§ 6. Шар

А) Шаром называется тело, полученное вращением круга вокруг какого-либо его диаметра (рис. 157).

Границей шара является сфера. Центр, радиус, диаметр сферы называют также *центром*, *радиусом*, *диаметром шара* соответственно. Расстояние от центра шара до любой его точки не больше радиуса шара.

Сечением шара плоскостью является круг, радиус которого изменяется в пределах от нуля до радиуса шара (рис. 158).

Чтобы обосновать формулу для вычисления объема шара, докажем вначале два вспомогательных факта, которые полезны сами по себе.

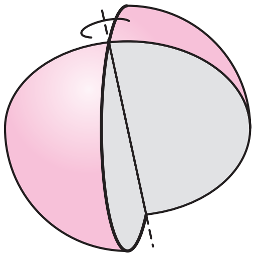

Рис. 157

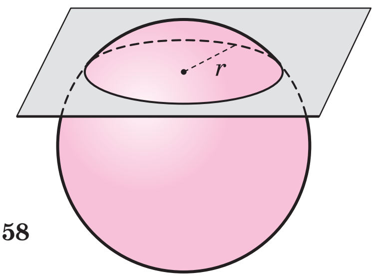

Рис. 158

Теорема 7. Объем тела, полученного вращением треугольника вокруг прямой, которая лежит в его плоскости, проходит через его вершину и не имеет с треугольником общих внутренних точек, равен третьей доле произведения поверхности, образованной стороной, лежащей против этой вершины треугольника, которая принадлежит оси вращения, и высоты, проведенной к этой стороне.

Доказательство. Пусть есть тело, полученное вращением треугольника ABC вокруг прямой l, которая лежит в плоскости треугольника, проходит через его вершину и не имеет с треугольником общих внутренних точек. Пусть вершина C принадлежит оси l, а CE — высота, проведенная к стороне AB против вершины C. Докажем, что объем V тела вращения равен $\frac{1}{3}\ S_{AB} \cdot CE$, где S_{AB} обозначает поверхность, образованную вращением стороны AB.

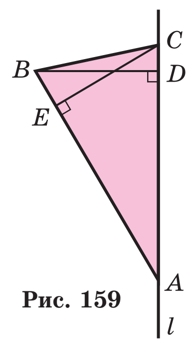

Рис. 159

Пусть сторона AC лежит на оси вращения l и BD — перпендикуляр, опущенный из вершины B на прямую l (рис. 159). Тогда стороны AB и CB опишут поверхности двух конусов с радиусом BD основания и высотами DA и DC соответственно. Для объема V тела вращения получаем:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot BD^2 \cdot DA + \frac{1}{3}\pi \cdot BD^2 \cdot DC = \frac{1}{3}\pi \cdot BD^2 \cdot \left(DA + DC\right) = \frac{1}{3}\pi \cdot BD \cdot BD \cdot AC.$$

Теперь обратим внимание на то, что $BD \cdot AC = AB \cdot CE$, так как каждое из этих произведений выражает удвоенную площадь треугольника ABC. Поэтому:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot BD \cdot AB \cdot CE = \frac{1}{3}(\pi \cdot BD \cdot AB) \cdot CE = \frac{1}{3}S_{AB} \cdot CE.$$

Пусть сторона AC не лежит на оси вращения l, а противоположная ей сторона AB не параллельна этой оси (рис. 160). Тогда прямая AB пересекает ось l в некоторой точке F и объем V тела вращения равен разности объемов тел, полученных вращением треугольников CAF и CBF. Учитывая это и то, что сторона CF этих треугольников принадлежит оси вращения, для объема V получаем:

$$V = \frac{1}{3}S_{AF} \cdot CE - \frac{1}{3}S_{BF} \cdot CE = \frac{1}{3}(S_{AF} - S_{BF}) \cdot CE = \frac{1}{3}S_{AB} \cdot CE.$$

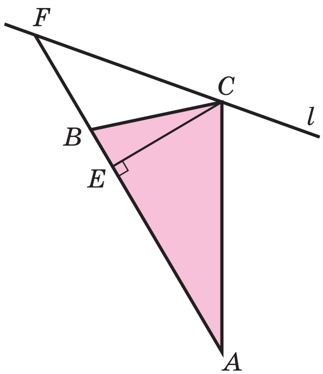

Рис. 160

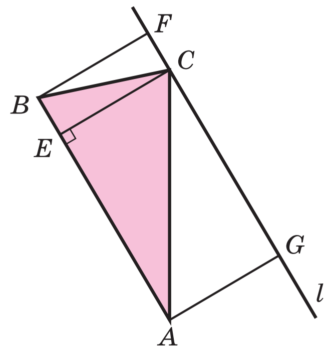

Рис. 161

Пусть сторона AC не лежит на оси вращения l, а противоположная ей сторона AB параллельна этой оси (рис. 161). Из точек A и B опустим перпендикуляры AG и BF на ось вращения l. Объем V тела вращения можно получить, вычитая из объема цилиндра, полученного вращением прямоугольника $ABFG$, объемы двух конусов, полученных вращением треугольников CBF и CAG. Поэтому:

$$V = \pi \cdot CE^2 \cdot AB - \left(\frac{1}{3}\pi \cdot CE^2 \cdot CF + \frac{1}{3}\pi \cdot CE^2 \cdot CG\right) =$$

$$= \pi \cdot CE^2 \cdot AB - \frac{1}{3}\pi \cdot CE^2 \cdot (CF + CG) = \pi \cdot CE^2 \cdot AB - \frac{1}{3}\pi \cdot CE^2 \cdot AB =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot CE^2 \cdot AB = \frac{1}{3} \cdot (2\pi \cdot CE \cdot AB) \cdot CE = \frac{1}{3}S_{AB} \cdot CE,$$

так как выражение $2\pi \cdot CE \cdot AB$ задает поверхность, образованную вращением стороны AB.

Теорема 8. Объем тела, образованного вращением круговога сектора вокруг прямой, проходящей через его центр, лежит в его плоскости и не имеет с ним общих внутренних точек, равен третьей доле произведения радиуса сектора и поверхности, полученной при вращении дуги сектора.

