. Плоскость, в которой лежит линия пересечения двух сфер, перпендикулярна прямой AB , поэтому $KC \perp AB$ и KC — радиус общей окружности сфер.

Из условия следует, что $2\pi \cdot KC = 4,8\pi$. Значит, $KC = 2,4$.

Пусть одна из данных сфер, например сфера с центром A , имеет радиус 3.

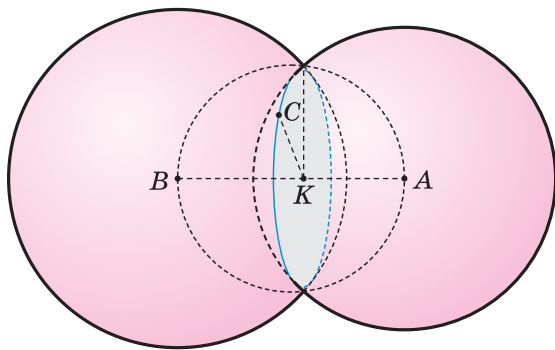


Рис. 147

Тогда из прямоугольного треугольника AKC находим, что:

$$AK = \sqrt{AC^2 - KC^2} = \sqrt{3^2 - 2,4^2} = 1,8.$$

Поскольку AK — проекция катета AC на гипотенузу AB в прямоугольном треугольнике ABC , то $AB \cdot AK = AC^2$, откуда $AB = \frac{AC^2}{AK} = \frac{3^2}{1,8} = 5$.

В этом случае площадь третьей сферы равна $\pi \cdot AB^2 = 25\pi$.

О т в е т: 25π .



1. Какая поверхность называется сферой, какая точка называется центром сферы?
2. Какой отрезок называется радиусом сферы; хордой сферы; диаметром сферы?
3. По какой фигуре пересекаются сфера и плоскость; две сферы?
4. Какое сечение сферы плоскостью называют большим окружностью, какой круг называют большим кругом?
5. Какая плоскость называется касательной плоскостью сферы, какая точка называется точкой касания плоскости и сферы?
6. Какая прямая называется касательной прямой сферы?
7. Сформулируйте свойство касательной плоскости сферы; признак касательной плоскости сферы.
8. Сформулируйте утверждение, которое обобщает утверждения о боковых поверхностях конуса, усеченного конуса и цилиндра.
9. Чему равна поверхность сферы?



Задача 1. Две параллельные плоскости, расстояние между которыми равно 9 см, пересекают сферу по окружностям с радиусами 2 см и 7 см. Найдите радиус сферы, учитывая, что плоскости проходят по разные стороны от ее центра.

Решение. Пусть плоскости α и β пересекают сферу с центром O по окружностям, радиусы O_1M и O_2N которых равны 2 см и 7 см соответственно (рис. 148), причем $OO_2 = 9$ см.

Поскольку $OO_1 \perp \alpha$, $OO_2 \perp \beta$ и $\alpha \parallel \beta$,

то точка O принадлежит отрезку O_1O_2 . Пусть $OO_1 = a$, тогда $OO_2 = 9 - a$,

$$OM^2 = OO_1^2 + O_1M^2 = a^2 + 2^2, \quad ON^2 = OO_2^2 + O_2N^2 = (9 - a)^2 + 7^2.$$

Поэтому $a^2 + 2^2 = (9 - a)^2 + 7^2$.

Отсюда находим, что $a = 7$, а $OM = \sqrt{OO_1^2 + O_1M^2} = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53}$ (см).

О т в е т: $\sqrt{53}$ см.

