

§ 14. Простые и составные числа.

Разложение числа на простые множители

Число 24 имеет восемь различных делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Число 19 — только два различных делителя: 1 и 19. Такие числа, как 19, называются простыми.

Простым числом называется число, которое имеет только два различных делителя.

Число 24 не является простым, оно называется составным.

Составным числом называется число, которое имеет больше двух делителей.

Число 1 не является ни простым, ни составным.

Число 2 — наименьшее простое число. Это единственное чётное простое число, остальные простые числа нечётные.

Простых чисел бесконечно много. На форзаце 1 учебного пособия помещена таблица простых чисел, в которой записаны все простые числа из первой тысячи.

Задача. На экспериментальном участке для пряной зелени нужно выделить участок земли прямоугольной формы площадью 24 м^2 . Какими могут быть размеры этого участка, если они должны выражаться натуральными числами?

Решение. Так как площадь прямоугольника равна произведению его длины и ширины, то возможны следующие варианты:

$$24 = 1 \cdot 24; \quad 24 = 2 \cdot 12; \quad 24 = 3 \cdot 8; \quad 24 = 4 \cdot 6.$$

При решении задачи мы представили число 24 в виде произведения натуральных чисел. Говорят: «разложили число 24 на множители».

Если при разложении числа $24 = 4 \cdot 6$ множители 4 и 6 тоже представить в виде произведения: $4 = 2 \cdot 2$, $6 = 2 \cdot 3$, то число 24 будет разложено на простые множители: $24 = 4 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$.

При разложении чисел на простые множители используют признаки делимости и применяют запись с использованием вертикальной черты. Слева от черты записывают делимое, справа — делитель, значение частного — под делимым.

Пример 1. Разложите на простые множители числа 72, 162, 250.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 162 & 2 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 250 & 2 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2,$$

$$162 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^4,$$

$$250 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 5^3.$$

Разложение числа на простые множители используют для нахождения наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного нескольких чисел.



Чтобы найти наибольший общий делитель двух (нескольких) натуральных чисел, нужно:

- 1) разложить каждое из чисел на простые множители;
- 2) выписать все общие множители (те, которые входят в каждое из полученных разложений);
- 3) найти произведение этих общих множителей.

Пример 2. Найдите НОД (72; 162).

Решение. $72 = \underline{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underline{3} \cdot \underline{3}$; $162 = \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot 3 \cdot 3$.

НОД (72; 162) = $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$.

Ответ: 18.

Пример 3. Найдите НОД (105; 147; 231).

Решение. $105 = \underline{3} \cdot \underline{5} \cdot \underline{7}$; $147 = \underline{3} \cdot \underline{7} \cdot \underline{7}$; $231 = \underline{3} \cdot \underline{7} \cdot \underline{11}$.

НОД (105; 147; 231) = $3 \cdot 7 = 21$.

Ответ: 21.

Если натуральные числа не имеют общих делителей, то их НОД = 1.

Пример 4. Найдите НОД (72; 55).

Решение. $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$; $55 = 5 \cdot 11$.

НОД (72; 55) = 1.

Ответ: 1.

Числа 72 и 55 имеют наибольший общий делитель, равный 1. Такие числа называют взаимно простыми.

Два натуральных числа называют **взаимно простыми**, если их наибольший общий делитель равен 1.



Чтобы найти наименьшее общее кратное двух (нескольких) натуральных чисел, нужно:

- 1) разложить каждое из чисел на простые множители;
- 2) записать разложение одного из чисел и дополнить его теми множителями из остальных разложений, которых нет в записанном произведении;
- 3) вычислить записанное произведение.

Пример 5. Найдите НОК (18; 24).

Решение. Разложим числа 18 и 24 на простые множители:
 $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$; $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$.

Дополним разложение числа 24 множителем 3.

НОК (18; 24) = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$.

Ответ: 72.

Пример 6. Найдите:

- а) НОК (60; 15); б) НОК (8; 25).

Решение.

а) Если одно из чисел делится на другое, то их наименьшее общее кратное равно большему из чисел.

60 делится на 15, значит, НОК $(60; 15) = 60$.

б) Так как взаимно простые числа не имеют общих простых делителей, то их наименьшее общее кратное равно произведению этих чисел.

8 и 25 — взаимно простые числа, значит, НОК $(8; 25) = 8 \cdot 25 = 200$.

Ответ: а) НОК $(60; 15) = 60$; б) НОК $(8; 25) = 200$.

**Решаем вместе**

295. Докажите, что данное число составное, используя признаки делимости:

а) 36; б) 215; в) 8040; г) 12 321.

296. Установите, простым или составным является данное число, используя таблицу простых чисел:

а) 107; б) 221; в) 517; г) 683; д) 883; е) 937.

297. Определите, используя признаки делимости, является ли число простым или составным:

а) 279; б) 335; в) 603; г) 1929.

298. Какими цифрами может оканчиваться многозначное простое число?