Доказательство. Пусть есть тело, полученное вращением кругового сектора AOB с радиусом R вокруг прямой l, которая проходит через центр сектора O и не имеет с ним общих внутренних точек. Впишем в этот сектор ломаную $AA_1A_2...A_{n-1}A_nB$ с равными звеньями (рис. 162). Объем тела, полученного вращением этой ломаной вокруг прямой l, равен сумме объемов тел, полученных вращением треугольников AOA_1, A_1OA_2, ..., $A_{n-1}OA_n$, A_nOB. Пусть OC, OC_1, ..., OC_n — высоты этих треугольников. Применив теорему **7**, получим:

$$V = \frac{1}{3}S_{AA_1} \cdot OC + \frac{1}{3}S_{A_1A_2} \cdot OC_1 + \ldots + \frac{1}{3}S_{A_nB} \cdot OC_n.$$

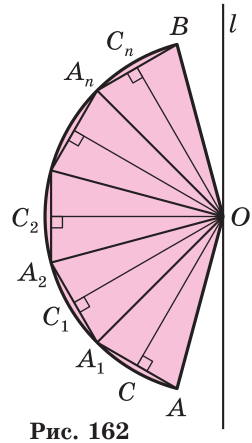

Рис. 162

Но $OC = OC_1 = \ldots = OC_n$.

Поэтому $V = \frac{1}{3}\left(S_{AA_1} + S_{A_1A_2} + \ldots + S_{A_nB}\right) \cdot OC = \frac{1}{3}S_n \cdot OC$, где S_n — поверхность, образованная при вращении многозвенной ломаной.

Будем увеличивать количество сторон ломаной, вписанной в круговой сектор AOB. Тогда высота OC будет стремиться к радиусу R, а поверхность S_n — к поверхности $S_{\smile AB}$, образованной при вращении дуги AB. Поэтому объем V стремится к выражению $\frac{1}{3}\, S_{\smile AB} \cdot R$, которое и принимается в качестве объема тела, образованного вращением кругового сектора AOB вокруг прямой l, проходящей через центр сектора O и не имеющей с ним общих внутренних точек.

Следствие 1. Объем шара равен третьей доле произведения его поверхности и радиуса: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

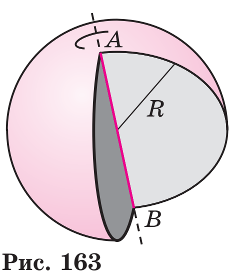

Рис. 163

Действительно, шар с радиусом R можно рассматривать как тело, образованное вращением сектора-полукруга вокруг диаметра (рис. 163). Тогда соответствующая окружность образует сферу. В соответствии с теоремой **8** получаем:

$$V = \frac{1}{3}S_{\smile AB} \cdot R = \frac{1}{3} \cdot 4\pi R^2 \cdot R = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Пример 1. Плоскость, проведенная через конец радиуса шара, образует с ним угол в 60°. Найдем объем шара, учитывая, что площадь полученного сечения равна 9π.

Р е ш е н и е. Пусть плоскость α проходит через конец A радиуса шара с центром O, OO_1 — перпендикуляр, проведенный из центра шара к плоскости α (рис. 164). Тогда O_1A — проекция радиуса OA на плоскость α, $\angle OAO_1 = 60°$ и $O_1A = OA \cos 60° = 0{,}5\, OA$. Поскольку по условию $\pi O_1A^2 = 9\pi$, то $O_1A = 3$, $OA = 6$ и объем шара $V = \frac{4}{3}\pi OA^3 = 288\pi$.

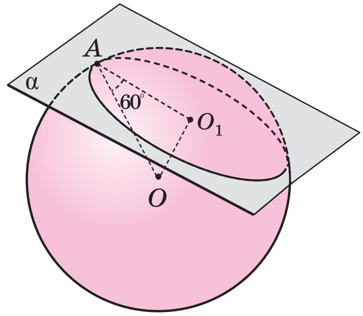

Рис. 164

О т в е т: 288π.

Б) Рассмотрим комбинации шара с другими телами.

Вписанным в шар многогранником называется многогранник, все вершины которого лежат на соответствующей сфере (рис. 165).

Описанным около шара многогранником называется многогранник, все грани которого касаются соответствующей сферы (рис. 166).

Пример 2. Шар вписан в правильную четырехугольную призму объемом V. Найдем объем шара.

Р е ш е н и е. Плоскость, проведенная перпендикулярно боковому ребру через его середину, проходит через центр O вписанного шара и пересекает его по большому кругу, вписанному в прямоугольник $ABCD$, который является сечением призмы (рис. 167). Поскольку стороны этого прямоугольника равны диаметрам шара, то сечением призмы является квадрат. Пусть радиус шара равен r. Тогда и боковое ребро, и ребро основания призмы равны диаметру шара, т. е. $2r$.

Поэтому $V = (2r)^2 \cdot 2r = 8r^3$. Поэтому, $V_ш = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi}{6} \cdot 8r^3 = \frac{\pi}{6}V$.

О т в е т: $\frac{\pi}{6}V$.

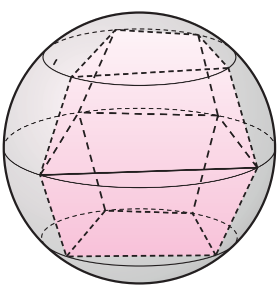

Рис. 165

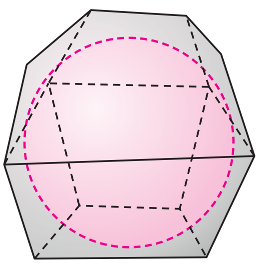

Рис. 166

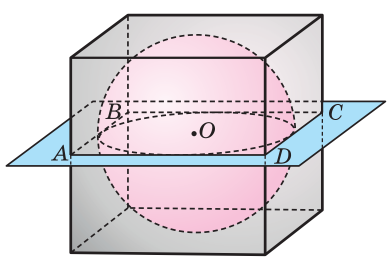

Рис. 167

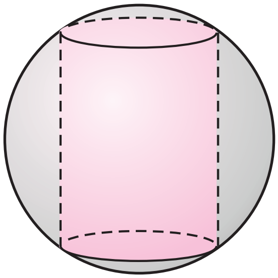

Рис. 168

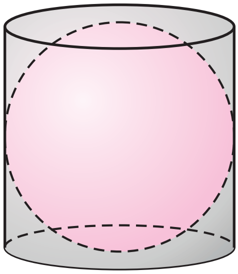

Рис. 169

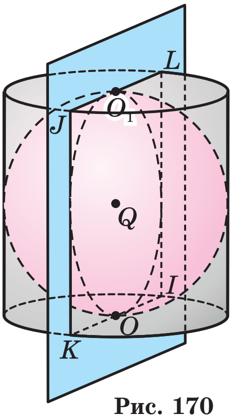

Рис. 170

Вписанным в шар цилиндром называется цилиндр, окружности оснований которого принадлежат соответствующей сфере (рис. 168).