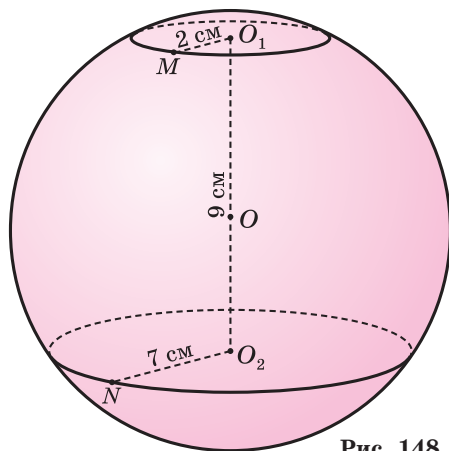


Рис. 148

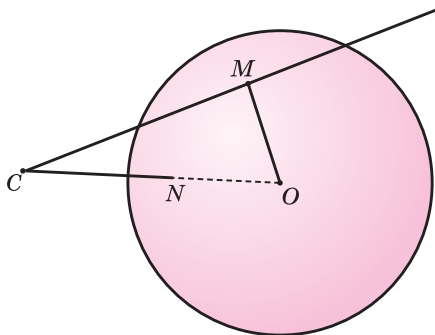


Рис. 149

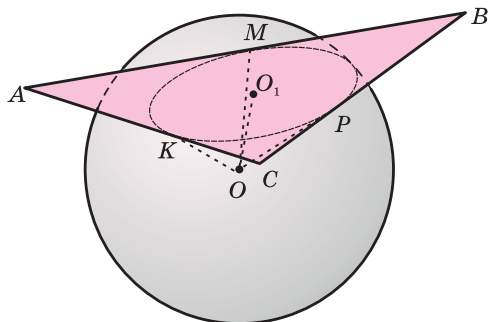


Рис. 150

Задача 2. Из точки C , отстоящей на 18 см от сферы, проведена касательная к ней. Найдите длину касательной, учитывая, что диаметр сферы равен 14 см.

Решение. Пусть точка C находится на расстоянии 18 см от сферы с центром O и диаметром 14 см, CM — касательная прямая (рис. 149). Самой близкой к C точкой сферы является точка N отрезка OC .

Поскольку $CM \perp OM$, то $\triangle CMO$ — прямоугольный, поэтому:

$$CM = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \sqrt{(ON + NC)^2 - OM^2} = \sqrt{(7 + 18)^2 - 7^2} = 24 \text{ (см)}.$$

О т в е т: 24 см.

Задача 3. Треугольник со сторонами 10, 10 и 12 касается сферы с радиусом 5. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника.

Решение. Пусть $AB = 12$, $AC = BC = 10$, стороны AB , AC и BC треугольника ABC касаются сферы с центром O в точках M , K и P соответственно, O_1 — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на плоскость ABC (рис. 150). Поскольку радиусы сферы, проведенные в точку касания, перпендикулярны касательным, то $OM \perp AB$, $OK \perp AC$ и $OP \perp BC$.

По теореме о трех перпендикулярах, $O_1M \perp AB$, $O_1K \perp AC$ и $O_1P \perp BC$. Прямоугольные треугольники OO_1M , OO_1K и OO_1P равны, так как имеют общий катет OO_1 и равные гипотенузы. Поэтому $O_1M = O_1K = O_1P$ и, значит, O_1 — центр окружности, вписанной в треугольник ABC . Радиус r этой окружности найдем, используя формулу $S_{\Delta} = pr$, где p — полупериметр треугольника, S_{Δ} — его площадь.

Найдем последовательно полупериметр треугольника ABC , его площадь по формуле Герона, радиус r , а затем катет OO_1 в прямоугольном треугольнике OO_1M с известной гипотенузой OM , равной 5, и найденным другим катетом O_1M , равным r :

$$p = \frac{10+10+12}{2} = 16, \quad S_{\Delta} = \sqrt{16 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4} = 48,$$

$$r = 48 : 16 = 3, \quad OO_1 = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

О т в е т: 4.



