

## § 4. Симметрия относительно точки

Точки  $M$  и  $N$  — концы диаметра окружности — находятся на одинаковом расстоянии от центра окружности — точки  $O$  (рис. 23). Говорят, что точка  $M$  **симметрична** точке  $N$  **относительно центра** симметрии — точки  $O$ . Точки  $A$  и  $C$  находятся на одинаковом расстоянии от точки  $O$  и лежат на одной прямой с точкой  $O$  (рис. 24).

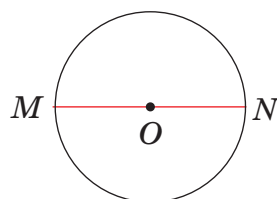


Рисунок 23

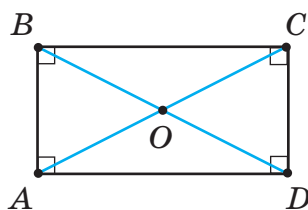


Рисунок 24



Для того чтобы построить точку, симметричную относительно центра, нужно:

1. Соединить другим отрезком данную точку с центром симметрии;

2. Продолжить отрезок на такое же расстояние, что и расстояние от данной точки до центра. Отметить получившуюся точку.

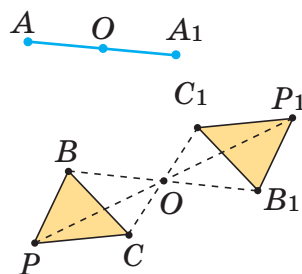


Рисунок 25

На рисунке 25 точка  $A_1$  симметрична точке  $A$ . На этом рисунке все вершины треугольника  $P_1B_1C_1$  симметричны вершинам треугольника  $PBC$  относительно центра точки  $O$ .



Говорят, что треугольник  $P_1B_1C_1$  симметричен треугольнику  $PBC$  относительно центра — точки  $O$ .

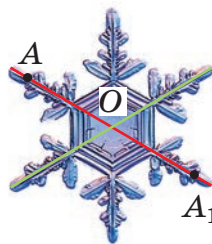


Рисунок 26

На рисунке 26 точка  $A$  принадлежит некоторой фигуре, назовем её «снежинка». Симметричная точке  $A$  относительно центра  $O$  точка  $A_1$  также принадлежит «снежинке». Это можно сказать о каждой точке «снежинки».



Если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно точки  $O$  также принадлежит этой фигуре, то фигура называется **центрально-симметричной относительно точки  $O$** .

На рисунке 27 изображены центрально-симметричные фигуры. Точка  $O$  — центр симметрии фигур.

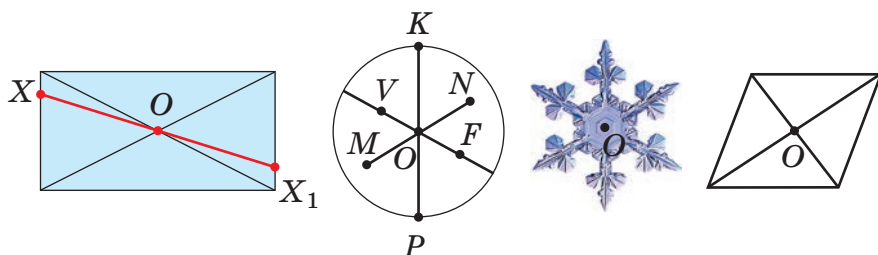


Рисунок 27



80. Какие из отмеченных точек круга на рисунке 27 образуют пары точек, симметричных относительно её центра  $O$ ?
81. Отметьте в тетради точки  $O$ ,  $M$ ,  $T$  и  $K$ . Постройте точки, симметричные точкам  $M$ ,  $T$ ,  $K$  относительно точки  $O$ .
82. Начертите координатную прямую и отметьте на ней точки  $T(5)$  и  $P(-4)$ . Постройте точки, симметричные точкам  $T$  и  $P$  относительно начала отсчёта. Запишите координаты полученных точек.
83. Точка координатной прямой  $X(6)$  — центр симметрии. Укажите координату точки, симметричной относительно этого центра:
 

а) точке $A(3)$ ;	в) точке $C(-2)$ ;
б) точке $B(10)$ ;	г) точке $D(0)$ .

