

2.38. Придумайте пример выражения с переменной, областью определения которого являются: а) все числа, кроме 7,4; б) все числа, кроме -8 .

2.39*. Известно, что $x - y = 2$. Найдите значение выражения $(y - x)^3$.



2.40. Число 204 представьте в виде суммы трех слагаемых m , n и k так, чтобы $m : n : k = 3 : 5 : 4$.

2.41. Решите уравнение $(x - 0,3) \cdot 3,8 = 0,38$.

2.42. Услугами двух сотовых операторов пользовалось одинаковое число абонентов. Через год число абонентов первого оператора увеличилось на 100%, а второго — в 2 раза. У какого сотового оператора абонентов стало больше?

§ 5. Тождество

 **2.43.** Вычислите наиболее удобным способом:

а) $0,25 \cdot 2,56 \cdot 4$; б) $3,567 \cdot 0,3 - 0,567 \cdot 0,3$.

2.44. Сравните значения выражений $2(a - 3)$ и $2a - 6$ при: а) $a = 5$; б) $a = -1$; в) $a = 0$.

Тождественно равные выражения

Найдем значения выражений $7x + 2x$ и $9x$ при:

а) $x = -1$; б) $x = 0$; в) $x = \frac{1}{3}$.

Получим: а) $7x + 2x = 7 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) = -7 - 2 = -9$
и $9x = 9 \cdot (-1) = -9$;

б) $7x + 2x = 7 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$ и $9x = 9 \cdot 0 = 0$;

в) $7x + 2x = 7 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{3} + \frac{2}{3} = \frac{9}{3} = 3$

и $9x = 9 \cdot \frac{1}{3} = 3$.

Заметим, что при различных значениях переменной значения этих выражений равны. Эти выражения будут принимать равные значения и при других значениях переменных, так как $7x + 2x = (7 + 2)x = 9x$ по распределительному закону умножения относительно сложения. Такие выражения называют **тождественно равными**.

**Тождественно
равные
выражения**

$a + 4$	и	$4 + a$;
$a \cdot 7$	и	$7 \cdot a$;
a^3	и	$a \cdot a \cdot a$

Например, тождественно равными являются выражения: $a + (b + 8)$ и $(a + b) + 8$; $5(bc)$ и $(5b)c$; $3(b + c)$ и $3b + 3c$, — так как они выражают свойства действий умножения и сложения.

Определение

Два выражения называются **тождественно равными**, если они принимают одинаковые значения при всех значениях переменных из их общей области определения.

Общей областью определения двух выражений называют все значения переменных, при которых имеют смысл и первое и второе выражения.

Тождество

Между тождественно равными выражениями обычно ставят знак равенства, т. е. $a(b+8) = (ab)8$; $a + (b + 8) = (a + b) + 8$; $a(b + 8) = ab + 8a$. Такие равенства называют **тождествами**.

Определение

Тождеством называют равенство двух тождественно равных выражений.

Тождества

$$a + 3 = 3 + a;$$

$$b \cdot 5 = 5 \cdot b;$$

$$m^4 = m \cdot m \cdot m \cdot m$$

Например, равенство $12 \cdot 3 \cdot x = 36x$ является тождеством. Равенство $\frac{a^5}{a^3} = a^2$ является тождеством для всех чисел, кроме нуля.

Тождественные преобразования выражений

В примере $12 \cdot 3 \cdot x = 36x$ мы одно выражение заменили другим, тождественно равным ему, т. е. выполнили тождественные преобразования.

Определение

Тождественным преобразованием выражения называется замена одного выражения другим, тождественно равным ему.

Тождественные преобразования

$3x + 2x = 5x$
(закон умножения)

$x^8 : x^{10} = x^{-2}$
(свойство степени)

Например, $a(b - c + d) = ab - ac + ad$ — тождественные преобразования выполнены на основании распределительного закона умножения;

$3 \cdot x^2 \cdot x^4 = 3x^6$ — тождественные преобразования выполнены на основании свойства степени с натуральным показателем.



Тождественно равные выражения

1. Являются ли тождественно равными выражения:

- а) $a - b$ и $b - a$;
б) $a \cdot b$ и $b \cdot a$?