238. Докажите, что:
- а) радиус r сечения сферы плоскостью удовлетворяет условию $0 < r \leq R$, где R — радиус сферы;
 - б) радиусы сечений сферы плоскостями, равноудаленными от центра сферы, равны друг другу;
 - в) из двух сечений больший радиус имеет то, плоскость которого расположена ближе к центру.
239. Установите, верно ли, что:
- а) любые две разные точки сферы определяют ее единственную большую окружность;
 - б) центр сферы является центром ее симметрии;
 - в) любая прямая, проходящая через центр сферы, является осью симметрии сферы;
 - г) любая плоскость, проходящая через центр сферы, является плоскостью симметрии.
240. Найдите геометрическое место:
- а) центров сфер, которым принадлежат вершины данного треугольника;
 - б) центров сфер данного радиуса, которые касаются граней данного двугранного угла.
241. Определите взаимное расположение сферы с центром O и радиусом R и плоскости ABC , учитывая, что треугольник ABC является основанием треугольной пирамиды $OABC$ с высотой OH и:
- а) $R = 3$ дм, $OH = 30$ см; в) $R = 1$ дм, $OA = 9$ см;
 - б) $R = 6$ м, $OH = 190$ см; г) $R = 0,7$ дм, $OH = 8$ см.
242. Найдите длину окружности, являющейся:
- а) сечением сферы с радиусом 82 см плоскостью, отстоящей от центра сферы на 18 см;
 - б) геометрическим местом точек сферы с диаметром 25 см, отстоящих от данной точки P этой сферы на 15 см.
243. Определите, через какие две точки сферы можно провести:
- а) бесконечно много больших окружностей;
 - б) только одну большую окружность.
244. Сфера с радиусом R высекает из плоскости, отстоящей на d от ее центра, фигуру F . Найдите:
- а) площадь S фигуры F , учитывая, что $R = 18$ см, $d = 12$ см;
 - б) R , учитывая, что площадь фигуры F равна 18π см², $d = 3$ см.
245. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости:
- а) прямоугольника, вершины которого лежат на сфере с радиусом 30 см, а диагональ равна 48 см;

- б) треугольника, вершины которого лежат на сфере с радиусом 26 см, а стороны равны 12 см, 16 см и 20 см.
246. Найдите длину линии пересечения сфер, радиусы которых равны 25 дм и 29 дм, а расстояние между центрами — 36 дм.
247. Вершины прямоугольного треугольника с катетами 18 см и 24 см лежат на сфере. Определите:
- положение центра сферы, радиус которой равен 15 см;
 - расстояние от центра сферы с радиусом 65 см до плоскости треугольника.
248. Через конец диаметра сферы с радиусом R проведена секущая плоскость под углом α к диаметру. Найдите длину полученного сечения, учитывая, что:
- $R = 3$ см, $\alpha = 30^\circ$;
 - $R = 5$ м, $\alpha = 45^\circ$.
249. Через середины радиуса R сферы перпендикулярно к нему проведена секущая плоскость. Найдите:
- радиус полученного сечения;
 - площадь боковой поверхности и объем конуса, вершиной которого является центр сферы, а основанием — полученное сечение.
250. Найдите геометрическое место проекций точки A на все плоскости, которые можно провести через точку B .
251. Докажите, что вершины двух прямоугольников, которые лежат в разных плоскостях и имеют общую сторону, принадлежат одной сфере.
252. Найдите радиус окружности, по которой пересекаются сферы, учитывая, что их радиусы равны R , а расстояние между центрами — $1,6R$.
253. Средний радиус Земли равен 6371 км. Найдите, какой путь пройдет за час в результате вращения Земли вокруг своей оси город:
- Могилев, который находится на $53^\circ 54'$ северной широты;
 - Белыничи, который находится на $53^\circ 55'$ северной широты;
 - Витебск, который находится на $55^\circ 12'$ северной широты;
 - Брест, который находится на $52^\circ 06'$ северной широты.
254. Средний радиус Земли равен 6371 км. Телевизионные волны распространяются по прямой. Определите, на каком расстоянии можно принять телепередачу, учитывая, что высота телевизионной башни станции равна:
- 150 м;
 - 308 м;
 - 537 м.
255. При пересечении сферы с радиусом 14 см с двумя плоскостями образуются две равные окружности с общей хордой 4 см (рис. 151). Найдите радиусы окружностей.