84. Точка  $X$  — центр симметрии для пары точек  $M$  и  $K$  на координатной прямой. Укажите координаты точки  $X$ , если известны координаты точек  $M$  и  $K$ :
- а)  $M(12)$  и  $K(20)$ ;                      в)  $M(-15)$  и  $K(-25)$ ;  
 б)  $M(9)$  и  $K(10)$ ;                      г)  $M(-3)$  и  $K(8)$ .
85. Постройте в тетради прямоугольник  $ABCD$  и симметричный ему относительно:
- а) вершины  $B$ ;  
 б) точки  $K$  — середины стороны  $BC$ .
86. Начертите в тетради треугольник  $ABC$  и постройте треугольник  $A_1B_1C_1$ , симметричный треугольнику  $ABC$  относительно одной из его вершин.
87. Постройте систему координат, приняв за единичный отрезок на каждой оси одну клетку тетради. Отметьте на координатной плоскости точки  $A(2; 7)$ ,  $B(-6; -2)$ ,  $C(-3; 1)$ ,  $D(5; -3)$ . Постройте точки, симметричные данным точкам относительно начала координат, и запишите их координаты.
88. По данным координатам вершин  $A(2; -3)$ ,  $B(-5; 3)$ ,  $C(6; 3)$  постройте на координатной плоскости  $\triangle ABC$  и треугольник, симметричный ему относительно начала координат.
89. Укажите, какая из фигур на рисунке 28 (а–е) является центрально-симметричной. Укажите центр симметрии фигуры.

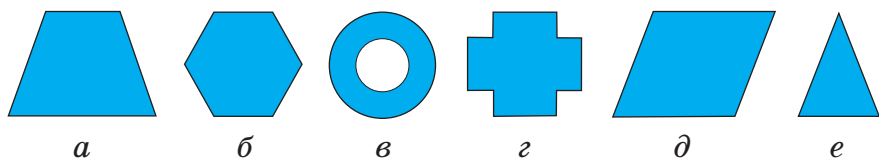


Рисунок 28



**90.** Установите порядок действий и найдите значение выражения:

а)  $(-204 : 4 - (-34 \cdot 3)) : (-17)$ ;

б)  $-21,6 : (-0,12) + 0,96 : (0,89 - 1,13)$ .

- 91.** Чему равна сумма всех целых чисел, расположенных на координатной прямой между числами  $-53$  и  $50$ ?

### Решите задачи:

- 92.** Фермер за три дня продал  $651$  т зерна. В первый день было продано  $\frac{10}{31}$  всего зерна, во второй —  $90\%$  того, что продано в первый день. Сколько тонн зерна было продано в третий день?
- 93.** Даша прочитала в первый день  $75$  страниц книги, во второй —  $40\%$  прочитанного в первый день. Сколько всего страниц в книге, если за два дня Даша прочитала  $0,75$  книги?
- 94.** Сначала цену костюма повысили на  $20\%$ , а потом снизили на  $10\%$ . Какой стала цена костюма после этих изменений, если первоначально он стоил  $160$  р.? На сколько процентов изменилась начальная цена?



### Проверь себя!

Назовите пропущенные слова:

1. Для того чтобы построить точку, симметричную относительно центра симметрии, нужно:

- 1) соединить ... точку с центром симметрии;
- 2) продолжить прямую, проходящую через две точки, на такое же расстояние, что и расстояние от ... до центра;
- 3) отметить получившуюся ... .

2. Если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно точки  $O$  также принадлежит этой фигуре, то фигура называется ... относительно точки  $O$ .



**95.** Начертите в тетради отрезок  $BD$  и отметьте точку  $C$  вне этого отрезка. Постройте отрезок  $B_1D_1$ , симметричный отрезку  $BD$  относительно точки  $C$ . Сравните длины отрезков  $BD$  и  $B_1D_1$ .

**96.** Начертите координатную прямую и отметьте на ней точки  $A(4)$ ,  $B(2)$  и  $C(-3)$ . Постройте точку, симметричную точке:

а)  $A$  относительно точки  $B$ ;

б)  $C$  относительно точки  $B$ .

