§ 7. Правильные многогранники

А) Пусть есть плоский многоугольник $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$. Вне плоскости этого многоугольника выберем произвольно точку S и проведем лучи через нее и все точки сторон многоугольника $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$. Эти лучи образуют определенную поверхность (рис. 194), разделяющую пространство на две области. Ту из областей, которая не содержит целиком никакой прямой, называют *многогранным углом*. Точку S называют *вершиной* многогранного угла, плоские углы A_1SA_2, A_2SA_3, ..., $A_{n-1}SA_n$, A_nSA_1 — *гранями*, а лучи SA_1, SA_2, ..., SA_n — *ребрами* многогранного угла (рис. 195).

Многогранный угол называется *выпуклым*, если он расположен по одну сторону от плоскости любой его грани. Многогранный угол на рис. 196 — выпуклый, а на рис. 197 — невыпуклый. По количеству граней многогранные углы разделяют на *трехгранные*, *четырехгранные* и т. д.

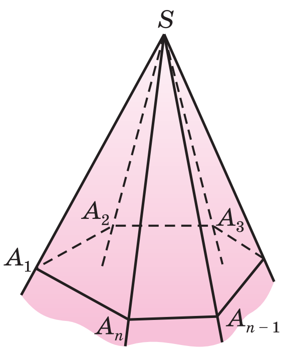

Рис. 194

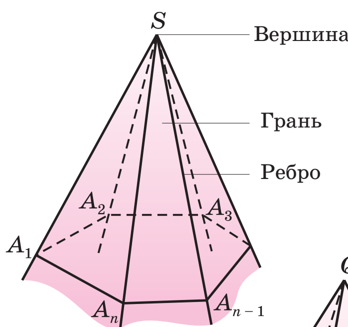

Рис. 195

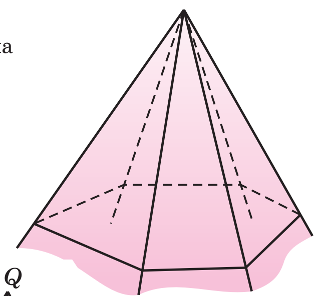

Рис. 196

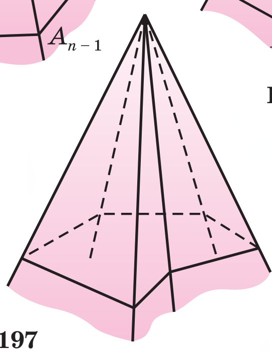

Рис. 197

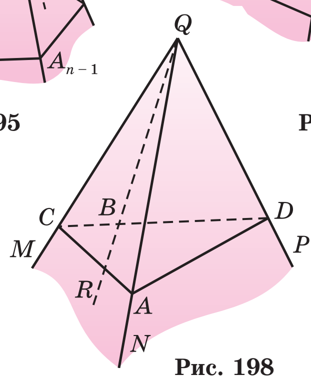

Рис. 198

Теорема 12. Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360°.

Доказательство. Установим сначала, что каждый плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других его углов.

Пусть есть трехгранный угол $QMNP$ (рис. 198). Пусть для определенности угол MQP — больший из плоских углов трехгранного угла. В плоскости грани MQP от луча QP отложим угол PQR, равный углу PQN,

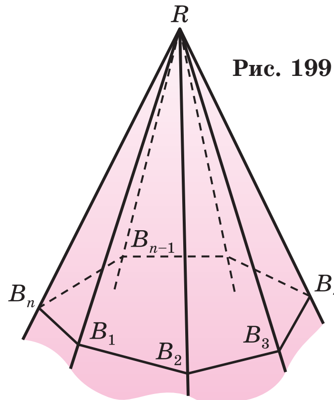

Рис. 199

и на лучах QN и QR отложим равные отрезки QA и QB. Через прямую AB проведем такую плоскость, которая пересекает ребра QM и QP в некоторых точках C и D. Треугольники AQD и BQD равны, так как у них сторона QD общая и по построению равны углы BQD и AQD, а также стороны BQ и AQ. Значит, $DB = DA$. Далее, по свойству сторон треугольника, получаем $DC < AC + DA$, или $DB + BC < AC + DA$, или $BC < AC$. Теперь, поскольку у треугольников BQC и AQC сторона QC общая, стороны BQ и AQ равны, но $BC < AC$, то $\angle BQC < \angle AQC$. Прибавив к левой и правой частям этого неравенства соответственно углы BQD и AQD, которые равны друг другу, получим, что:

$$\angle BQC + \angle BQD < \angle AQC + \angle AQD,$$

$$\angle CQD < \angle AQC + \angle AQD.$$

Пусть теперь есть выпуклый многогранный угол с вершиной R (рис. 199). Если пересечь его какой-либо плоскостью, то в сечении получим многоугольник $B_1B_2B_3...B_{n-1}B_n$, каждая вершина которого является вершиной трехгранного угла, образованного двумя гранями данного угла и секущей плоскостью. По доказанному для этих трехгранных углов получаем:

$$\angle B_nB_1B_2 < \angle B_nB_1R + \angle B_2B_1R;$$
$$\angle B_1B_2B_3 < \angle B_1B_2R + \angle B_3B_2R;$$
$$\angle B_2B_3B_4 < \angle B_2B_3R + \angle B_4B_3R;$$
$$...$$
$$\angle B_{n-1}B_nB_1 < \angle B_{n-1}B_nR + \angle B_1B_nR.$$

Сложим покомпонентно эти неравенства:

$$\angle B_nB_1B_2 + \angle B_1B_2B_3 + \angle B_2B_3B_4 + ... + \angle B_{n-1}B_nB_1 <$$
$$< (\angle B_nB_1R + \angle B_1B_2R + \angle B_2B_3R + ... + \angle B_{n-1}B_nR) +$$
$$+ (\angle B_2B_1R + \angle B_3B_2R + \angle B_4B_3R + ... + \angle B_1B_nR).$$

Теперь обратим внимание на то, что сумма в левой части последнего неравенства есть сумма углов многоугольника $B_1B_2B_3...B_{n-1}B_n$, которая равна $180° \cdot (n-2)$, а в правой — сумма углов всех треугольников B_1RB_2, B_2RB_3, B_3RB_4, ..., $B_{n-1}RB_n$ и B_nRB_1, но без их углов при вершине R, которая равна $180° \cdot n - S$, где S выражает сумму плоских углов данного многогранного угла. Таким образом, $180° \cdot (n-2) < 180° \cdot n - S$, отсюда $S < 360°$.

Б) Многогранник, у которого все грани являются равными правильными многоугольниками и все двугранные углы равны друг другу, называется **правильным многогранником.**

Из этого определения следует, что *у правильного многогранника равны друг другу все его*:

- *плоские углы*;
- *многогранные углы*;
- *ребра*.

Теорема 13. Количество ребер, сходящихся в каждой вершине правильного многогранника, не больше пяти.

Доказательство. Допустим, что это не так, т. е. в вершине многогранника сходится шесть или больше ребер. Тогда при этой вершине многогранник имел бы шесть или больше равных плоских углов. Учитывая, что сумма этих углов меньше 360°, получаем, что каждый из них меньше 60°. Но это невозможно, поскольку гранями правильного многогранника являются правильные многоугольники, а в них углы не меньше 60°.

Теорема 14. Количество сторон правильного многоугольника, являющегося гранью правильного многогранника, не больше пяти.

Доказательство. В каждой вершине правильного многогранника сходится не менее трех плоских углов, поэтому каждый из них должен быть меньше 120°. Вместе с этим угол правильного шестиугольника равен 120°, а угол правильного многоугольника с бóльшим количеством сторон больше 120°. Поэтому правильные многоугольники, количество сторон которых больше пяти, не могут быть гранями правильного многоугольника.

Теорема 15. Есть пять типов правильных многогранников.

Доказательство. В соответствии с теоремой **14** гранями многогранника могут быть правильные треугольники, четырехугольники или пятиугольники.

Если гранями правильного многогранника служат треугольники, то, с учетом теоремы **13**, в вершинах многогранника могут сходиться три, четыре или пять ребер. Если гранями правильного многогранника служат четырехугольники или пятиугольники, то в вершинах многогранника может сходиться только три ребра. Значит, существует не более пяти видов правильных многогранников.

Чтобы убедиться, что такие виды многогранников существуют, достаточно указать способ построения каждого из них.