Описанным около шара цилиндром называется цилиндр, основания и все образующие которого касаются соответствующей сферы (рис. 169).

Пример 3. Шар вписан в цилиндр объемом V. Найдем объем шара.

Р е ш е н и е. Плоскость, проведенная через ось OO_1 цилиндра, проходит через центр Q вписанного шара и пересекает его по большому кругу, вписанному в прямоугольник $KILJ$, являющийся осевым сечением цилиндра (рис. 170). Поскольку стороны этого прямоугольника равны диаметру шара, то радиус основания цилиндра равен радиусу r шара, а высота цилиндра составляет $2r$. Поэтому $V = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$.

Тогда $V_{ш} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3} \cdot 2\pi r^3 = \frac{2}{3}V$.

О т в е т: $\frac{2}{3}V$.

Вписанным в шар конусом называется конус, вершина и окружность основания которого принадлежат соответствующей сфере (рис. 171).

Описанным около шара конусом называется конус, основание и все образующие которого касаются соответствующей сферы (рис. 172).

Пример 4. Шар описан около конуса объемом V. Найдем объем шара, учитывая, что осевое сечение конуса — равносторонний треугольник.

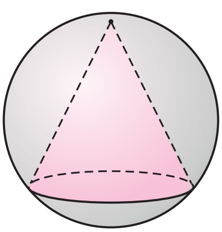

Рис. 171

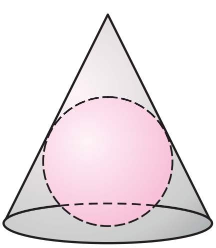

Рис. 172

Р е ш е н и е. Плоскость, проведенная через ось OO_1 конуса, проходит через центр Q описанного шара и пересекает его по большому кругу, описанному около равностороннего треугольника O_1AB, являющегося сечением конуса (рис. 173).

Пусть радиус шара равен r. Тогда радиус основания и высота конуса соответственно равны $\frac{r\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{3r}{2}$, а его объем:

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{3r}{2} = \frac{3\pi r^3}{8} = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{9}{32} = \frac{9}{32}V_{ш}.$$

Поэтому $V_ш = \frac{32}{9}V$.

О т в е т: $\frac{32}{9}V$.

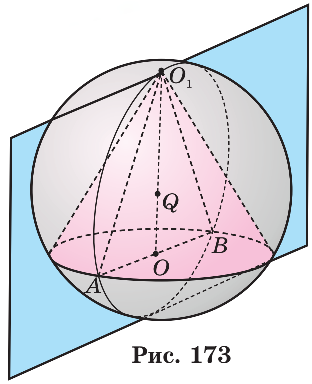

Рис. 173

Вписанным в шар усеченным конусом называется усеченный конус, окружности оснований которого принадлежат соответствующей сфере (рис. 174).

Описанным около шара усеченным конусом называется конус, основания и все образующие которого касаются соответствующей сферы (рис. 175).

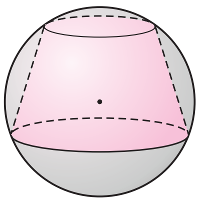
Рис. 174

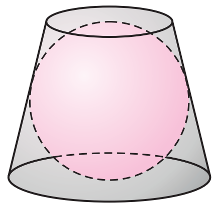
Рис. 175

Теорема 9. Около каждой треугольной пирамиды можно описать единственный шар.

Доказательство. Сначала обратим внимание на то, что геометрическое место точек, равноудаленных от концов отрезка, есть плоскость, проходящая через середину отрезка и перпендикулярная ему (рис. 176). Она называется *серединной плоскостью отрезка*.

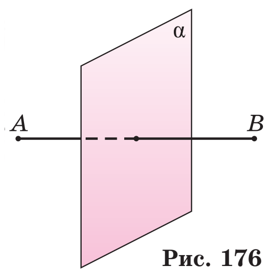

Рис. 176

Геометрическим местом точек, равноудаленных от вершин треугольника, является прямая, проходящая через центр описанной около треугольника окружности и перпендикулярная его плоскости (рис. 177).

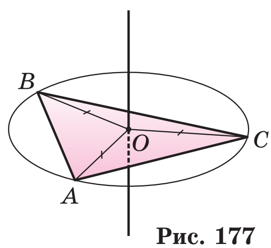

Рис. 177

Пусть есть треугольная пирамида $ABCD$ (рис. 178). Через центр O_1 окружности, описанной около грани ABC, проведем прямую l, перпендикулярную плоскости этой грани. Все точки прямой l равноудалены от вершин A, B, C. Построим серединную плоскость α отрезка AD, она пересечет прямую l в некоторой точке O. Вершины A и D равноудалены от точки O. А поскольку вершины A, B, C равноудалены от точки O, то все четыре вершины A, B, C, D равноудалены от точки O. Получили, что все вершины пирамиды $ABCD$ принадлежат сфере с центром O, а это

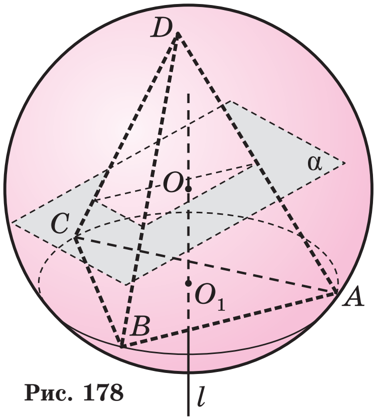

Рис. 178

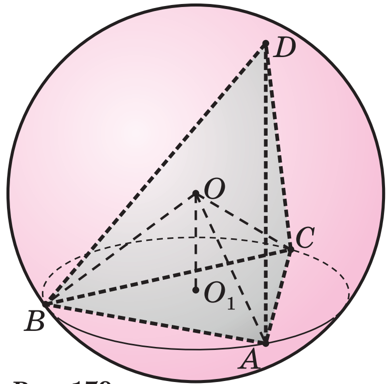

Рис. 179

означает, что шар с центром O и радиусом OA и есть шар, описанный около пирамиды $ABCD$.