а) Выражения $a - b$ и $b - a$ не являются тождественно равными, так как $b - a = -(a - b)$, т. е. при любых неравных значениях a и b данные выражения принимают противоположные значения.

б) Выражения $a \cdot b$ и $b \cdot a$ являются тождественно равными на основании переместительного закона умножения.

Тождество	
<p>2. Является ли равенство тождеством:</p> <p>а) $a^n \cdot a^{-n} = a^0$;</p> <p>б) $a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$;</p> <p>в) $a + a = 2a^2$?</p>	<p>а) Равенство $a^n \cdot a^{-n} = a^0$ является тождеством согласно свойству умножения степеней с одинаковыми основаниями.</p> <p>б) Равенство $a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ является тождеством по свойству степени частного.</p> <p>в) Равенство $a + a = 2a^2$ не является тождеством, так как $a + a = 2a$.</p>
Тождественные преобразования выражений	
<p>3. Является ли преобразование тождественным:</p> <p>а) $4x - 3x = x$;</p> <p>б) $a^5 \cdot a^{-5} = a^0$;</p> <p>в) $-(x + z)^2 = (x - z)^2$?</p>	<p>а) Преобразование $4x - 3x = x$ является тождественным на основании распределительного закона умножения.</p> <p>б) Преобразование $a^5 \cdot a^{-5} = a^0$ является тождественным на основании свойства умножения степеней с одинаковыми основаниями.</p> <p>в) Убедиться, что преобразование выражения $-(x + z)^2 = (x - z)^2$ не является тождественным, можно, подставив в левую и правую части равенства какие-либо значения переменных. Например, при $x = z = 1$ получим неверное равенство $-4 = 0$.</p>
<p>4. Выполните тождественное преобразование, применив законы умножения:</p> <p>а) $4x(-3,5)$;</p> <p>б) $4,5x - 3,5x + 9x$.</p>	<p>а) $4x(-3,5) = 4(-3,5)x = -14x$;</p> <p>б) $4,5x - 3,5x + 9x = (4,5 - 3,5 + 9)x = 10x$.</p>

- ?** 1. Если между двумя выражениями стоит знак « = », то является ли такое равенство тождеством?
2. Если в результате тождественных преобразований одного выражения получили другое выражение, то каковы значения этих выражений?
3. Является ли тождеством равенство $x : x = y : y$?



2.45. На основании каких свойств действий можно утверждать, что тождественно равны выражения:

- а) $2 + 3x$ и $3x + 2$; б) $7(a - b)$ и $7a - 7b$;
 в) $n \cdot 3m$ и $3nm$?

2.46. Являются ли тождественно равными выражения:

- а) $a(-b)$ и $(-a)b$; б) $b + b + b + b + b$ и b^5 ;
 в) $(-a)^2$ и $-a^2$; г) $(-a)^3$ и $-a^3$?

Придумайте примеры тождественно равных выражений.

2.47. Выполните тождественные преобразования, применив законы умножения:

- а) $1,2y(-3)$; б) $8x - 7,3x$; в) $-3,5b - 9,5b + b$.

2.48. Преобразуйте выражение $15c + 15d$ в тождественно равное, применив распределительный закон умножения, и найдите значение полученного выражения при:

- а) $c = 0,34$, $d = 0,66$; б) $c = -2\frac{1}{7}$, $d = -3\frac{6}{7}$.

2.49. Преобразуйте выражение $-5a(-20b)$ в тождественно равное, применив законы умножения, и найдите значение полученного выражения при:

- а) $a = 0,2$, $b = -2,7$; б) $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{2}{7}$.

2.50. Выберите выражения, тождественно равные выражению $-5(x - 2)$:

- а) $-5x - 10$; б) $-5x + 10$; в) $10 - 5x$.

2.51. Преобразуйте выражение $a^7 : a^{11} \cdot a^2$ в тождественно равное, используя свойства степени с целым показателем, и найдите значение полученного выражения при: а) $a = 3$; б) $a = -0,25$.

2.52. Придумайте два тождественно равных выражения с двумя переменными.

2.53. Как доказать, что выражения не являются тождественно равными? Докажите одним из способов, что выражения не являются тождественно равными:

- а) $5a$ и $5 + a$; б) a^{-2} и $-2a$;
в) $(a - 1)^2$ и $a^2 - 1$; г) $(a + 2)^2$ и $a^2 + 4$.

