

§ 5. Решение задач с помощью пропорций

Рассмотрим, как с помощью пропорции можно решать задачи рационально.

Задача 1. Для холодной засолки 12 кг грибов берут 600 г соли. Сколько понадобится соли, чтобы засолить 40 кг грибов?

В задаче речь идёт о значениях массы грибов и соли.

Известные значения величины:

масса грибов 12 кг и 40 кг;

масса соли 600 г для засолки 12 кг грибов.

Неизвестное значение величины:

масса соли для засолки 40 кг грибов.



Первый способ решения. Для того чтобы найти, сколько граммов соли нужно для засолки 40 кг грибов, нужно знать, сколько соли потребуется для засолки 1 кг грибов. Так как 600 г соли используют для засолки 12 кг грибов, то $600 : 12 = 50$ (г) соли приходится на 1 кг, тогда $50 \cdot 40 = 2000$ (г). Значит, 2 кг соли нужно для засолки 40 кг грибов.

Ответ: 2 кг.

Второй способ решения (с помощью пропорции).

1. Если масса грибов увеличивается в некоторое число раз, то и количество соли для засолки этой массы грибов увеличивается в такое же число раз. Значит, зависимость между массой грибов и массой соли — прямо пропорциональная.

2. Составим таблицу и укажем вид зависимости с помощью стрелок одного направления.

Масса грибов, кг	Масса соли, г
12 ↓	600 ↓
40 ↓	x ↓

3. Так как отношение массы грибов равно отношению массы соли, то можно составить пропорцию:

$$\frac{12}{40} = \frac{600}{x}.$$

Решим её:

$$x = \frac{40 \cdot 600}{12} = 2000. \quad 2000 \text{ г} = 2 \text{ кг}.$$

Ответ: 2 кг.

Задача 2. Четверо рабочих могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней могут сделать эту же работу 6 рабочих?

1. В задаче речь идёт о количестве рабочих и количестве дней, необходимых им для выполнения работы. Известные значения величин:

число рабочих: 4 и 6;

число дней: 12, за которые четверо рабочих выполнили работу.

Неизвестное значение величин:

число дней, за которые шесть рабочих выполняют эту же работу.

2. Если количество рабочих увеличивается в некоторое число раз, то количество дней, необходимых им для выполнения работы, уменьшается в такое же число раз. Значит, зависимость между величинами в задаче — обратно пропорциональная. Составим таблицу и укажем вид зависимости с помощью стрелок противоположного направления.

Количество рабочих	Количество дней
4 ↓	12 ↑
6 ↓	x ↑

Составим пропорцию:

$$\frac{4}{6} = \frac{x}{12}.$$

Решим её:

$$x = \frac{4 \cdot 12}{6} = 8.$$

За 8 дней шесть рабочих выполняют работу, которую четверо рабочих могут выполнить за 12 дней.

Ответ: 8 дней.



Алгоритм решения задач на прямую и обратную пропорциональные зависимости между величинами.

1. Выяснить, о каких величинах идёт речь в задаче.
2. Назвать зависимость между величинами в задаче (указать, как изменяется значение второй величины с увеличением значения первой величины).
3. Составить таблицу (в первый столбик поместить значения первой величины, во второй — значения второй величины).
4. Указать вид зависимости в таблице с помощью стрелок.
5. Записать и решить пропорцию в соответствии с выбранной зависимостью.

Задачи на пропорциональное деление:

Задача 3. Двое инвесторов вложили в развитие туризма 6 млн р. и 8 млн р. соответственно и получили прибыль 140 млн р. Как распределить эту прибыль между инвесторами?

Решение: обозначим прибыль первого инвестора через x , а второго — через y . Так как прибыль прямо пропорциональна вложенным инвестициям, то отношение $\frac{6}{8}$ равно отношению $\frac{x}{y}$. Получим пропорцию $\frac{6}{8} = \frac{x}{y}$. Поменяем в ней средние члены, получим $\frac{x}{6} = \frac{y}{8}$. Обозначим каждое из равных отношений через k . Это число показывает, сколько миллионов рублей приходится на одну из частей, и называется **коэффициентом пропорциональности**.