Единственность найденного шара следует из того, что прямая l и ее точка O определяются однозначно.

Следствие 2. Четыре точки пространства, не лежащие в одной плоскости, определяют единственную сферу, единственный шар.

Пример 5. В треугольной пирамиде $ABCD$ $AB = AC = 10$, $BC = 12$, $AD = 30$ и $AD \perp (ABC)$. Найдем радиус шара, описанного около пирамиды $ABCD$.

Р е ш е н и е. Пусть OO_1 — перпендикуляр, опущенный из центра O описанного шара на плоскость ABC (рис. 179). Поскольку наклонные OA, OB, OC равны как радиусы шара, то равны и их проекции на плоскость ABC. Значит, $O_1A = O_1B = O_1C$. Поэтому O_1 — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Найдем последовательно площадь треугольника ABC по формуле Герона и радиус O_1A описанной окружности:

$$S_{ABC} = \sqrt{\frac{10+10+12}{2} \cdot \frac{10+10-12}{2} \cdot \frac{10-10+12}{2} \cdot \frac{10-10+12}{2}} = 48,$$

$$O_1A = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S_{ABC}} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 12}{4 \cdot 48} = \frac{25}{4}.$$

Поскольку $AD \parallel OO_1$, $OO_1 \perp O_1C$ и $OA = OD$, то $OO_1 = \frac{1}{2} AD = 15$.

Из прямоугольного треугольника AO_1O находим:

$$OA = \sqrt{OO_1^2 + O_1A^2} = \sqrt{15^2 + \left(\frac{25}{4}\right)^2} = \frac{65}{4}.$$

О т в е т: $\frac{65}{4}$.

Теорема 10. В каждую треугольную пирамиду можно вписать единственный шар.

Доказательство. Сначала обратим внимание на то, что геометрическим местом точек, равноудаленных от граней двугранного угла, является полуплоскость, граница которой совпадает с ребром данного угла и которая делит этот угол пополам (рис. 180). Она называется *биссекторной полуплоскостью угла*.

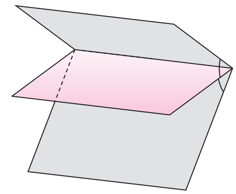

Рис. 180

Пусть есть треугольная пирамида $ABCD$ (рис. 181). Проведем биссекторные полуплоскости двугранных углов AB и AC. Луч l, по которому они пересекаются, состоит из тех точек пространства, которые находятся на одинаковых расстояниях от граней ABD и ABC, ABC и ACD, т. е. от трех граней ABD, ABC и ACD. Биссекторная полуплоскость двугранного угла CD пересекает луч l в некоторой точке O. Точка O находится на расстоянии r как от грани ACD, так и от грани BCD. Поэтому расстояние от точки O до каждой грани пирамиды $ABCD$ равно r. Это значит, что шар с центром O и радиусом r касается каждой грани пирамиды $ABCD$, он является вписанным в пирамиду $ABCD$.

Единственность найденного шара следует из того, что прямая l и ее точка O определяются однозначно.

Теорема 11. Объем описанного около шара многогранника равен третьей доле произведения полной поверхности многогранника и радиуса шара:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{полн}} \cdot r.$$

Доказательство*. Пусть есть многогранник, описанный около шара (рис. 182). Центр шара соединим со всеми вершинами многогранника. Если многогранник имеет n граней, то образуется n пирамид, для которых центр шара является общей вершиной, основания составляют поверхность

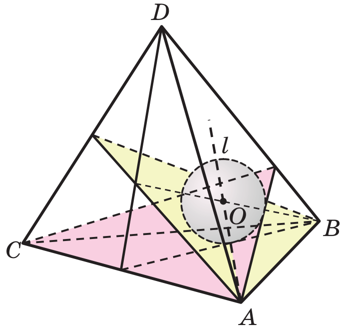

Рис. 181

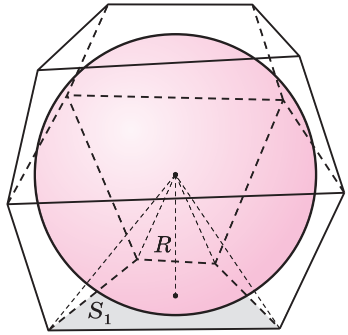

Рис. 182

многогранника, а сами пирамиды вместе составят многогранник. Основания высот этих пирамид совпадают с точками касания, поэтому сами высоты все равны радиусу r шара.

Пусть площади граней многогранника равны S_1, S_2, ..., S_n. Тогда для объема V многогранника, который равен сумме объемов пирамид, получим:

$$V = \frac{1}{3}S_1 \cdot r + \frac{1}{3}S_2 \cdot r + \ldots + \frac{1}{3}S_n \cdot r = \frac{1}{3}\left(S_1 + S_2 + \ldots + S_n\right) = \frac{1}{3}Sr,$$

где S — полная поверхность многогранника.

Пример 6. $ABCD$ — треугольная пирамида, в которой $AB = AC = 10$, $BC = 12$, $AD = 24$ и $AD \perp (ABC)$. Найдем радиус шара, вписанного в пирамиду $ABCD$.

Р е ш е н и е. Сначала определим полную поверхность и объем пирамиды $ABCD$.

Пусть AM — высота треугольника ABC (рис. 183). Поскольку $AB = AC$, то $BM = MC = 6$. Находим AM из прямоугольного треугольника ABM:

$$AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$$

Теперь $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AM = 48$,

$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot AD = 384$.

