

**2.38.** Придумайте пример выражения с переменной, областью определения которого являются: а) все числа, кроме 7,4; б) все числа, кроме  $-8$ .

**2.39\*.** Известно, что  $x - y = 2$ . Найдите значение выражения  $(y - x)^3$ .



**2.40.** Число 204 представьте в виде суммы трех слагаемых  $m$ ,  $n$  и  $k$  так, чтобы  $m : n : k = 3 : 5 : 4$ .

**2.41.** Решите уравнение  $(x - 0,3) \cdot 3,8 = 0,38$ .

**2.42.** Услугами двух сотовых операторов пользовалось одинаковое число абонентов. Через год число абонентов первого оператора увеличилось на 100%, а второго — в 2 раза. У какого сотового оператора абонентов стало больше?

## § 5. Тождество

 **2.43.** Вычислите наиболее удобным способом:

а)  $0,25 \cdot 2,56 \cdot 4$ ;                      б)  $3,567 \cdot 0,3 - 0,567 \cdot 0,3$ .

**2.44.** Сравните значения выражений  $2(a - 3)$  и  $2a - 6$  при: а)  $a = 5$ ;                      б)  $a = -1$ ;                      в)  $a = 0$ .

 **Тождественно равные выражения**

Найдем значения выражений  $7x + 2x$  и  $9x$  при:

а)  $x = -1$ ;                      б)  $x = 0$ ;                      в)  $x = \frac{1}{3}$ .

Получим: а)  $7x + 2x = 7 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) = -7 - 2 = -9$   
и  $9x = 9 \cdot (-1) = -9$ ;

б)  $7x + 2x = 7 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$  и  $9x = 9 \cdot 0 = 0$ ;

в)  $7x + 2x = 7 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{3} + \frac{2}{3} = \frac{9}{3} = 3$

и  $9x = 9 \cdot \frac{1}{3} = 3$ .

Заметим, что при различных значениях переменной значения этих выражений равны. Эти выражения будут принимать равные значения и при других значениях переменных, так как  $7x + 2x = (7 + 2)x = 9x$  по распределительному закону умножения относительно сложения. Такие выражения называют **тождественно равными**.

**Тождественно  
равные  
выражения**

$a + 4$	и	$4 + a$ ;
$a \cdot 7$	и	$7 \cdot a$ ;
$a^3$	и	$a \cdot a \cdot a$

Например, тождественно равными являются выражения:  $a + (b + 8)$  и  $(a + b) + 8$ ;  $5(bc)$  и  $(5b)c$ ;  $3(b + c)$  и  $3b + 3c$ , — так как они выражают свойства действий умножения и сложения.

**Определение**

Два выражения называются **тождественно равными**, если они принимают одинаковые значения при всех значениях переменных из их общей области определения.

**Общей областью определения двух выражений** называют все значения переменных, при которых имеют смысл и первое и второе выражения.

**Тождество**

Между тождественно равными выражениями обычно ставят знак равенства, т. е.  $a(b+8) = (ab)8$ ;  $a + (b + 8) = (a + b) + 8$ ;  $a(b + 8) = ab + 8a$ . Такие равенства называют **тождествами**.

**Определение**

**Тождеством** называют равенство двух тождественно равных выражений.

**Тождества**

$$a + 3 = 3 + a;$$

$$b \cdot 5 = 5 \cdot b;$$

$$m^4 = m \cdot m \cdot m \cdot m$$

Например, равенство  $12 \cdot 3 \cdot x = 36x$  является тождеством. Равенство  $\frac{a^5}{a^3} = a^2$  является тождеством для всех чисел, кроме нуля.

### Тождественные преобразования выражений

В примере  $12 \cdot 3 \cdot x = 36x$  мы одно выражение заменили другим, тождественно равным ему, т. е. выполнили тождественные преобразования.

#### Определение

**Тождественным преобразованием** выражения называется замена одного выражения другим, тождественно равным ему.

#### Тождественные преобразования

$3x + 2x = 5x$   
(закон умножения)

$x^8 : x^{10} = x^{-2}$   
(свойство степени)

Например,  $a(b - c + d) = ab - ac + ad$  — тождественные преобразования выполнены на основании распределительного закона умножения;

$3 \cdot x^2 \cdot x^4 = 3x^6$  — тождественные преобразования выполнены на основании свойства степени с натуральным показателем.



#### Тождественно равные выражения

1. Являются ли тождественно равными выражения:

- а)  $a - b$  и  $b - a$ ;  
б)  $a \cdot b$  и  $b \cdot a$ ?

а) Выражения  $a - b$  и  $b - a$  не являются тождественно равными, так как  $b - a = -(a - b)$ , т. е. при любых неравных значениях  $a$  и  $b$  данные выражения принимают противоположные значения.

б) Выражения  $a \cdot b$  и  $b \cdot a$  являются тождественно равными на основании переместительного закона умножения.