Выразим x и y через k :

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{8} = k \Rightarrow x = 6k, y = 8k.$$

По условию задачи:

$$6k + 8k = 140.$$

Решим полученное уравнение:

$$(6 + 8) \cdot k = 140, 14k = 140, k = 10.$$

Значит, на одну из частей приходится 10 млн р.

Тогда прибыль первого инвестора: $10 \cdot 6 = 60$ млн р., а второго — $10 \cdot 8 = 80$ млн р.

Ответ: 60 млн р., 80 млн р.



При решении задач на пропорциональное деление обычно сразу обозначают через k значение величины, приходящееся на одну из частей пропорционального деления (коэффициент пропорциональности).



Можно использовать алгоритм:

1. Выяснить, о каких величинах идёт речь в задаче.

2. Назвать известные значения величины и части пропорционального деления.

3. Обозначить через k значение величины, приходящееся на одну из частей пропорционального деления.

4. Выразить неизвестные значения величины через k .

5. Составить и решить уравнение.

6. Записать ответ.

Задача 4. Для приготовления коктейля нужно смешать 3 части апельсинового и 2 части яблочного сока. Сколько нужно взять апельсинового и яблочного сока, чтобы получить 200 мл коктейля?

Решение:

1. В задаче речь идёт об объёме коктейля.

2. Известен общий объём (200 мл) и части его компонентов: 3 и 2 части апельсинового и яблочного сока соответственно.

3. Обозначим через k количество миллилитров, приходящееся на одну из частей.

4. Тогда $3k$ мл составляет апельсиновый сок, а $2k$ мл — яблочный.

5. Всего $3k + 2k$ составляют 200 мл.

Получаем уравнение: $3k + 2k = 200$.

Решаем его: $5k = 200, k = 40$.

$3k = 120, 2k = 80$.

Ответ: 120 мл и 80 мл.



166. В таблице зависимость между величинами m и n обозначена стрелками. Составьте пропорцию и решите её.

а)

m	n
$x \downarrow$	$4 \downarrow$
$9 \downarrow$	$6 \downarrow$

б)

m	n
$12 \uparrow$	$y \uparrow$
$5 \uparrow$	$10 \uparrow$

в)

m	n
$6 \downarrow$	$1,5 \downarrow$
$z \downarrow$	$7 \downarrow$

167. Составьте пропорцию и найдите неизвестное значение одной из величин.

c	d
x ↓	3 ↑
9 ↓	8 ↓

c	d
10 ↑	y ↓
6 ↓	15 ↓

c	d
$3,6$ ↓	$0,5$ ↑
z ↓	3 ↓

168. Составьте таблицу и решите задачу с помощью пропорции:

а) Из 12,5 кг свежих грибов получается 2,5 кг сушёных. Сколько килограммов свежих грибов надо собрать для получения 5,5 кг сушёных?

б) Если имеющиеся в спортзале мячи разложить поровну в 4 сетки, то в каждой будет по 6 мячей. Сколько мячей будет в каждой сетке, если их разложить поровну в 3 сетки?

169. Решите задачу составлением пропорции, заполнив таблицу:

а) За 2,5 кг конфет было заплачено 15,5 р. Сколько стоят 1,5 кг таких же конфет?

б) Работу по рассадке цветов 3 работницы могут выполнить за 4 ч. За сколько часов выполнят эту же работу 2 работницы?

а)

Масса конфет	Стоимость
--------------	-----------

б)

Количество работниц	Время работы
---------------------	--------------

170. Используя модель задачи, составьте условие и решите задачу.

а)

Количество метров ткани	Количество блузок
3,6 м ↓	4 ↓
9,9 м ↓	? ↓

б)

Масса товара	Стоимость
10,5 кг ↑	220,5 р. ↑
?	73,5 р. ↑

Решите задачи составлением пропорции, используя таблицы:

- 171.** Из 9 кг сырых зёрен кофе получается 7,5 кг жареных. Сколько килограммов сырых зёрен кофе надо взять, чтобы получить 4 кг жареных?
- 172.** Грейдер за 3,5 ч может расчистить дорогу длиной 0,8 км. Сколько времени понадобится грейдеру, чтобы расчистить 1,2 км?
- 173.** Известно, что 5 кубометров газа заменяют 6 кг каменного угля. Сколько тонн каменного угля нужно, чтобы заменить 30 млн кубометров газа?
- 174.** Чтобы получить 10 т железа, нужно переработать 18 т железной руды. Сколько получится железа из 1050 т руды?
- 175.** Для отопления дома заготовленного угля хватит на 240 дней при расходе 0,4 т угля в день. На сколько дней хватит этого запаса, если расходовать 0,3 т угля в день?
- 176.** С помощью 6 одинаковых насосов вода из затопленного котлована откачивается за 24 мин. За сколько минут можно откачать воду из котлована с помощью 9 таких насосов?
- 177.** Для перевозки груза необходимо 14 автомашин грузоподъёмностью 4,5 т. Сколько потребуется автомашин грузоподъёмностью 7 т для перевозки груза?

- 178.** С помощью 12 комбайнов агрофирма должна убрать урожай за 8 дней. Сколько таких же комбайнов надо ещё, чтобы убрать урожай за 6 дней?
- 179.** Наборщик текста может подготовить текст для печати за 7 ч, если будет набирать текст со скоростью 180 знаков в минуту. Сколько знаков в минуту должен он набирать, чтобы подготовить этот текст за 5 ч?
- 180.** На турбазе для 24 человек сделан запас продовольствия на 6 дней. На сколько дней хватит этого запаса, если на турбазе будет 36 человек?
- 181.** Определите, пропорциональны ли числа 2 и 5 числам:
 а) 8 и 25; в) 11 и 27; д) 200 и 5000;
 б) 8 и 20; г) 15 и 37,5; е) 0,04 и 0,1.
- 182.** Верно ли, что отношения чисел 1, 3 и 5 к первому, второму и третьему числу соответственно равны:
 а) 2; 6 и 11; в) 12; 36 и 60;
 б) 5; 12 и 25; г) 0,5; 1,5 и 2,5?
- 183.** В каком отношении число 48 разделили на части, если получили следующие числа:
 а) 16 и 32; в) 15 и 33;
 б) 36 и 12; г) 38 и 10?
- 184.** Докажите, что числа 3, 5 и 9 пропорциональны числам 12, 20 и 36.

Решите задачи, используя алгоритм деления числа на пропорциональные части:

- 185.** Разделите число 48 на части, пропорциональные числам:
 а) 1 и 2; в) 0,1 и 0,5;
 б) 3 и 5; г) 2,7 и 15.
- 186.** Разделите число 40 на части в отношении:
 а) 1 : 3; в) 0,3 : 0,5;
 б) 7 : 13; г) 2 : 3 : 5.

187. Разделите число на части в отношении 2 : 5:
а) 0,7; б) $5\frac{1}{3}$.
188. Разделите число на части в отношении 1 : 3 : 8:
а) 36; б) 7,2.
189. Сумма двух чисел равна 24,3. Найдите числа, если их отношение 4 : 5.
190. Разность двух чисел равна 14,1. Найдите эти числа, если их отношение 4 : 1.
191. Сумма трёх чисел равна 32,4. Найдите эти числа, если они относятся так же, как 2 : 4 : 6.
192. Площади двух участков леса находятся в отношении 16 : 3. Какова площадь каждого участка, если их общая площадь 608 га?
193. В состав чайного сбора входят мята, малина и шиповник в отношении 2 : 4 : 5. Сколько граммов мяты и шиповника входит в 825 г такого сбора?
194. Отношение числа мальчиков к числу девочек в классе равно $\frac{4}{5}$. Сколько в классе девочек, если:
а) всего в классе 27 человек;
б) девочек на 2 больше, чем мальчиков?
195. Длины сторон треугольника относятся как 3 : 4 : 5. Найдите эти стороны, если известно, что:
а) периметр треугольника равен 36 см;
б) наибольшая сторона треугольника равна 36 см;
в) наименьшая сторона треугольника равна 36 см;
г) разность наибольшей и наименьшей сторон равна 36 см.
196. Два программиста вместе заработали 8520 р. Как разделить заработанные деньги, если один выполнил 4 части, а другой — 6 частей всей работы?

