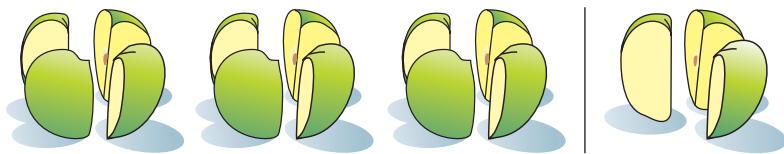


§ 2. Деление и дроби. Основное свойство дроби

При решении задач на деление натуральных чисел не всегда можно получить частное от деления двух чисел без остатка. Дробные числа позволяют записать точный результат деления двух натуральных чисел и в случае, когда деление нацело не выполняется.

Задача 1. Как разделить 3 одинаковых яблока поровну между четырьмя друзьями?



Решение.

Так как число 3 не делится нацело на 4, то можно разделить каждое яблоко на 4 равные части и одну часть от каждого из трёх яблок дать каждому из четырёх друзей. Каждый получит:

$$3 : 4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \text{ т. е. } 3 : 4 = \frac{3}{4}.$$

Аналогично рассуждая, можем получить:

$$5 : 9 = \frac{5}{9}; 6 : 7 = \frac{6}{7}; m : 10 = \frac{m}{10}; a : b = \frac{a}{b}.$$

Каждую обыкновенную дробь можно рассматривать как результат деления её числителя на знаменатель (как частное двух чисел). Например, дробь $\frac{3}{8}$ можно прочитать как «три восьмых» или «3 разделить на 8».



С помощью дроби можно записать результат деления любых натуральных чисел. Этот результат выражается или натуральным числом, или дробным. Например:

$$1) 15 : 3 = \frac{15}{3} = 5; \quad 3) 5 : 4 = \frac{5}{4};$$

$$2) 5 : 1 = \frac{5}{1} = 5; \quad 4) 2 : 9 = \frac{2}{9}.$$

И наоборот, любую дробь можно представить в виде частного:

$$5) \frac{2}{7} = 2 : 7; \quad 6) \frac{6}{11} = 6 : 11; \quad 7) \frac{m}{5} = m : 5.$$

Примеры 1 и 2 показывают, что любое натуральное число можно записать в виде дроби:

$$7 = 7 : 1 = \frac{7}{1} \text{ или } 7 = 21 : 3 = \frac{21}{3}; \quad 10 = \frac{10}{1} = \frac{30}{3}.$$

Замечаем, что $\frac{7}{1} = \frac{21}{3}$; $\frac{10}{1} = \frac{30}{3}$, т. е., рассматривая дроби как результат деления натуральных чисел, получаем равные дроби.

На рисунке 5 один и тот же круг разделили на равные части: на 2, на 4, на 8 и закрасили *половину*. Ей соответствуют дроби: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$.

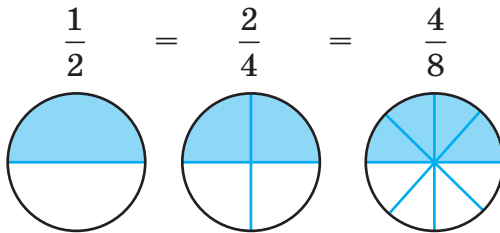


Рисунок 5

С помощью обыкновенных дробей одну и ту же часть целого предмета можно обозначить по-разному. Так как дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$ обозначают одну и ту же часть целого, то эти дроби равны: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$.

Дробь $\frac{2}{4}$ можно получить из дроби $\frac{1}{2}$, умножив её числитель и знаменатель на 2. Дробь $\frac{4}{8}$ можно получить из дроби $\frac{2}{4}$, умножив её числитель и знаменатель на 2.

Обратно: дробь $\frac{1}{2}$ можно получить из дроби $\frac{2}{4}$, разделив её числитель и знаменатель на 2. Дробь $\frac{1}{2}$ можно получить из дроби $\frac{4}{8}$, разделив её числитель и знаменатель на 4.

Вывод:



Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю, то получится дробь, равная данной.

Это есть основное свойство дроби.