Прежде всего отметим, что правильный многогранник, гранями которого служат правильные четырехугольники, т. е. квадраты, является *кубом*, который еще называют *правильным гексаэдром*. Куб можно построить так. В произвольно выбранной плоскости построить квадрат, через его

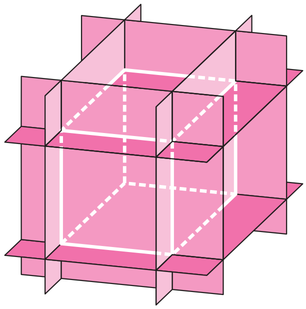

Рис. 200

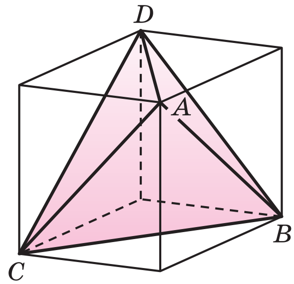

Рис. 201

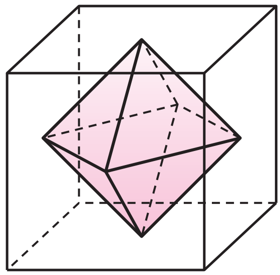

Рис. 202

стороны провести плоскости, перпендикулярные выбранной плоскости, и еще одну плоскость, параллельную выбранной плоскости и отстоящую от нее на сторону квадрата (рис. 200). Мы видим, что гексаэдр имеет 6 граней, 12 ребер и 8 вершин.

Построение многогранника, в каждой вершине которого сходятся три треугольные грани, может быть таким. Построить куб. Выбрать одну из его вершин A и в каждой грани с этой вершиной выбрать вершину, противолежащую вершине A. Пусть это вершины B, C, D. Точки A, B, C, D являются вершинами искомого многогранника (рис. 201). Действительно, каждый из отрезков AB, AC, AD, BC, CD, DB является диагональю одной из граней куба, поэтому все эти отрезки равны друг другу. Получается, что в треугольной пирамиде $ABCD$ все грани являются правильными треугольниками. Такая пирамида называется *правильным тетраэдром*. Тетраэдр имеет 4 грани, 6 ребер и 4 вершины.

Построенне многогранника, в каждой вершине которого сходятся четыре треугольные грани, может быть таким. Построить куб и найти центры шести его граней (рис. 202). Эти точки являются вершинами многогранника, все грани которого — правильные треугольники. Такой многогранник называется *правильным октаэдром*. Октаэдр имеет 8 граней, 12 ребер и 6 вершин.

Построение многогранника, в каждой вершине которого сходятся три пятиугольные грани, можно выполнить, снова используя куб. Если через каждое из двенадцати ребер куба провести плоскость, которая не имеет с поверхностью куба других общих точек, кроме точек этого ребра, то полученные 12 плоскостей при пересечении дадут грани некоторого многогранника. Можно так подобрать наклон этих плоскостей к граням куба, что грани этого двенадцатигранника будут правильными пятиугольниками (рис. 203). Такой многогранник называется *правильным додекаэдром*. Додекаэдр имеет 12 граней, 30 ребер и 20 вершин.

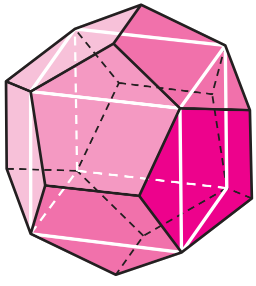

Рис. 203

Наконец, многогранник, в каждой вершине которого сходятся пять треугольных граней, можно построить, используя додекаэдр, именно центры граней додекаэдра являются вершинами искомого правильного многогранника (рис. 204).

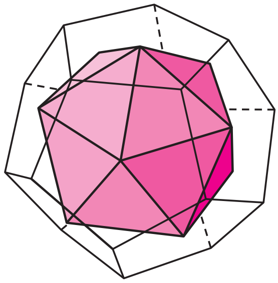

Рис. 204

Такой многогранник называется *правильным икосаэдром*. Икосаэдр имеет 20 граней, 30 ребер и 12 вершин. Таким образом, есть пять типов правильных многогранников.

Названия правильных многогранников происходят из греческого языка. Термин *тетраэдр*, по-гречески τετραεδρον, означает *четырехгранник*: τετρα — четыре и εδρα — грань. Соответственно термины *гексаэдр*, *октаэдр*, *додекаэдр*, *икосаэдр* по-гречески εξαεδρον, οκταεδρον, δωδεκαεδρον, εικοσαεδρον означают *шестигранник*, *восьмигранник*, *двенадцатигранник*, *двадцатигранник*: εξ — шесть, οκτα — восемь, δωδεκα — двенадцать, εικοσι — двадцать.