197. У кормовой свёклы отношение ботвы к корнеплодам равно $1 : 4$. При уборке свёклы оказалось, что получено корнеплодов на 1200 ц больше, чем ботвы. Сколько центнеров корнеплодов получено?
198. Для пайки алюминия нужен сплав цинка, алюминия, олова в отношении $4 : 3 : 18$. Сколько надо взять этих металлов для получения 7,5 кг сплава?
199. Найдите периметр четырёхугольника, если его стороны пропорциональны числам 2, 3, 5 и 8, а наибольшая сторона больше наименьшей на 24 см.
200. Для приготовления фарфора используют глину, гипс и песок в отношении $12,5 : 0,5 : 1$. Какова масса заварочного фарфорового чайника, если при его изготовлении глины взяли на 552 г больше, чем песка?
201. От троса отрезали часть так, что отношение оставшейся части к отрезанной равно $3 : 2$. Сколько процентов составляет отрезанная часть от всего троса?
202. Призовой фонд соревнований по теннису делится между спортсменами, занявшими 1-е, 2-е и 3-е места, в отношении $8 : 5 : 1$. Какой процент премиального фонда получают спортсмены, занявшие первые три места?
203. Продолжительность года на Меркурии относится к продолжительности года на Венере как $11 : 28$, а 0,03625 года на Венере составляет 7 дней на Земле. На сколько дней короче год на Меркурии, чем на Земле?
204. Найдите сумму трёх чисел, зная, что третье относится к первому так же, как $4,5 : 3\frac{3}{4}$, и составляет 40 % второго, а сумма первого и второго равна 400.

205. Площади трёх участков земли относятся как $2\frac{3}{4} : 1\frac{5}{6} : 1\frac{3}{8}$. С первого участка собрали зерна на 72 ц больше, чем со второго. Найдите площадь всех трёх участков, если средняя урожайность равна 18 ц с 1 га.

206. Разделите число 150 на части a , b и c так, чтобы $a : b = 3 : 4$, $b : c = 8 : 11$.

207. Длина Дуная относится к длине Днепра как $6\frac{1}{3}$ к 5, а длина Дона относится к длине Дуная как 6,5 к 9,5. Найдите протяжённость каждой из рек, если Днепр длиннее Дона на 300 км.



208. Замените отношение чисел равным отношением взаимно простых чисел:

а) $18 : 24$; в) $1\frac{1}{4} : 2\frac{2}{3}$;

б) $\frac{1}{3} : \frac{1}{7}$; г) $10 : 15 : 40$.

209. Вычислите наиболее удобным способом:

а) $\frac{2,7 \cdot 36,8 + 2,7 \cdot 63,2}{9 \cdot 64,1 - 9 \cdot 54,1}$; б) $\frac{1,2 \cdot 88,5 - 1,2 \cdot 86,5}{4 \cdot 4,7 + 4 \cdot 5,3}$.

210. Начертите столбчатую диаграмму по данным таблицы, в которой приведено количество спутников у планет Солнечной системы (по данным на 2010 год).

Нептун	Уран	Сатурн	Юпитер
8	18	18	16
Марс	Земля	Венера	Меркурий
2	1	0	0

211. Найдите a и b , если их разность равна 2,4 и a составляет 40 % числа b .

- 212.** Одна из сторон прямоугольника в 1,8 раза больше другой. Найдите стороны прямоугольника, если его периметр равен 19,6 м.
- 213.** В трёх гаражах 460 мест для парковки машин. Число мест в первом гараже составляет 75 % числа мест во втором, а в третьем гараже — в 1,5 раза больше мест, чем в первом. Сколько мест в каждом гараже?
- 214.** Первый станок-автомат в час изготовлял 60 деталей, второй — 40. Работая одновременно, они сделали 350 деталей. Сколько времени они работали?



Проверь себя!

Назовите пропущенные слова:

Алгоритм решения задач на прямую и обратную пропорциональные зависимости между величинами.

1. Выяснить, о каких ... идёт речь в задаче.
2. Назвать ... между величинами в задаче (указать, как изменяется значение второй величины с увеличением значения первой величины).
3. Составить таблицу (в первый столбик поместить значения ... величины, во второй — значения второй величины).
4. Указать вид ... в таблице с помощью стрелок.
5. Записать и решить ... в соответствии с выбранной зависимостью.

Алгоритм решения задач на пропорциональное деление.

1. Выяснить, о каких ... идёт речь в задаче.
2. Назвать ... значения величины и части пропорционального деления.
3. Обозначить через k значение величины, входящееся на ... из частей пропорционального деления.