Задача 2. В соревновании на самый спортивный класс нужно представить команду, $\frac{2}{3}$ которой составляют девочки. 5 «А» класс представил команду из 15 человек, в которой 10 девочек. Выполнил ли 5 «А» класс условие соревнования?

Решение.

Узнаем, какую часть составляет число 10 от числа 15. Разделим число 15 на 15 равных

частей. На рисунке 6 полоску разделили на 15 равных частей.



Рисунок 6

Одна часть составляет $\frac{1}{15}$ полоски, а десять таких частей составляют $\frac{10}{15}$ полоски, т. е. число 1 от числа 15 составляет $\frac{1}{15}$ часть, а число 10 составляет $\frac{10}{15}$ частей числа 15.

Значит, девочки составляют $\frac{10}{15}$ частей всех участников. По основному свойству дроби можно числитель и знаменатель дроби $\frac{10}{15}$ разделить на одно и то же число, не равное нулю, и получить равную дробь. Разделим числитель и знаменатель на 5, получим $\frac{10}{15} = \frac{10 : 5}{15 : 5} = \frac{2}{3}$.

Ответ: условие соревнования выполнено.

В этой задаче:

1) Мы нашли, **какую часть составляет одно число от другого**: число 10 составляет $\frac{10}{15}$ частей от числа 15.



Чтобы узнать, какую часть одно число (первое) составляет от другого (второго), нужно первое число разделить на второе и записать результат в виде дроби:

$$10 : 15 = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

2) Применили основное свойство дроби, числитель и знаменатель дроби уменьшили в одно и то же число раз, иначе говорят, **сократили дробь**:

$$\frac{10}{15} = \frac{10 : 5}{15 : 5} = \frac{2}{3}.$$



Сократить дробь — это значит разделить её числитель и знаменатель на одно и то же число, отличное от нуля.



Чтобы сократить дробь, нужно:

1) найти общий делитель числителя и знаменателя;

2) разделить числитель и знаменатель на их общий делитель.

Пример. Сократите дробь:

а) $\frac{12}{18}$; б) $\frac{36}{60}$; в) $\frac{24}{28}$.

Решение.

а) $\frac{12}{18} = \frac{12 : 3}{18 : 3} = \frac{4}{6}$. Дробь сократили на 3, полученную дробь можно ещё сократить на 2: $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
Дробь $\frac{2}{3}$ сократить нельзя, так как числа 2 и 3

взаимно простые;

б) обычно сокращают дробь сразу на наибольший общий делитель числителя и знаменателя. Найдём наибольший общий делитель: НОД(36; 60) = 12. Получим:

$$\frac{36}{60} = \frac{36 : 12}{60 : 12} = \frac{3}{5};$$

в) $\frac{24 : 4}{28 : 4} = \frac{6}{7}$, сократили на НОД (24; 28) = 4.



30. Запишите частное натуральных чисел в виде дроби:

- а) $3 : 10$, $16 : 25$, $101 : 1000$, $12 : 1$, $17 : 5$, $35 : 7$;
б) $2 : 5$, $1 : 10$, $13 : 100$, $25 : 8$, $6 : 1$, $52 : 10$.

31. Запишите дробь в виде частного натуральных чисел:

- а) $\frac{1}{11}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{10}{1}$, $\frac{19}{10}$; б) $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{k}$, $\frac{a}{10}$, $\frac{m}{n}$.

32. Найдите среди дробей те, которые можно записать в виде натуральных чисел. Запишите эти натуральные числа:

- а) $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{10}{7}$, $\frac{10}{5}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{9}{1}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{16}{4}$, $\frac{16}{8}$, $\frac{16}{16}$;
б) $\frac{5}{1}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{10}{10}$, $\frac{20}{9}$, $\frac{27}{9}$, $\frac{16}{3}$, $\frac{16}{1}$, $\frac{24}{2}$, $\frac{24}{3}$, $\frac{24}{4}$, $\frac{24}{6}$.

33. Представьте в виде дроби несколькими способами натуральные числа: 1, 2, 20, 8.