**97.** Постройте прямоугольник  $ABCD$  и прямоугольник, симметричный ему относительно:

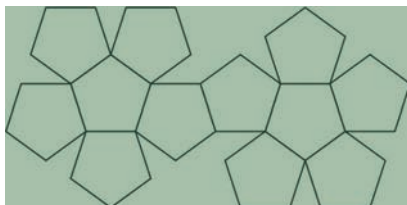
а) вершины  $D$ ;

б) точки  $T$  — середины стороны  $AD$ .

**98.** Среди точек  $K(-7)$ ,  $L(4)$ ,  $M(-3,5)$ ,  $N(2,5)$ ,  $O(0)$ ,  $P(-4)$ ,  $Q(7)$ ,  $R(-2,5)$ ,  $S(5)$  координатной прямой найдите пары точек, симметричных относительно начала отсчёта.



Найдите в энциклопедии, интернете информацию о пяти Платоновых телах. Вот одно из них и его развёртка. Попробуйте склеить правильные многогранники.



## § 5. Фигуры, симметричные относительно прямой

На рисунке 29 точки  $A$  и  $A_1$  лежат на перпендикуляре к прямой  $a$  на равных расстояниях от этой прямой.



Говорят, что точки  $A$  и  $A_1$  симметричны относительно прямой  $a$ .

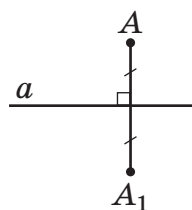


Рисунок 29

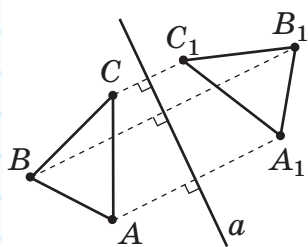


Рисунок 30

На рисунке 30 точки  $A$  и  $A_1$  лежат на перпендикуляре к прямой  $a$  на равных расстояниях от этой прямой. То же можно сказать о любой другой паре точек изображённых треугольников: точки  $B$  и  $B_1$ ,  $C$  и  $C_1$  симметричны относительно прямой  $a$ .



Говорят, что треугольник  $ABC$  симметричен треугольнику  $A_1B_1C_1$  относительно прямой  $a$ .



Для того чтобы построить точку, симметричную данной точке ( $M$ ) относительно данной прямой ( $a$ ), нужно:

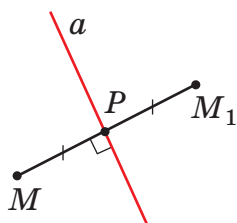


Рисунок 31

1. Провести через данную точку  $M$  прямую, перпендикулярную данной прямой  $a$ ;  $P$  — точка пересечения перпендикуляра с этой прямой.

2. Отложить от точки  $P$  на перпендикуляре отрезок  $PM_1$ , равный отрезку  $MP$  (рис. 31).

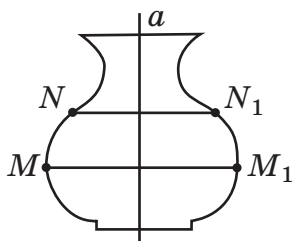


Рисунок 32

На рисунке 32 точка  $M$  принадлежит некоторой фигуре. Симметричная точке  $M$  относительно прямой  $a$  точка  $M_1$  тоже принадлежит этой фигуре. Это же можно сказать о каждой точке фигуры.



Если для **каждой** точки фигуры симметричная ей точка относительно прямой также принадлежит **этой фигуре**, то фигура имеет **ось симметрии**. В природе, архитектуре, живописи (рис. 33) часто можно встретить фигуры, имеющие ось симметрии.

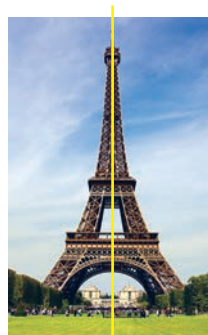
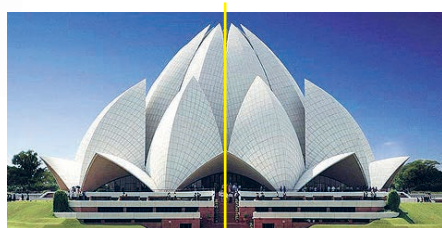


Рисунок 33

Заметим, если мысленно (или практически) перегнуть фигуру относительно оси симметрии, то части фигуры совпадут.