4. Выразить ... значения величины через k .
5. Составить и решить
6. Записать ответ.



215. Выберите таблицу и решите задачу:

а) При изготовлении 3 одинаковых ложек потребовалось 100 г серебра. Сколько граммов серебра потребуется для изготовления 10 таких ложек?

Количество ложек	Масса серебра
3	100 г
10	?

Количество ложек	Масса серебра
3	100 г
10	?

б) Автомобиль проходит путь между двумя городами со скоростью 120 км/ч за 3,5 ч. За какое время автомобиль пройдёт тот же путь со скоростью 96 км/ч?

v , км/ч	t , ч
120	3,5
96	?

v , км/ч	t , ч
120	3,5
96	?

Составьте таблицу и решите задачи:

- 216.** Из 200 кг муки выпекают 270 кг хлеба. Сколько килограммов хлеба получают из 300 кг муки?
- 217.** При изготовлении рассола для засолки огурцов на 6 л воды нужно 375 г соли. Сколько соли нужно на 9 л воды?
- 218.** Два станка выполняют заказ за 6 ч. За сколько часов выполнят этот же заказ три таких станка?

219. Если Вера будет читать по 36 страниц в день, то она прочтает книгу за 7 дней. Сколько дней уйдёт на прочтение книги, если Вера будет читать по 42 страницы в день?

Решите задачи на пропорциональное деление, используя алгоритм:

220. Разделите число 60 на части в отношении:

а) $1 : 4$; б) $5 : 7$; в) $1 : 6 : 8$.

221. Две смены обувного предприятия сшили 3780 пар обуви. Количество пар обуви, сшитой первой и второй сменами, пропорционально числам 10 и 11. Сколько пар обуви сшила каждая смена?

222. Сплав включает олово, свинец и кадмий в отношении $25 : 16 : 9$. Сколько нужно взять граммов каждого из этих веществ, чтобы получить 600 г сплава?

223. Для изготовления раствора берутся известь и песок в отношении $3 : 5$. Сколько килограммов извести и песка надо взять в отдельности, если песка взято на 48 кг больше, чем извести?

224. Сумма четырёх чисел равна 48,75. Найдите эти числа, если они пропорциональны числам 3, 6, 2 и 4.

225. При варке вишневого варенья массы ягод, сахара и воды берутся в отношении $9 : 15 : 1$. Какой процент варенья составляет каждый ингредиент?

226. Длина и ширина прямоугольника относятся как $8 : 3$. Найдите периметр прямоугольника, если его длина больше ширины на 40 дм.

227. Участок земли для дачи, равный 3 га, разделили между тремя семьями пропорционально

количеству членов семьи. В первой семье 4 человека, во второй — 5 человек, в третьей — 6 человек. Сколько гектаров земли получила каждая семья?



Генетические исследования: у одной курицы из двух — голубые пёрышки, а у двух куриц из пяти есть зелёный хохолок. Куриц с зелёным хохолком и без голубых пёрышек столько же, сколько куриц с зелёным хохолком и с голубыми пёрышками. Какой процент составляют курицы с зелёным хохолком без голубых пёрышек от кур, у которых есть голубые пёрышки?

§ 6. Масштаб

При изображении на карте расстояние между двумя точками в несколько раз меньше, чем реальное расстояние на местности. Обычно это отмечается на карте записью отношения, например, $1 : 50\,000$ (как на рис. 1)

или $\frac{1}{50\,000}$. Это отношение называется **масштабом карты**. Масштаб показывает, во сколько раз расстояние на карте меньше, чем расстояние на местности. На карте отмечено расстояние 5 см. Масштаб $1 : 50\,000$ показывает, что на карте расстояние в 50 000 раз меньше, чем на местности. Значит, на местности расстояние между точками A и B в 50 000 раз больше, чем на карте.

$5 \cdot 50\,000 = 250\,000$ (см) или 2,5 км — расстояние на местности.

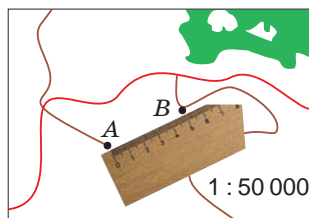


Рисунок 1