Прямоугольные треугольники ABD и ACD с равными катетами имеют одинаковые площади:

$$S_{ABD} = S_{ACD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD = 120.$$

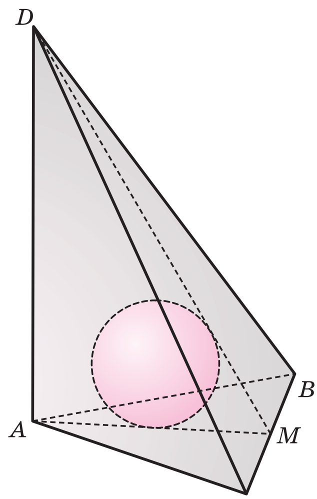

Рис. 183

Чтобы найти площадь треугольника BCD, учтем, что он проектируется в треугольник ABC и угол между плоскостями BCD и ABC измеряется углом AMD. Из прямоугольного треугольника AMD находим:

$$MD = \sqrt{AM^2 + AD^2} = \sqrt{8^2 + 24^2} = 8\sqrt{10}.$$

Поэтому $S_{BCD} = \dfrac{S_{ABC}}{\cos \angle AMD} = 48\sqrt{10}$. Значит:

$$S_{\text{полн}} = S_{ABC} + 2S_{ACD} + S_{BCD} = 48 + 120 + 120 + 48\sqrt{10} = 288 + 48\sqrt{10}.$$

Поэтому:

$$r = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\text{полн}}} = \frac{3 \cdot 384}{288 + 48\sqrt{10}} = \frac{12 \cdot \left(6 - \sqrt{10}\right)}{13}.$$

О т в е т: $\dfrac{12 \cdot \left(6 - \sqrt{10}\right)}{13}$.

1. Какое тело называется шаром и какая точка называется центром шара?

2. Какой отрезок называется радиусом шара; хордой шара; диаметром шара?

3. По какой фигуре пересекаются шар и плоскость?

4. Сформулируйте утверждение об объеме тела, полученного вращением треугольника вокруг прямой, которая лежит в плоскости треугольника, проходит через его вершину и не имеет с треугольником общих внутренних точек.

5. Чему равен объем шара?

6. Какой многогранник называется вписанным в шар; описанным около шара?

7. Какой шар называется вписанным в многогранник; описанным около многогранника?

8. Какой цилиндр называется вписанным в шар; описанным около шара?

9. Какой шар называется вписанным в цилиндр; описанным около цилиндра?

10. Какой конус называется вписанным в шар; описанным около шара?

11. Какой шар называется вписанным в конус; описанным около конуса?

12. Какой усеченный конус называется вписанным в шар; описанным около шара?

13. Какой шар называется вписанным в усеченный конус; описанным около усеченного конуса?

14. Какая плоскость называется серединной плоскостью отрезка; биссекторной плоскостью двугранного угла?

15. В какой точке находится центр шара, описанного около треугольной пирамиды; центр шара, вписанного в треугольную пирамиду?

16. Сколькими точками пространства определяется сфера?

17. Какой зависимостью связаны объем шара и поверхность описанного около него многогранника?

Задача 1. Точки A, B, C на поверхности шара выбраны так, что попарные расстояния между ними все равны $18\sqrt{3}$ см, а плоскость ABC проходит на расстоянии 24 см от центра O шара. Найдите радиус шара.

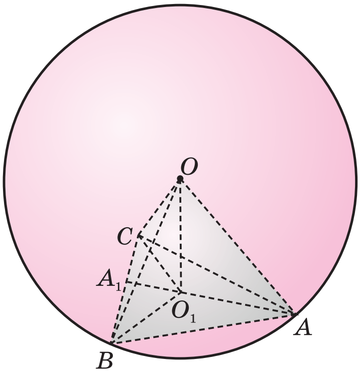

Рис. 184

Р е ш е н и е. Пусть O_1 — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на плоскость ABC (рис. 184). Тогда $O_1A = O_1B = O_1C$ как проекции равных наклонных — радиусов OA, OB, OC. Пусть AA_1 — высота треугольника ABC. Найдем радиус O_1A круга, описанного возле треугольника ABC:

$$O_1A = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{2}{3}AB\sin 60^\circ = \frac{2}{3}\cdot 18\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 18 \text{ (см)}.$$

Теперь из треугольника AOO_1 находим OA шара:

$$OA = \sqrt{O_1A^2 + O_1O^2} = \sqrt{18^2 + 24^2} = 30 \text{ (см)}.$$

О т в е т: 30 см.

Задача 2. Высота правильной шестиугольной призмы равна 10 см, а диагональ ее боковой грани — 14 см. Найдите объем описанного шара.

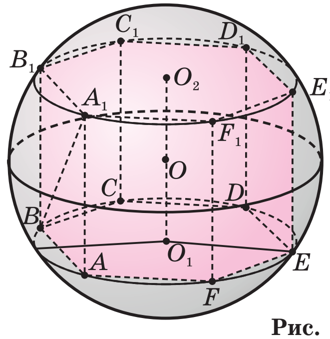

Рис. 185

Р е ш е н и е. Центр O шара, описанного около правильной призмы, находится на середине отрезка, соединяющего центры O_1 и O_2 оснований призмы (рис. 185). Поскольку $AB \perp AA_1$, то:

$$AB = \sqrt{A_1B^2 - A_1A^2} = \sqrt{14^2 - 10^2} = \sqrt{96} \text{ (см)}, \quad OO_1 = \frac{1}{2}O_1O_2 = 5 \text{ см}.$$

$\triangle O_1AB$ — правильный, поэтому $AO_1 = AB$. $OO_1 \perp O_1A$, поэтому:

$$r = OA = \sqrt{O_1O^2 + O_1A^2} = \sqrt{5^2 + 96} = 11 \text{ (см)}.$$

Значит, $V_{ш} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 11^3 = \frac{5324\pi}{3}$ (см^3).

О т в е т: $\frac{5324\pi}{3}$ см^3.

Задача 3. В шар вписан цилиндр, высота которого относится к радиусу основания как 3 : 2. Найдите, какую часть объема шара составляет объем цилиндра.

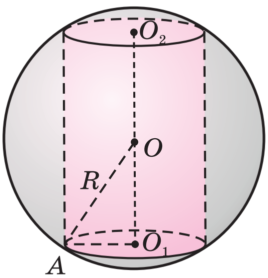

Рис. 186

Р е ш е н и е. Пусть в шар с центром O и радиусом R вписан цилиндр с осью O_1O_2 (рис. 186) и $O_1O_2 = 3k$. Тогда $O_1A = 2k$, $OO_1 = 1{,}5k$. $O_1O \perp O_1A$, поэтому, учитывая, что $O_1O^2 + O_1A^2 = OA^2$, получаем:

$$(1{,}5k)^2 + (2k)^2 = R^2, \text{ или } 2{,}5k = R.$$

Далее находим:

$$V_{ш} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (2{,}5k)^3 = \frac{62{,}5}{3}\pi k^3 = \frac{125}{6}\pi k^3,$$

$$V_{ц} = \pi \cdot O_1A^2 \cdot O_1O_2 = \pi(2k)^2 \cdot 3k = 12\pi k^3, \quad \frac{V_{ц}}{V_{ш}} = \frac{12\pi k^3}{\frac{125}{6}\pi k^3} = \frac{72}{125}.$$

О т в е т: $\frac{72}{125}$.