299. Запишите один из простых делителей числа, а затем — все простые делители числа:

а) 24; б) 35; в) 42; г) 60.

300. Разложите число на простые множители, используя последовательное деление:

а) 16; в) 60; д) 100; ж) 180;
б) 18; г) 72; е) 96; з) 324.

301. Найдите с помощью алгоритма:

- а) НОД (50; 45); г) НОД (216; 504);
б) НОД (42; 48); д) НОД (186; 465; 434);
в) НОД (70; 90); е) НОД (260; 169; 39).

302. Найдите с помощью алгоритма:

- а) НОК (16; 18); г) НОК (30; 23);
б) НОК (80; 30); д) НОК (200; 120);
в) НОК (18; 50); е) НОК (15; 7).

303. Установите, являются ли взаимно простыми числа:

- а) 7 и 9; в) 6 и 10; д) 13 и 33;
б) 15 и 17; г) 11 и 12; е) 15 и 44.

304. Запишите три пары чисел a и b , для которых выполняется равенство:

- а) НОК (a ; b) = b ; в) НОК (a ; b) = $a \cdot b$;
б) НОД (a ; b) = b ; г) НОД (a ; b) = 1.

305. В некоторый момент времени планеты Венера и Меркурий занимают определённое положение относительно Солнца. Через сколько суток обе планеты снова будут находиться в том же положении относительно Солнца, если известно, что Меркурий делает полный оборот вокруг Солнца за 88 суток, а Венера — за 225 суток?



Повторяем

Решите задачи 306, 307.

306. Длина прямоугольника в 8 раз больше его ширины. Найдите длину прямоугольника, если ширина на 42 см меньше длины.

307. Мотоциклист ехал 3 ч со скоростью 48 км/ч, затем 2 ч со скоростью 54 км/ч и 4 ч со скоростью 51 км/ч и преодолел некоторое расстояние. За какое время он проедет это расстояние, двигаясь со скоростью 57 км/ч?



Проверяем себя

1. Назовите пропущенные слова:

- а) Простым числом называется число, которое имеет только ... делителя.
- б) Составным числом называется число, которое имеет ... делителей.

2. Выберите правильный ответ.

Число 1 не является:

- а) простым числом;
- б) составным числом;
- в) ни простым, ни составным числом.

3. Закончите утверждение:

- а) Любое составное число можно разложить...
- б) Два натуральных числа называют взаимно простыми, если их наибольший общий делитель равен...

4. Назовите пропущенные слова:

- а) Чтобы найти наибольший общий делитель двух (нескольких) натуральных чисел, нужно:
 - 1) разложить каждое из чисел на ...;
 - 2) ... все общие множители (те, которые ... в каждое из полученных ...;
 - 3) найти ... общих множителей.
- б) Чтобы найти наименьшее общее кратное двух (нескольких) натуральных чисел, нужно:
 - 1) разложить каждое из чисел на ...;
 - 2) записать разложение ... и дополнить его ... из остальных разложений, которых ... произведений;
 - 3) вычислить ... произведение.
- в) Если одно из двух чисел делится на другое, то их наименьшее общее кратное
- г) Наименьшее общее кратное взаимно простых чисел равно

**Решаем самостоятельно**

308. Определите, какие из чисел 7, 9, 17, 24, 33, 43, 55, 61 являются простыми.

309. С помощью таблицы простых чисел определите, простым или составным является число:

а) 137; б) 379; в) 437; г) 829.

310. Разложите число на простые множители, используя последовательное деление:

а) 24; б) 45; в) 128; г) 90.

311. Найдите НОД чисел и определите, какие из пар чисел являются взаимно простыми:

а) 5 и 8; в) 20 и 23;

б) 12 и 15; г) 11 и 33.

312. Найдите, используя алгоритм:

а) НОД (90; 120), НОК (90; 120);

б) НОД (16; 5), НОК (16; 5);

в) НОД (12; 36), НОК (12; 36);

г) НОД (12; 48), НОК (12; 48).

313. Найдите, используя алгоритм:

а) НОК (6; 18); в) НОК (18; 60); д) НОК (5; 12);

б) НОК (80; 20); г) НОК (3; 23); е) НОК (15; 35).

314. Три парохода заходят в порт после каждого рейса. Первый пароход совершает свой рейс за 6 дней, второй — за 5 дней, третий — за 10 дней. Через сколько дней после выхода в рейс все три парохода встретятся в порту, если все они вышли из порта одновременно?

**Исследуем**

$\text{НОД}(9; 12) = 3$, $\text{НОК}(9; 12) = 36$; заметим, что $9 \cdot 12 : 36 = 3$. Проверьте это свойство на других примерах. Попробуйте его сформулировать.