Мы знаем, что правильные гексаэдр и тетраэдр имеют описанный и вписанный шары. Точно так же описанный и вписанный шары имеют октаэдр, додекаэдр и икосаэдр. Центры этих шаров совпадают, и эта точка является центром симметрии соответствующего правильного многогранника, кроме тетраэдра, который не имеет центра симметрии.

Пример 1. Найдем радиус шара, описанного около правильного октаэдра с ребром a.

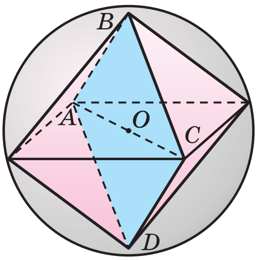

Рис. 205

Р е ш е н и е. Поскольку правильный октаэдр — фигура симметричная, имеет плоскости симметрии, оси симметрии и центр симметрии, то центр O шара, описанного около правильного октаэдра, находится в центре его симметрии (рис. 205). Этой точкой является середина отрезка AC, соединяющая две противоположные вершины. Рассмотрим сечение $ABCD$ октаэдра плоскостью, которая является плоскостью симметрии и проходит через четыре вершины октаэдра. Этим сечением является правильный четырехугольник, т. е. квадрат. Центр описанного около октаэдра шара есть центр квадрата-сечения, вершины квадрата — вершины октаэдра, которые располагаются на поверхности описнного шара. Поэтому радиус R шара, описанного около правильного октаэдра с ребром a, равен половине диагонали квадрата со стороной a, т. е. $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

О т в е т: $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

?

1. Как образуется многогранный угол?

2. Какую точку называют вершиной, какой угол называют гранью и какой луч называют ребром многогранного угла?

3. На какие виды разделяются многогранные углы по количеству их граней?

4. Каким отношением связаны плоские углы многогранного угла?

5. Какому условию удовлетворяет сумма плоских углов многогранного угла?

6. Какой многогранник называется правильным?

7. Каким отношением связаны плоские углы правильного многогранника; многогранные углы правильного многогранника; ребра правильного многогранника?

8. Какому условию удовлетворяет количество ребер, сходящихся в вершине правильного многогранника; количество сторон грани правильного многогранника?

9. Какой правильный многогранник называется тетраэдром; гексаэдром; октаэдром; додекаэдром; икосаэдром?

10. Сколько граней, сколько ребер, сколько вершин имеет тетраэдр; гексаэдр; октаэдр; додекаэдр; икосаэдр?

Задача. Найдите радиус шара, вписанного в правильный октаэдр с ребром a.

Р е ш е н и е. Если в многогранник вписан шар, то объем V этого многогранника, площадь S_n его полной поверхности и радиус r вписанного шара связаны равенством $V = \frac{1}{3}S_n \cdot r$. Объем правильного октаэдра равен сумме объемов двух равных правильных четырехугольных пирамид, из которых его можно составить.

Найдем объем такой пирамиды $BADCE$ (рис. 206), учитывая, что каждое ее ребро равно a. Поскольку основание $ADCE$ пирамиды является плоскостью симметрии правильного октаэдра, а вершины пирамид, из которых октаэдр составлен, симметричны друг другу, то высота BO пирамиды равна $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (см. пример 1). Площадь основания пирамиды как площадь квадрата со стороной a равна a^2.

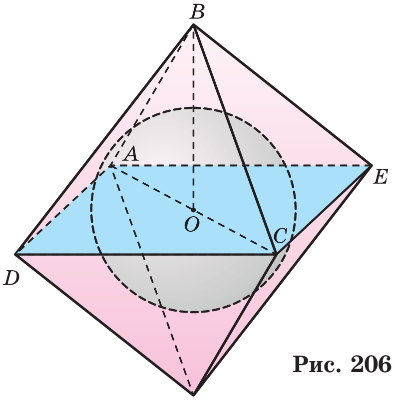

Рис. 206

Поэтому для объема V_1 одной пирамиды-части получаем $V_1 = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$, а для объема V правильного октаэдра — $V = 2V_1 = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Поверхность правильного октаэдра состоит из восьми правильных треугольников с ребром a. Поэтому для площади S_n полной поверхности правильного октаэдра будем иметь:

$$S_n = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}a^2. \text{ Значит, } r = \frac{3V}{S_n} = \frac{3 \cdot \frac{a^3\sqrt{2}}{3}}{2\sqrt{3}a^2} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Ответ: $\frac{a}{\sqrt{6}}$.