Задача 4. Образующая конуса равна l и составляет с плоскостью основания угол α. Найдите объем шара, вписанного в конус.

Р е ш е н и е. Плоскость, проведенная через ось BQ конуса, проходит через центр O вписанного шара и пересекает его по большому кругу, вписанному в равнобедренный треугольник ABC, который является сечением конуса (рис. 187).

Находим:

$$AQ = l \cdot \cos\alpha,\ \angle OAQ = \frac{1}{2} \cdot \angle BAQ = \frac{\alpha}{2},$$

$$OQ = AQ \operatorname{tg} \angle OAQ = l \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

$$V_ш = \frac{4}{3}\pi OQ^3 = \frac{4}{3}\pi l^3 \cdot \cos^3\alpha \cdot \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}.$$

О т в е т: $\frac{4}{3}\pi l^3 \cdot \cos^3\alpha \cdot \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}$.

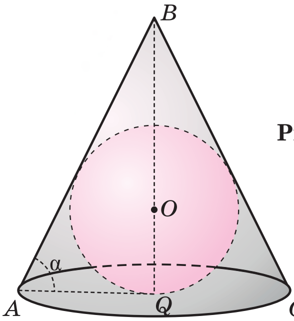

Рис. 187

281. Найдите геометрическое место:
а) середин равных хорд шара;
б) центров равных круговых сечений шара.

282. Учитывая, что V — объем шара с радиусом R, а S — площадь его поверхности, найдите:
а) S и V при $R = 8$ см; б) R и S при $V = 113{,}04$ см^3;
в) R и V при $S = 64\pi$ см^2.

283. Определите, во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в:
а) 3 раза; б) 5 раз; в) n раз.

284. Диаметр Луны составляет приблизительно четвертую долю диаметра Земли. Сравните объемы Луны и Земли.

285. Свинцовый шар, диаметр которого равен 20 см, переплавляется в шарики, диаметры которых в 10 раз меньше. Определите, сколько таких шариков получится.

286. Найдите радиус шара, объем которого равен объему:
а) цилиндра с высотой 10 см и радиусом 6 см;
б) конуса с высотой 20 см и радиусом основания 10 см.

287. Найдите высоту цилиндра, объем которого равен объему шара, учитывая, что радиус основания цилиндра равен 4 см, а радиус шара — 6 см.

288. В цилиндрическую мензурку диаметром 2,5 см, наполненную водой до определенного уровня, опускают 4 одинаковых металлических шарика с диаметром 1 см. Определите, на сколько изменится уровень воды в мензурке.

289. Найдите диаметр шара, учитывая, что при опускании в воду он становится легче на 39,6 кг.

290. Учитывая, что плотность меди 8,9 г/см^3, определите, будет ли плавать в воде пустой медный шар с диаметром 10 см и толщиной стенок:
а) 2 мм; б) 1,5 мм.

291. Есть четыре тела — куб, шар, цилиндр и конус, причем диаметры оснований цилиндра и конуса равны их высотам. Поверхности всех этих тел равны друг другу. Определите, какое из этих тел имеет наибольший объем и какое — наименьший.

292*. Сосуд имеет форму полушара с радиусом R, дополненного цилиндром. Определите, какой высоты должна быть цилиндрическая часть, чтобы сосуд имел объем V.

293*. Секущая плоскость разделяет шар на два тела (рис. 188), каждое из которых называется *шаровым сегментом*. Круг сечения называется *основанием сегмента*. Каждый из отрезков, на которые секущая плоскость разделяет перпендикулярный ей диаметр шара, называют *высотой* соответствующего *шарового сегмента*.
Две параллельные секущие плоскости разделяют шар на два шаровых сегмента и еще одно тело (рис. 189), которое называют *шаровым слоем*. Круги сечений называются *основаниями шарового слоя*. Перпендикуляр, опущенный из одной секущей плоскости к другой, называют *высотой шарового слоя*.

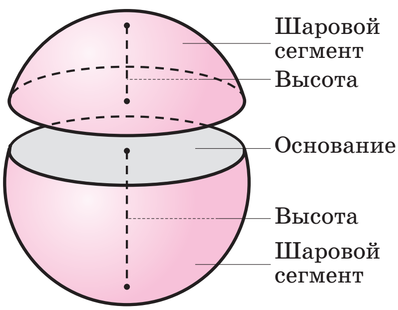

Рис. 188

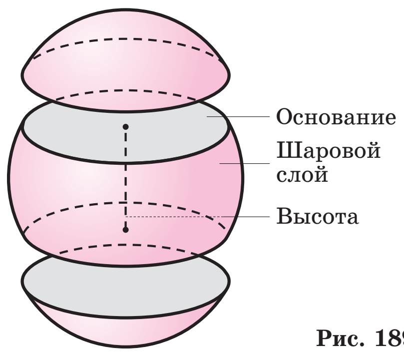

Рис. 189

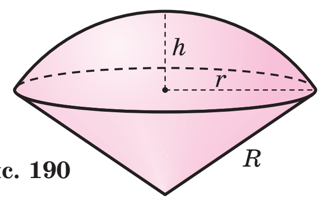

Рис. 190

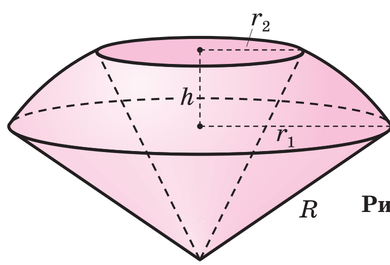

Рис. 191

Докажите, что:
а) объем V шарового сегмента с радиусом R и высотой h выражается формулой $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$ (рис.190);

б) объем V шарового слоя с радиусом R, радиусами оснований r_1 и r_2 и высотой h выражается формулой $V = \frac{1}{6}\pi h^2(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2)$ (рис. 191).