Итоговая самооценка

После изучения этой главы я должен:

1. Уметь выполнять анализ условия задачи, составлять модели её условия и план решения.
2. Знать алгоритмы решения задач «на сумму и разность», «на части».
3. Уметь изображать числа на координатном луче.
4. Уметь выполнять действия с натуральными числами: сложение, вычитание, умножение, деление, деление с остатком, возведение в степень.
5. Уметь округлять натуральные числа.
6. Уметь находить делители и кратные чисел.
7. Знать признаки делимости.
8. Уметь раскладывать числа на простые множители.
9. Уметь находить НОД и НОК чисел.

Я проверяю свои знания

1. Для праздника цветов дети принесли 90 роз, 18 гербер и 72 хризантемы. Какое максимальное количество одинаковых букетов можно составить из этих цветов?

Выберите правильный ответ:

- а) 9; б) 6; в) 18; г) 36.

2. Поезд Минск — Барановичи отправляется в 9:00. В какое время поезд прибудет в Барановичи, если он идёт со скоростью 75 км/ч, а расстояние между Минском и Барановичами равно 150 км?

Выберите правильный ответ:

- а) в 10:30; в) в 10:00;
б) в 10:10; г) в 11:00.

3. Каким числам кратно число 3675:

- а) 2; б) 3; в) 9; г) 5; д) 3 и 5?

4. В соревновании по шахматам приняли участие 54 члена шахматной секции. Мальчиков на соревновании было в два раза больше, чем девочек. Сколько девочек участвовало в соревновании:

- а) 36; б) 24; в) 18; г) 16?

5. Таксист за день проезжает 200 км, а средний расход бензина — 5 л на 100 км. Какую минимальную сумму нужно отложить водителю, чтобы её хватило для заправки на неделю, если 1 л бензина стоит 2 р. 44 к.:

- а) 57 р.; в) 170 р. 80 к.;
б) 57 р. 60 к.; г) 90 р. 20 к.?

6. Какие из пар чисел являются взаимно простыми:

- а) 12 и 15; в) 41 и 123; д) 1001 и 49;
б) 16 и 33; г) 25 и 80; е) 87 и 15?

7. Округлите число 23 458 697 до разряда десятков и до разряда десятков тысяч. Выберите правильный ответ:

- а) 23 458 790 и 23 450 000;
б) 23 458 700 и 23 460 000;
в) 23 458 700 и 23 450 000;
г) 23 458 600 и 23 550 000.

8. Вычислите: $2^2 - 1 + 5^3 : 5^2$.

Выберите правильный ответ:

- а) 3; б) 4; в) 8; г) 5.

9. Для праздничного оформления новогодней ёлки подготовили синие, жёлтые и красные шарик. Синих шариков на 15 больше, чем жёлтых, а красных на 12 меньше, чем жёлтых. Сколько на ёлке синих, красных и жёлтых шариков, если всего для украшения использовали 60 шариков:

- а) 36; 21; 9; б) 30; 20; 10; в) 34; 7; 19; г) 19; 31; 10?

10. На координатном луче отметили числа a , b и c . Известно, что $a > b$ и что $c < b$. Какое из чисел расположено правее:

- а) a ; б) b ; в) c ; г) нельзя определить?

Математика вокруг нас*

1. Вы стоите напротив дома номер 27 (нечётная сторона улицы). Мимо какого количества домов по этой стороне вы должны пройти, чтобы дойти до дома, номер которого в пять раз больше, если на улице нет домов с одинаковыми номерами?

2. Швейное ателье выполняло заказ по пошиву танцевальных костюмов. Комплект для мальчиков стоил 50 р. Комплект для девочек — 55 р. Когда родители пришли за заказом, то заплатили 2400 р. за 44 комплекта. Сколько мальчиков ходит в танцевальный кружок?

3. Абонемент в бассейн для взрослого стоит 96 р. (8 посещений в месяц), а разовое посещение — 12 р. 50 к. Стоимость абонемента для ребёнка составляет 80 р., разовое посещение — 10 р. 50 к. Какой вариант наиболее выгодный для посещения бассейна сына с отцом в течение месяца?

4. На прямой отметили несколько точек. Затем отметили середины отрезков, соединяющих соседние точки. Всего отмеченными оказалось 119 точек. Сколько точек отметили вначале?

5. Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми равно 17 км, выехал велосипедист со скоростью 12 км/ч. Одновременно с ним из пункта A в пункт B вышел пешеход со скоростью 5 км/ч. Велосипедист доехал до пункта B , повернул назад и поехал с той же скоростью. Через сколько часов после начала движения они встретятся?

6. В интеллектуальном турнире приняли участие 18 пятиклассников и 24 шестиклассника. Какое наибольшее количество команд с одинаковым числом пятиклассников и с одинаковым числом шестиклассников можно составить для участия в финале турнира?

7. В музее миниатюр «Страна Мینی» в г. Минске представлены 22 миниатюры дворцов и музеев Беларуси. Миниатюр, размеры которых в 120 раз меньше размеров оригинала, на 10 больше, чем всех остальных. Сколько таких миниатюр?