350*. Докажите, что:

а) если все плоские углы трехгранного угла прямые, то и все двугранные углы также прямые;

б) если два плоских угла трехгранного угла прямые, то и противолежащие им двугранные углы также прямые.

351*. Трехгранный угол, плоские углы которого прямые, пересечен плоскостью. Докажите, что ортоцентр сечения является основанием перпендикуляра, проведенного из вершины угла на секущую плоскость.

352*. Ребра трехгранного угла с вершиной S, плоские углы которого прямые, пересекает плоскость α в точках A, B, C. Докажите, что:

а) площадь каждого из треугольников SAB, SAC, SBC есть среднее геометрическое площади проекции этого треугольника на плоскость α и площади треугольника ABC;

б) сумма квадратов площадей треугольников SAB, SAC, SBC равна квадрату площади треугольника ABC.

353*. Докажите, что у трехгранного угла пересекаются по одной прямой три его:

а) биссекторные плоскости двугранных углов;

б) плоскости, каждая из которых проходит через биссектрису плоского угла и перпендикулярна его плоскости;

в) плоскости, каждая из которых проходит через ребро и биссектрису противолежащего плоского угла;

г) плоскости, каждая из которых проходит через ребро и перпендикулярна противолежащей грани.

354*. Трехгранный угол пересекается параллельными плоскостями. Найдите геометрическое место:

а) ортоцентров полученных треугольников;

б) центроидов полученных треугольников;

в) центров окружностей, описанных около полученных треугольников.

355. Склейте правильный:

а) тетраэдр по его развертке, изображенной на рисунке 207;

б) гексаэдр по его развертке, изображенной на рисунке 208;

в) октаэдр по его развертке, изображенной на рисунке 209;

г) додекаэдр по его развертке, изображенной на рисунке 210;

д) икосаэдр по его развертке, изображенной на рисунке 211.

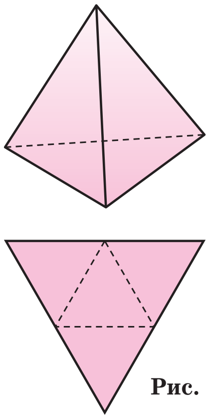

Рис. 207

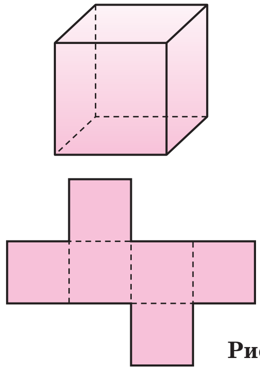

Рис. 208

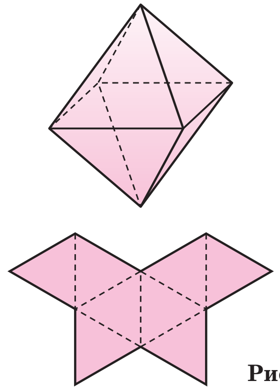

Рис. 209

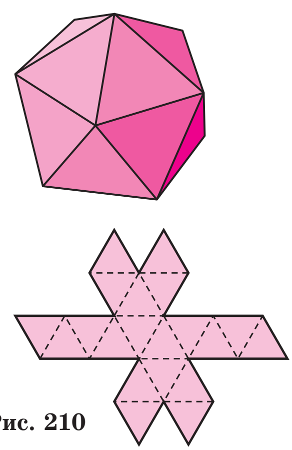

Рис. 210

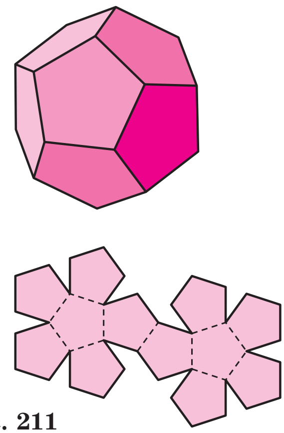

Рис. 211

356. Два одинаковых правильных тетраэдра приставлены друг к другу равными гранями. Является ли полученный многогранник правильным?