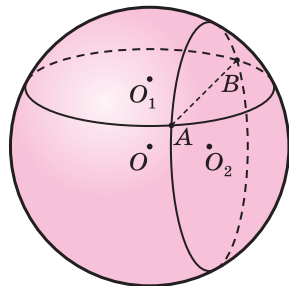


Рис. 151

256. Точка M отстоит на 16 см от ближайшей точки сферы с радиусом 10 см. Найдите длину такой окружности на сфере, все точки которой отстоят от точки M на 24 см.

257*. Вершина конуса принадлежит сфере, его ось проходит через центр, а образующая пересекает поверхность сферы. Найдите поверхность части конуса, размещенной внутри сферы, учитывая, что радиус сферы равен 12 см, а угол при вершине осевого сечения конуса — 30° .

258*. На сфере с радиусом R выбраны такие точки A , B , C и D , что $\angle ADB = \angle BDC = \angle CDA = 2\varphi$ и $AD = BD = CD$. Найдите:

а) хорды AB и AD ;

б) площадь сечения сферы плоскостью ABC .

259. Точка M находится в плоскости, которая касается сферы с радиусом R в точке A . Найдите наименьшее и наибольшее расстояния от точки M до точек сферы, учитывая, что:

а) $MA = 15$ см и $R = 112$ см; б) $MA = 16$ см и $R = 63$ см.

260*. Есть тело, ограниченное двумя сферами с общим центром. Докажите, что площадь его сечения плоскостью, проходящей через центр сфер, равна площади сечения плоскостью, касательной к внутренней сфере (рис. 152).

261. Найдите расстояние от центра до плоскости треугольника, стороны которого касаются сферы с радиусом 5 см и равны 13 см, 14 см и 15 см.

262. Найдите расстояние от центра сферы с радиусом 10 см до плоскости ромба, диагонали которого равны 15 см и 20 см, а все стороны касаются сферы.

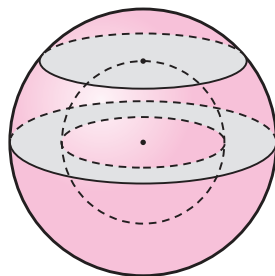


Рис. 152

263. Сфера касается сторон треугольника с длинами 10 см, 10 см и 16 см, а ее центр отстоит на 26 см от вершины большего угла. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника.

264. Через точку сферы с радиусом R проведены две плоскости, из которых одна касается сферы, а другая наклонена к ней под углом φ . Найдите длину окружности сечения.

265. Найдите радиус сферы и расстояние между точками ее касания с гранями двугранного угла в 120° , учитывая, что центр сферы отстоит на a от ребра угла.

266. Прямая отстоит на d от центра сферы с радиусом R . Докажите, что:

а) если $d < R$, то прямая пересекает сферу в двух точках;

б) если $d = R$, то прямая имеет только одну общую точку со сферой;

в) если $d > R$, то прямая не имеет со сферой общих точек.

267. Перпендикулярные плоскости так пересекают сферу, что полученные сечения имеют единственную общую точку, а их радиусы равны r_1 и r_2 . Найдите поверхность сферы.



268. Найдите площадь сферы, радиус которой равен:

- а) 6 см; б) 2 дм; в) $\sqrt{2}$ м; г) $2\sqrt{3}$ см.

269. Докажите, что:



- а) поверхности сфер пропорциональны квадратам их радиусов;
 б) полная поверхность цилиндра, полученного при вращении квадрата вокруг прямой, содержит одну из его сторон, равна площади сферы, радиус которой равен стороне квадрата;
 в) площадь сферы равна площади полной поверхности конуса, осевое сечение которого есть равносторонний треугольник с высотой, равной диаметру сферы.

270. Найдите поверхность сферы, учитывая, что:

- а) длина большой окружности равна $6\sqrt{2\pi}$ м;
 б) радиусы двух ее параллельных сечений, отстоящих на 3 см, равны 9 см и 12 см.

271. Найдите радиус:

- а) сферы, поверхность которой равна 324 см^2 ;
 б) круга, площадь которого равна поверхности сферы с радиусом 5 м.

272. Определите, сколько кожи пойдет на покрывку футбольного мяча с радиусом 10 см, добавив на швы 8 % площади поверхности мяча.