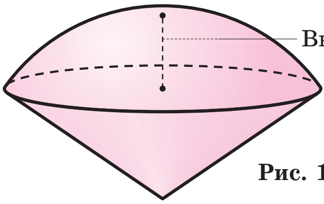

Рис. 192

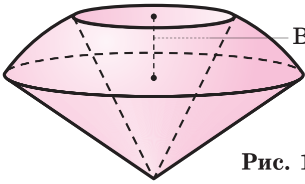

Рис. 193

294*. Тело, образованное вращением кругового сектора вокруг прямой, которая проходит через его центр, лежит в его плоскости и не имеет с ним общих внутренних точек, называется *шаровым сектором*. Шаровой сектор может быть двух видов, в зависимомти от того, принадлежит или нет оси вращения один из крайних радиусов кругового сектора. Первый из этих секторов ограничен куполом и конической поверхностью (рис. 192), второй — сферическим поясом и двумя коническими поверхностями (рис. 193). Высота купола для первого сектора или перпендикуляр, опущенный из плоскости основания одной конической поверхности на плоскость основания другой поверхности для второго купола, называется *высотой шарового сектора*. Докажите, что объем шарового сектора с радиусом R и высотой h выражается формулой:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

295*. Найдите объем шарового сектора, полученного вращением кругового сектора:
а) с углом в 30° и радиусом R вокруг одного из граничных радиусов;
б) с радиусом r и дугой в 120° вокруг прямой, которая проходит через центр сектора, лежит в его плоскости и составляет с крайними радиусами углы в 30°.

296*. Учитывая, что плоскость, перпендикулярная диаметру шара, делит этот диаметр на части:
а) в отношении 3 : 1, найдите отношение объемов полученных шаровых сегментов;
б) 3 см и 9 см, найдите объемы полученных шаровых сегментов.

297*. Определите, сколько кубометров земли понадобится для того, чтобы сделать клумбу, имеющую форму шарового сегмента с радиусом основания 5 м и высотой 60 см.

298*. Найдите объем шарового слоя, который образуется, если в шаре с радиусом:
а) 13 см по разные стороны от его центра провести два равных параллельных сечения с радиусом 5 см;
б) r провести два параллельных сечения, из которых одно проходит через центр, а другое делит поверхность шара в отношении 1 : 3.

299*. Два равных шара расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Найдите отношение объема их общей части к объему одного шара.

300*. Радиусы поверхностей двояковыпуклой линзы равны 113 мм, а ее толщина — 30 мм. Найдите объем линзы.

301*. В шаре радиусом 60 мм просверлено цилиндрическое отверстие диаметром 30 мм, ось которого проходит через центр шара. Найдите объем образованного тела.

302*. Полукруг с радиусом r, разделенный двумя радиусами на три доли, вращается вокруг диаметра. Найдите объемы тел, полученных при вращении каждой доли.

303. Найдите объем шарового сектора, дуга осевого сечения которого равна α, а:
а) радиус шара — r; б) его высота — h.

304. Диаметр шара равен 30 см и является осью цилиндра, у которого радиус основания равен 12 см. Найдите объем части шара, заключенной внутри цилиндра.

305. Докажите, что:
а) геометрическое место точек, равноудаленных от концов отрезка, есть серединная плоскость;
б) геометрическое место точек, равноудаленных от вершин треугольника, есть прямая, которая проходит через центр описанной около треугольника окружности и перпендикулярна его плоскости;
в) три серединные плоскости сторон треугольника пересекаются по одной прямой, которая проходит через центр описанной около треугольника окружности и перпендикулярна его плоскости;
г) три биссекторные полуплоскости двугранных углов при одной вершине треугольной пирамиды пересекаются по одной прямой.

306. Докажите, что:
а) около любого цилиндра можно описать шар;
б) в цилиндр можно вписать шар тогда и только тогда, когда осевое сечение цилиндра является квадратом;
в) около любого конуса можно описать шар;
г) в любой конус можно вписать шар;
д) около любого усеченного конуса можно описать шар;
е) в усеченный конус можно вписать шар тогда и только тогда, когда в осевое сечение конуса можно вписать окружность, или если образующая конуса равна сумме радиусов его оснований, или если высота конуса равна среднему геометрическому диаметров его оснований;
ж) около любого прямоугольного параллелепипеда можно описать шар;
з) около прямой призмы можно описать шар тогда и только тогда, когда около основания многоугольника можно описать окружность.

307. Осевым сечением цилиндра является квадрат. Докажите, что:
а) центры вписанного в цилиндр и описанного около него шаров, совпадают и лежат на оси цилиндра;
б) боковая поверхность цилиндра равна поверхности вписанного в него шара;
в) полная поверхность цилиндра относится к поверхности вписанного в него шара как 3 : 2;
г) объем цилиндра относится к объему вписанного в него шара как 3 : 2.

308. Докажите, что:
а) центр шара, вписанного в цилиндр, является центром симметрии цилиндра;

б) центр шара, описанного около произвольного цилиндра, является центром его симметрии.

309. Докажите, что:
а) центры вписанного в конус и описанного около него шаров лежат на оси конуса;
б) отношение объема конуса к объему вписанного в конус шара равно отношению их поверхностей;
в) центры шаров, вписанного в усеченный конус и описанного около него, не совпадают;
г) отношение поверхности шара к полной поверхности описанного около него усеченного конуса равно отношению их объемов.

310. Около шара с радиусом r описан прямоугольный параллелепипед. Определите его вид и найдите объем.

311. Найдите радиус шара, описанного около прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны 6 см, 9 см, 18 см.

312. Около шара описана прямая треугольная призма, основанием которой является равнобедренный треугольник с боковой стороной a и углом при вершине α. Найдите высоту призмы.

313. Найдите диаметр шара, описанного около правильной треугольной призмы, учитывая, что боковое ребро призмы равно 4 см, а ребро основания — 6 см.

314. В шар вписана прямая призма, в основании которой лежит прямоугольный треугольник с катетами 18 см и 24 см. Найдите объем призмы, учитывая, что радиус шара равен 39 см.

315. В шар с радиусом r вписана правильная шестиугольная призма, все ребра которой равны друг другу. Найдите ребро призмы.

316. В шар с радиусом R вписана правильная четырехугольная призма, диагональ которой составляет с боковой гранью угол α. Найдите ее объем.