**99.** Начертите в тетради прямую  $k$  и отметьте точки  $S$  и  $T$  по разные стороны от неё. Постройте точки, симметричные точкам  $S$  и  $T$  относительно прямой  $k$ .

**100.** Укажите, на каком из рисунков 34  $a$ – $в$  изображены отрезки, симметричные относительно прямой  $c$ .

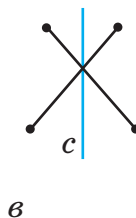
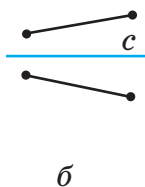
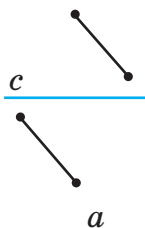


Рисунок 34

**101.** Прямая  $b$  проходит через середину отрезка  $CD$ . Верно ли, что точки  $C$  и  $D$  симметричны относительно прямой  $b$ ?

**102.** Постройте прямоугольник, симметричный прямоугольнику  $ABCD$  относительно прямой:  
а)  $AB$ ;      б)  $BC$ ;      в)  $AC$ ;      г)  $BD$ .



**103.** Постройте в тетради:

- а) квадрат;
- б) прямоугольник;
- в) равнобедренный треугольник.

Для каждой фигуры проведите все её оси симметрии.

**104.** Отметьте на координатной плоскости точки  $A(-7; 3)$  и  $B(2; -4)$ . Пользуясь линейкой и угольником, проведите ось симметрии этих точек.

**105.** По данным координатам вершин  $M(0; 0)$ ,  $N(-6; 4)$ ,  $T(5; 2)$  постройте на координатной плоскости  $\triangle MNT$  и треугольник, симметричный ему относительно:

- а) оси абсцисс;
- б) оси ординат.



**106.** Установите порядок действий и найдите значение числового выражения:

$$6\frac{3}{4} \cdot \left( \left( \frac{47}{60} - 2\frac{17}{45} \right) - \left( -1\frac{13}{20} \right) \right).$$

### Решите задачи:

**107.** Путь в 32 км велосипедист проехал за 2 ч 24 мин. Первые 2 ч он ехал со скоростью на 2 км/ч меньшей, чем скорость, с которой он двигался оставшееся время. Найдите первоначальную скорость велосипедиста.

**108.** Среднее арифметическое четырёх чисел равно 2,75. Найдите эти числа, если второе больше первого в 1,5 раза, третье больше первого в 1,2 раза, а четвертое больше первого в 1,8 раза.



### Проверь себя!

Назовите пропущенные слова:

1. Если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно прямой также принадлежит этой фигуре, то фигура имеет ... ..



2. Для того чтобы построить точку, симметричную данной точке относительно данной прямой, нужно:

1) провести через данную точку прямую, ... данной прямой;

2) отложить от точки пересечения ... с этой прямой на перпендикуляре отрезок, равный построенному отрезку.



**109.** Постройте равнобедренный треугольник  $ABC$  с основанием  $BC$  и треугольник, симметричный ему относительно прямой:

а)  $AB$ ;          б)  $CB$ ;          в)  $AC$ .

**110.** Постройте в тетради равнобедренный треугольник  $AKT$  с основанием  $AT$  и его ось симметрии, если угол  $K$ :

а) острый;                                  б) тупой.

**111.** По данным координатам вершин  $A(0; 4)$ ,  $B(4; 8)$ ,  $C(8; 4)$  и  $D(4; 0)$  постройте на координатной плоскости квадрат  $ABCD$  и квадрат, симметричный ему относительно:

а) оси абсцисс;                          б) оси ординат.



Изображение на рисунке 35 должно иметь ось симметрии, но художник допустил ошибки. Найдите их.

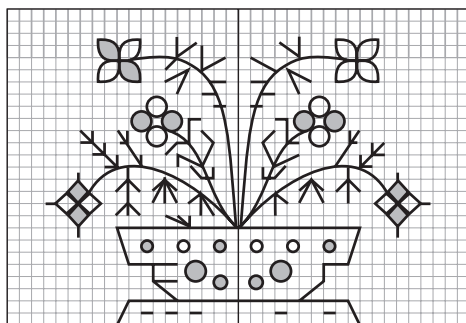


Рисунок 35