2.54. Какие из равенств являются тождествами:

- а) $0 \cdot a = a - a$; б) $(a + b)^2 = (b + a)^2$;
в) $a^5 \cdot a^{10} = (a^3)^5$; г) $a^3 - a^2 = a$?

2.55. Докажите, что данные равенства не являются тождествами:

- а) $(a - b)^3 = (b - a)^3$; б) $b^2 + 2 = (b + 2)^2$;
в) $(x + 3)2 + x = x + 3(2 + x)$.

2.56. Двумя способами составьте выражение для решения задачи. Школьник купил 10 тетрадей в клетку по a к. и 10 тетрадей в линейку по b к. Найдите стоимость покупки.

Являются ли полученные выражения тождественно равными?

2.57. Два поезда выехали одновременно навстречу друг другу из двух городов и встретились через 4,5 ч. Скорость одного поезда — $x \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а другого — $y \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Составьте два тождественно равных выражения, с помощью которых можно найти протяженность дороги между городами.



2.58. Применив законы умножения, преобразуйте выражения в тождественно равные:

а) $4a \cdot 5$; б) $8b + 2,5b$; в) $1,2a - 0,5a + 6a$.

2.59. Преобразуйте выражение $2,1x - 2,1y$ в тождественно равное, применив распределительный закон умножения, и найдите значение полученного выражения при $x = 1,564$, $y = -0,436$.

2.60. Преобразуйте выражение $0,1a \cdot (-100b)$ в тождественно равное, применив законы умножения, и найдите значение полученного выражения при $a = \frac{1}{12}$, $b = 2\frac{2}{17}$.

2.61. Выберите выражения, тождественно равные выражению $-3(a + 5)$:

а) $-3a - 15$; б) $-3a + 15$; в) $-15 - 3a$.

2.62. Преобразуйте выражение $(a^7)^3 : a^{18}$ в тождественно равное, используя свойства степени с целым показателем, и найдите значение полученного выражения при: а) $a = -2$; б) $a = 0,1$.

2.63. Докажите, что выражения не являются тождественно равными:

а) $a - 7$ и $-7a$; б) a^4 и $4a$.

2.64. Как можно убедиться в том, что равенство не является тождеством? Докажите, что равенство $a^2 - 9 = (a - 3)^2$ не является тождеством.



2.65. Среднее арифметическое двух чисел равно 20. Одно из этих чисел 13,29. Найдите другое число.

2.66. Найдите НОД (255, 238).

2.67. Были куплены четыре книги общей стоимостью 84 р., при этом стоимость первой книги составила 20 %, стоимость второй — 30 %, а стоимость третьей — 25 % от суммы потраченных денег. Верно ли, что за четвертую книгу заплатили не больше 19 р.?

§ 6. Одночлен

2.68. Вычислите: $2\frac{1}{3} \cdot (-15)$.

2.69. Упростите выражение $b^{12} \cdot b^3 \cdot b$.



Определение одночлена

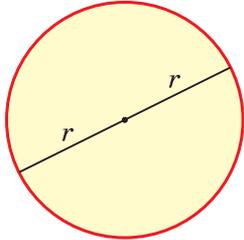


Рис. 3

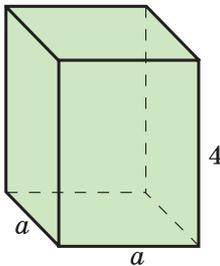


Рис. 4

Рассмотрим задачи. 1) Найдите площадь круга с диаметром d . Площадь круга вычисляется по формуле $S = \pi r^2$, где r — радиус круга (рис. 3). Так как радиус равен половине диаметра, то $\pi r^2 = \pi \left(\frac{1}{2}d\right)^2 = \frac{1}{4} \pi d^2$.

2) Запишите выражение для вычисления объема прямоугольного параллелепипеда, если его основание — квадрат со стороной a , а высота равна 4 см (рис. 4). Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания и высоты, т. е. $a^2 \cdot 4$, или $4a^2$.

При решении задач получаются выражения, которые содержат только произведение переменных, натуральных степеней переменных и чисел. Такие выражения называются **одночленами**.

Определение

Одночленом называется произведение чисел, переменных, натуральных степеней переменных.