317. В шар с радиусом r вписан многогранник, состоящий из семи кубов, один из которых имеет общий центр с шаром, а каждый из остальных — общую грань с этим кубом и четыре вершины на поверхности шара. Найдите ребро куба.

318. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, в котором два шара с радиусом r расположены так, что каждый касается другого шара и пяти граней параллелепипеда.

319. Докажите, что:
а) если в правильную призму можно вписать шар, то центром шара является середина отрезка, соединяющего центры оснований призмы;

б) в пирамиду с одинаковыми двугранными углами при основании можно вписать шар.

320. В шар вписан цилиндр, у которого угол между диагоналями осевого сечения равен α, а образующая — l. Найдите объем шара.

321. Есть два цилиндра, осевыми сечениями которых являются квадраты, причем один из них описан около шара, а другой вписан в этот шар. Найдите отношение их объемов.

322. Докажите, что:
а) цилиндр или конус, ось которого проходит через центр шара, пересекает его поверхность по окружности;
б) около любой правильной пирамиды можно описать шар;
в) в любую правильную пирамиду можно вписать шар.

323. Найдите объем шара, вписанного в конус, образующая которого равна:
а) b и равна диаметру основания конуса;
б) a и составляет с плоскостью основания угол δ.

324. В конус с углом α при вершине осевого сечения и радиусом основания r вписан шар с радиусом R. Найдите:
а) r как функцию R и α; б) R как функцию r и α;
в) α как функцию R и r.

325. В конус с радиусом основания r и образующей l, вписан шар. Найдите длину линии, по которой шар касается боковой поверхности конуса.

326. Шар с радиусом R вписан в усеченный конус. Угол наклона образующей к плоскости нижнего основания конуса равен α. Найдите радиусы оснований и образующую усеченного конуса.

327. Образующая конуса равна l и составляет с плоскостью основания угол α. Найдите поверхность и объем описанного шара.

328. В шар вписан конус. Докажите, что радиус шара равен $\dfrac{h^2+r^2}{2h}$, где h — высота конуса, r — радиус его основания.

329. Найдите радиус шара, описанного около треугольной пирамиды, все ребра которой равны a.

330. Найдите радиусы вписанного в правильную четырехугольную пирамиду и описанного около нее шаров, учитывая, что сторона основания пирамиды равна a и:
а) плоский угол при вершине — α;
б) двугранный угол при основании — $60°$.

331. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно 20 см, а радиус шара, описанного около пирамиды, — 12,5 см. Найдите объем пирамиды.

332. Найдите объем шара, вписанного в:
а) правильную шестиугольную пирамиду, сторона основания которой равна a, а боковое ребро — b;
б) пирамиду, учитывая, что ее основанием служит ромб со стороной a, острым углом α и двугранными углами β при основании.

333. Найдите радиус шара, который:
а) описан около правильной треугольной пирамиды, апофема которой равна a и составляет с плоскостью основания угол α;
б) вписан в правильную четырехугольную пирамиду со стороной основания 26 см и высотой 16 см.

334. В правильную четырехугольную пирамиду, сторона основания которой равна 4 см, вписан шар. Найдите объем пирамиды, учитывая, что радиус шара равен 1 см.

335. Определите объем шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, учитывая, что центр шара:
а) отстоит от вершины пирамиды на a, а от бокового ребра — на b;
б) делит высоту пирамиды в отношении 5 : 3, если считать от вершины, а сторона основания пирамиды равна a.

336. В шар с радиусом R вписана пирамида, основанием которой является равнобедренный треугольник с углом α при вершине, а каждое боковое ребро составляет с основанием угол в $60°$. Найдите ее объем.

337. В пирамиду, основанием которой является ромб со стороной a и углом α, вписан шар. Найдите объем шара, учитывая, что две боковые грани перпендикулярны основанию, а две другие наклонены к нему под углом β.

338. Найдите поверхность и объем шара, описанного около пирамиды, основанием которой является:
а) прямоугольный треугольник с гипотенузой 2, и каждое боковое ребро составляет с основанием угол α;
б) прямоугольник с диагональю 10, и боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом β.

339. Найдите поверхность и объем шара, описанного около:
а) правильной четырехугольной усеченной пирамиды, у которой стороны оснований 14 дм и 2 дм, а боковое ребро наклонено к основанию под углом в $45°$;
б) пирамиды, у которой основанием является прямоугольник со стороной a и углом между этой стороной и диагональю основания — α, а каждое ребро пирамиды составляет с основанием угол в $60°$.

340. Найдите поверхность и объем шара, описанного около правильной треугольной усеченной пирамиды, у которой высота равна 17 см, а радиусы окружностей, описанных около основания, — 5 см и 12 см.

341. Найдите поверхность и объем шара, описанного около правильной четырехугольной усеченной пирамиды, у которой боковое ребро равно 14 см, а ребра оснований — $5\sqrt{2}$ см и $12\sqrt{2}$ см.

342*. Шар касается всех ребер треугольной пирамиды. Найдите его радиус, учитывая, что все ребра пирамиды равны a.

343. Квадрат со стороной a является основанием пирамиды, две боковые грани которой перпендикулярны плоскости основания. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду, учитывая, что большее боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α.

344*. В треугольную пирамиду с высотами h_1, h_2, h_3, h_4 вписан шар с радиусом R. Докажите, что $\frac{1}{R}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}$.

345*. Докажите, что:

а) объем конуса равен третьей доле произведения его полной поверхности и радиуса вписанного шара;

б) если конусы описаны около шара, то их объемы пропорциональны площадям поверхностей.

346*. Докажите, что если около шара описать цилиндр и конус, осевые сечения которых есть правильные многоугольники, то:

а) объем цилиндра является средним геометрическим объемов шара и конуса;

б) площади их поверхностей образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2.

347*. В конус вписан цилиндр, полная поверхность которого равна боковой поверхности конуса. Наибольший угол между образующими конуса — прямой. Докажите, что вершина конуса отстоит от верхнего основания цилиндра на половину образующей конуса.

348*. Из шарового сегмента вырезан конус, имеющий с ним общие основание и высоту. Найдите объем оставшейся части сегмента, учитывая, что дуга осевого сечения сегмента равна α, а радиус дуги — R.

349*. В шаровой сегмент, дуга осевого сечения которого равна α, вписан шар с объемом V. Найдите разность объемов сегмента и шара.