273. Средний радиус Земли равен 6371 км. Найдите:



- а) площадь суши, учитывая, что вода покрывает примерно $\frac{3}{4}$ земной поверхности;
 б) длину тропика, широта которого равна $23^\circ 27'$;
 в) длину полярного круга, широта которого равна $66^\circ 33'$;
 г) длину параллели, на которой расположен Минск ($53^\circ 56'$ северной широты).



274*. Секущая плоскость разделяет сферу на две поверхности (рис. 153), каждая из которых называется *сферическим куполом*. Окружность сечения называется *основанием купола*. Каждый из отрезков, на которые секущая плоскость разделяет перпендикулярный ей диаметр сферы, называют *высотой* соответствующего *сферического купола*.

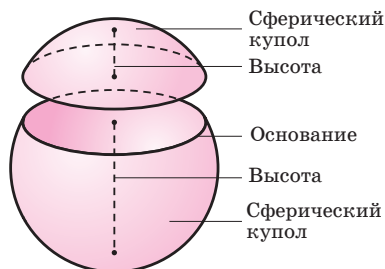


Рис. 153

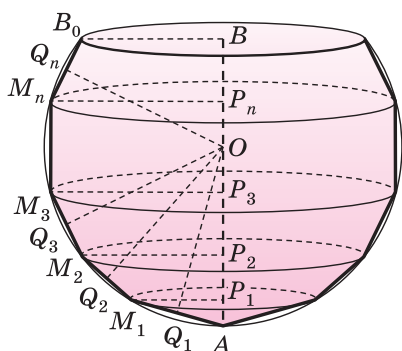


Рис. 154

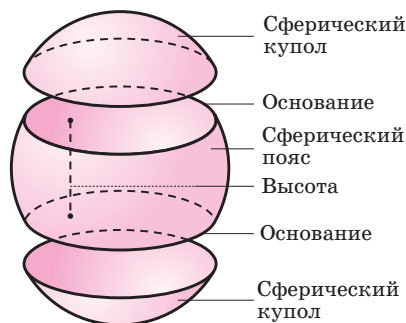


Рис. 155

Докажите, что поверхность сферического купола равна произведению его высоты и длины окружности большого круга (рис. 154).

- 275*.** Две параллельные секущие плоскости разделяют сферу на два купола и еще одну поверхность (рис. 155), которую называют *сферическим поясом*. Окружности сечений называются *основаниями сферического пояса*. Перпендикуляр, опущенный из одной секущей плоскости на другую, называют *высотой сферического пояса*. Докажите, что поверхность сферического пояса равна произведению его высоты и длины окружности большого круга (рис. 156).

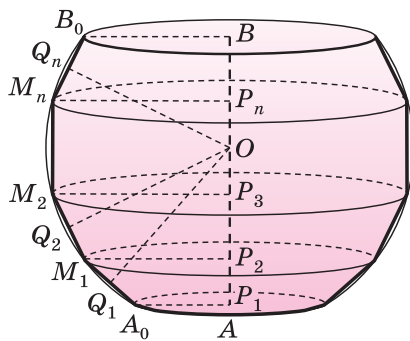


Рис. 156

- 276*.** Радиус сферического купола равен r , а дуга осевого сечения — α . Найдите:
а) длину окружности основания купола; б) высоту купола.
- 277*.** Радиус сферического пояса равен r , а углы, под которыми видны из центра сферы диаметры его оснований, — α и β . Найдите высоту пояса.
- 278*.** Основания сферического пояса равны $144\pi \text{ см}^2$ и $25\pi \text{ см}^2$, а его высота — 17 см. Найдите радиус сферы.
- 279*.** Найдите поверхность сферического пояса, радиусы оснований которого равны:
а) 16 см и 33 см, а высота — 7 см;
б) 20 м и 24 м, а радиус сферы — 25 м.
- 280*.** Найдите поверхность сферического купола, у которого:
а) радиус основания равен r , а дуга осевого сечения — 90° ;
б) радиус основания равен r , а дуга осевого сечения — 60° ;
в) высота равна h , а дуга осевого сечения — 120° .