357. От каждой вершины правильного тетраэдра с ребром 2 отсекают правильный тетраэдр с ребром 1. Определите вид полученного тела.

358. Ребро куба равно a. Найдите радиус шара:
а) вписанного в куб; б) описанного около куба.

359. Докажите, что:
а) около куба можно описать и в куб можно вписать шар;
б) около правильного тэтраэдра можно описать и в него можно вписать шар;
в) около правильного октаэдра можно описать и в него можно вписать шар.

360. Найдите радиус шара:
а) вписанного в правильный тетраэдр с ребром a;
б) описанного около правильного тетраэдра с ребром a.

361. Радиус шара равен R. Найдите полную поверхность описанного около шара многогранника, учитывая, что этот многогранник является:
а) кубом; б) правильным октаэдром; в) правильным тетраэдром.

362. Укажите, сколько центров симметрии имеет:
а) отрезок;
б) параллелепипед;
в) пара пересекающихся плоскостей;
г) правильная треугольная призма;
д) шестиугольная призма;
е) куб;
ж) правильный тетраэдр;
з) правильный октаэдр;
и) правильный додекаэдр;
к) правильный икосаэдр.

363. Укажите, сколько осей симметрии имеет:
а) отрезок;
б) правильный треугольник;
в) правильный шестиугольник;
г) куб;
д) правильный тетраэдр;
е) правильный октаэдр.

364. Укажите, сколько плоскостей симметрии имеет:
а) четырехугольная призма;
б) правильная шестиугольная призма;
в) треугольная пирамида;
г) правильный тетраэдр;
д) куб;
е) правильный октаэдр;
ж) правильный додекаэдр;
з) правильный икосаэдр.

365. Найдите площадь сечения куба с ребром a, проходящего через диагонали двух его граней. Рассмотрите все случаи.

366. Концы диагоналей D_1A, D_1C и D_1B_1 граней куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соединены отрезками. Докажите, что многогранник D_1ABB_1 — правильный тетраэдр, и найдите отношение площадей поверхности куба и тетраэдра.

367. Найдите угол между ребрами правильного октаэдра, которые имеют общую вершину и не принадлежат одной грани.

368. Найдите двугранный угол:
а) правильного тетраэдра; б) правильного октаэдра.

369. Ребро правильного тетраэдра $PQUV$ равно q. Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью, которая проходит через центр грани QUV и:
а) параллельна грани UPV; б) перпендикулярна ребру QP.

370. Докажите, что отрезки, соединяющие центры граней правильного тетраэдра, равны друг другу.

371. В правильном тетраэдре h — высота, l — ребро, а k — расстояние между центрами его граней. Выразите:
а) l через h; б) k через l.

372. Ребро правильного октаэдра равно a. Найдите расстояние между:
а) двумя его противолежащими вершинами;
б) центрами двух смежных граней;
в) противолежащими гранями.

373. Докажите, что центры граней правильного:
а) октаэдра являются вершинами куба;
б) тетраэдра являются вершинами другого правильного тетраэдра;
в) куба являются вершинами правильного октаэдра;
г) додекаэдра являются вершинами правильного икосаэдра;
д) икосаэдра являются вершинами правильного додекаэдра.

374. Докажите, что двугранный угол правильного тетраэдра вместе с двугранным углом правильного октаэдра составляет $180°$.

375. Вершина каждой грани правильного тетраэдра соединена с серединой высоты, проведенной к этой грани. Докажите, что полученные отрезки попарно перпедикулярны.

376. Докажите, что в правильном октаэдре:
а) противолежащие ребра параллельны;
б) противолежащие грани параллельны;
в) расстояния между противолежащими гранями равны;
г) периметр сечения, параллельного грани, — величина постоянная.

377. Ребро правильного октаэдра равно a. Найдите расстояние между центрами двух его граней. Рассмотрите все возможные случаи.

378. В цилиндр, высота которого равна h, вписан такой октаэдр, что две его вершины являются центрами оснований цилиндра. Определите, при каких условиях октаэдр будет правильным, и найдите его ребро.

379. Докажите, что для любого выпуклого многогранника сумма количества граней и вершин на 2 больше количества ребер (теорема Эйлера).