34. Определите число, на которое нужно умножить числитель и знаменатель, чтобы привести дробь к знаменателю 48:

- а) $\frac{5}{8}$; б) $\frac{7}{12}$; в) $\frac{11}{24}$; г) $\frac{1}{6}$.

35. Определите наибольший общий делитель числителя и знаменателя дроби и сократите дробь:

- а) $\frac{4}{6}$, $\frac{8}{20}$, $\frac{15}{40}$, $\frac{120}{200}$; в) $\frac{6}{9}$, $\frac{10}{50}$, $\frac{28}{49}$, $\frac{400}{600}$;
б) $\frac{4}{10}$, $\frac{12}{16}$, $\frac{25}{35}$, $\frac{180}{300}$; г) $\frac{8}{12}$, $\frac{20}{30}$, $\frac{42}{60}$, $\frac{125}{250}$.

Решите задачи.

36. Длина дороги 50 км. Отремонтировали 37 км. Какую часть всей дороги отремонтировали?
37. В году 365 дней. Какую часть года составляет:
а) январь; б) февраль?
38. За месяц волонтеры в городских парках посадили 225 деревьев, из которых 75 были липы. Найдите, какую часть составляют липы от всех посаженных деревьев.
39. Из 20 кустов роз, посаженных на школьном участке, 12 были красного цвета, а остальные — белого. Какую часть от всех кустов роз составляли розы белого цвета?
40. В одном из туров оказалось, что из 40 туристов только немецким языком владеют 12 человек, только английским — 18, остальные туристы знают два иностранных языка. Какая часть туристов знает два иностранных языка?
41. В летнем лагере отдыха было 245 детей и 30 воспитателей. На соревнования из лагеря уехали 45 человек. Какую часть составляют участники соревнований от общего числа людей в лагере?
42. В школьной олимпиаде по математике участвовали 54 учащихся. Одиннадцатиклассники составили $\frac{1}{3}$ от всех участников, а десятиклассники — $\frac{2}{3}$ от учащихся 11-х классов. Остальные участники — девятиклассники. Сколько девятиклассников участвовало в олимпиаде?

43. Школьник в июле устроился на работу по озеленению города. За работу он получил 200 р. Из этих денег 50 р. мальчик потратил на подарок маме ко дню рождения, 10 р. заплатил за компьютерную игру, а остальные деньги оставил на необходимые покупки к школе. Какую часть составляют деньги, оставленные на покупки к школе, от всех заработанных денег?
44. На школьной выставке было представлено 120 рисунков. Первой премией отмечено 15 рисунков, второй — 20, третьей — 30, а остальные — поощрительными призами. Какая часть всех рисунков отмечена поощрительными призами?
45. Возраст внука составляет $\frac{3}{10}$ возраста дедушки. Сколько лет внуку, если дедушке 60 лет?
46. Определите, какую часть часа составляют:
а) 30 мин, 20 мин; в) 36 мин, 55 мин;
б) 10 мин, 35 мин; г) 5 мин, 3 мин.
47. Запишите, какую часть меньшая единица измерения длины составляет от большей:
а) 2 мм = ... см, 7 см = ... м, 30 м = ... км;
б) 4 см = ... дм, 11 см = ... м, 9 м = ... км.
48. Запишите, какую часть меньшая единица измерения массы составляет от большей:
а) 3 г = ... кг, 18 кг = ... т, 4 ц = ... т;
б) 17 г = ... кг, 8 ц = ... т, 5 кг = ... ц.
49. В садоводческом хозяйстве приготовили 23 л малинового варенья для детского сада. Какое наименьшее количество трёхлитровых банок нужно взять, чтобы разлить всё варенье?



50. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел:

- а) 18 и 30; б) 30, 20 и 25.

51. Найдите значение выражения при заданных значениях переменных:

а) $(x - y) : 8$, если $x = 20\,000$, $y = 472$;

б) $m : 53 + 18 \cdot y$, если $m = 16\,271$, $y = 18$.

52. Установите порядок действий и найдите значение числового выражения:

а) $4^3 - 2^2$;

г) $15^2 \cdot 11 - (10 + 3)^2$;

б) $8^2 \cdot 3^3$;

д) $(13 - 3)^3 + 3 - 3^4$;

в) $(5^3 - 17) : (34 - 5^2)$;

е) $5^4 \cdot 2 + 9^2$.



Проверь себя!

Назовите пропущенные слова (1–3).

1. Если ... и ... дроби умножить или разделить на одно и то же число, не равное ..., то получится дробь, ... данной.

2. Чтобы узнать, какую часть одно число (первое) составляет от другого (второго), нужно первое число ... на второе и записать результат в виде

3. Чтобы выполнить сокращение дроби, нужно разделить ... и ... на одно и то же число, отличное от



53. Запишите частное двух натуральных чисел в виде дроби:

$2 : 7$, $13 : 20$, $31 : 100$, $8 : 1$, $13 : 4$, $48 : 8$.

54. Запишите дробь в виде частного двух натуральных чисел:

$\frac{3}{13}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{20}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{10}{5}$.

55. Представьте числа 1, 7, 12 в виде дроби несколькими способами.

56. Приведите дроби к знаменателю 54:

$$\frac{7}{9}, \frac{11}{18}, \frac{17}{27}, \frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$$

57. Сократите дроби на наибольший общий делитель числителя и знаменателя:

$$\frac{8}{16}, \frac{10}{25}, \frac{18}{27}, \frac{30}{45}, \frac{200}{350}, \frac{30}{25}, \frac{16}{24}, \frac{16}{80}, \frac{16}{96}$$

Решите задачи.

58. В книге 120 страниц. Учащийся, выполняя домашнее задание, прочитал 20 страниц. Какую часть книги он прочитал?

59. Выполнение самостоятельной работы на уроке заняло 30 мин. Какую часть урока учащиеся выполняли самостоятельную работу?

60. В упаковке 50 воздушных шариков. В день рождения мамы было использовано 36 шариков. Какая часть шариков осталась неиспользованной?

61. 5 «А» класс сдал 450 кг макулатуры, 5 «Б» — 560 кг, а 5 «В» — 720 кг. Какую часть составляет макулатура, которую сдал 5 «Б» класс, от общего количества макулатуры?

62. Количество рыб, которое поймал сын, составляет $\frac{2}{5}$ от количества рыб, пойманных отцом.

Сколько рыб поймал сын, если отец поймал 15 рыб? Какую часть составляет количество рыб, пойманных сыном, от общего улова?

63. Запишите, какую часть меньшая единица измерения составляет от большей:

а) 3 мм = ... см, 9 см = ... м, 17 м = ... км;

б) 5 г = ... кг, 7 ц = ... т, 12 кг = ... ц;

в) 3 м² = ... дм², 16 м² = ... км², 2 м² = ... см².



Для исследования озера выловили 80 рыб, их пометили и снова выпустили в озеро. На второй день выловили 150 рыб, среди которых оказалось 5 помеченных. Можно ли определить, сколько рыб в озере? Где ещё можно применить такой способ?



§ 3. Правильные и неправильные дроби. Смешанные числа

Дроби, как и натуральные числа, можно изображать точками на координатном луче. Например, чтобы изобразить дроби $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{8}{8}$ на луче:

1. Выберем единичный отрезок, лучше взять его достаточно большим, например равным длине 8 клеток.

2. Разделим его на 8 равных частей. Отметим дроби, соответствующие этим равным частям (рис. 7):

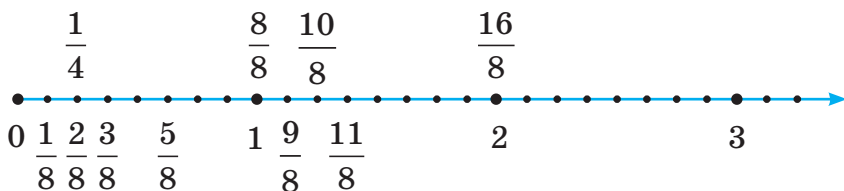


Рисунок 7

Единице соответствует дробь $\frac{8}{8}$, числу 2 соответствует дробь $\frac{16}{8}$. Между числами 1 и 2