Тождество	
<p><b>2.</b> Является ли равенство тождеством:</p> <p>а) <math>a^n \cdot a^{-n} = a^0</math>;</p> <p>б) <math>a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n</math>;</p> <p>в) <math>a + a = 2a^2</math>?</p>	<p>а) Равенство <math>a^n \cdot a^{-n} = a^0</math> является тождеством согласно свойству умножения степеней с одинаковыми основаниями.</p> <p>б) Равенство <math>a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n</math> является тождеством по свойству степени частного.</p> <p>в) Равенство <math>a + a = 2a^2</math> не является тождеством, так как <math>a + a = 2a</math>.</p>
Тождественные преобразования выражений	
<p><b>3.</b> Является ли преобразование тождественным:</p> <p>а) <math>4x - 3x = x</math>;</p> <p>б) <math>a^5 \cdot a^{-5} = a^0</math>;</p> <p>в) <math>-(x + z)^2 = (x - z)^2</math>?</p>	<p>а) Преобразование <math>4x - 3x = x</math> является тождественным на основании распределительного закона умножения.</p> <p>б) Преобразование <math>a^5 \cdot a^{-5} = a^0</math> является тождественным на основании свойства умножения степеней с одинаковыми основаниями.</p> <p>в) Убедиться, что преобразование выражения <math>-(x + z)^2 = (x - z)^2</math> не является тождественным, можно, подставив в левую и правую части равенства какие-либо значения переменных. Например, при <math>x = z = 1</math> получим неверное равенство <math>-4 = 0</math>.</p>
<p><b>4.</b> Выполните тождественное преобразование, применив законы умножения:</p> <p>а) <math>4x(-3,5)</math>;</p> <p>б) <math>4,5x - 3,5x + 9x</math>.</p>	<p>а) <math>4x(-3,5) = 4(-3,5)x = -14x</math>;</p> <p>б) <math>4,5x - 3,5x + 9x = (4,5 - 3,5 + 9)x = 10x</math>.</p>

- ?** 1. Если между двумя выражениями стоит знак « = », то является ли такое равенство тождеством?
2. Если в результате тождественных преобразований одного выражения получили другое выражение, то каковы значения этих выражений?
3. Является ли тождеством равенство  $x : x = y : y$ ?



**2.45.** На основании каких свойств действий можно утверждать, что тождественно равны выражения:

- а)  $2 + 3x$  и  $3x + 2$ ;                      б)  $7(a - b)$  и  $7a - 7b$ ;  
 в)  $n \cdot 3m$  и  $3nm$ ?

**2.46.** Являются ли тождественно равными выражения:

- а)  $a(-b)$  и  $(-a)b$ ;                      б)  $b + b + b + b + b$  и  $b^5$ ;  
 в)  $(-a)^2$  и  $-a^2$ ;                      г)  $(-a)^3$  и  $-a^3$ ?

Придумайте примеры тождественно равных выражений.

**2.47.** Выполните тождественные преобразования, применив законы умножения:

- а)  $1,2y(-3)$ ;                      б)  $8x - 7,3x$ ;                      в)  $-3,5b - 9,5b + b$ .

**2.48.** Преобразуйте выражение  $15c + 15d$  в тождественно равное, применив распределительный закон умножения, и найдите значение полученного выражения при:

- а)  $c = 0,34$ ,  $d = 0,66$ ;                      б)  $c = -2\frac{1}{7}$ ,  $d = -3\frac{6}{7}$ .

**2.49.** Преобразуйте выражение  $-5a(-20b)$  в тождественно равное, применив законы умножения, и найдите значение полученного выражения при:

- а)  $a = 0,2$ ,  $b = -2,7$ ;                      б)  $a = \frac{3}{4}$ ,  $b = \frac{2}{7}$ .

**2.50.** Выберите выражения, тождественно равные выражению  $-5(x - 2)$ :

- а)  $-5x - 10$ ;                      б)  $-5x + 10$ ;                      в)  $10 - 5x$ .

**2.51.** Преобразуйте выражение  $a^7 : a^{11} \cdot a^2$  в тождественно равное, используя свойства степени с целым показателем, и найдите значение полученного выражения при: а)  $a = 3$ ; б)  $a = -0,25$ .

**2.52.** Придумайте два тождественно равных выражения с двумя переменными.

**2.53.** Как доказать, что выражения не являются тождественно равными? Докажите одним из способов, что выражения не являются тождественно равными:

- а)  $5a$  и  $5 + a$ ;                      б)  $a^{-2}$  и  $-2a$ ;  
в)  $(a - 1)^2$  и  $a^2 - 1$ ;                      г)  $(a + 2)^2$  и  $a^2 + 4$ .

**2.54.** Какие из равенств являются тождествами:

- а)  $0 \cdot a = a - a$ ;                      б)  $(a + b)^2 = (b + a)^2$ ;  
в)  $a^5 \cdot a^{10} = (a^3)^5$ ;                      г)  $a^3 - a^2 = a$ ?

**2.55.** Докажите, что данные равенства не являются тождествами:

- а)  $(a - b)^3 = (b - a)^3$ ;                      б)  $b^2 + 2 = (b + 2)^2$ ;  
в)  $(x + 3)2 + x = x + 3(2 + x)$ .

**2.56.** Двумя способами составьте выражение для решения задачи. Школьник купил 10 тетрадей в клетку по  $a$  к. и 10 тетрадей в линейку по  $b$  к. Найдите стоимость покупки.

Являются ли полученные выражения тождественно равными?

**2.57.** Два поезда выехали одновременно навстречу друг другу из двух городов и встретились через 4,5 ч. Скорость одного поезда —  $x \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ , а другого —  $y \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ . Составьте два тождественно равных выражения, с помощью которых можно найти протяженность дороги между городами.



**2.58.** Применив законы умножения, преобразуйте выражения в тождественно равные:

а)  $4a \cdot 5$ ;      б)  $8b + 2,5b$ ;      в)  $1,2a - 0,5a + 6a$ .

**2.59.** Преобразуйте выражение  $2,1x - 2,1y$  в тождественно равное, применив распределительный закон умножения, и найдите значение полученного выражения при  $x = 1,564$ ,  $y = -0,436$ .

**2.60.** Преобразуйте выражение  $0,1a \cdot (-100b)$  в тождественно равное, применив законы умножения, и найдите значение полученного выражения при  $a = \frac{1}{12}$ ,  $b = 2\frac{2}{17}$ .

**2.61.** Выберите выражения, тождественно равные выражению  $-3(a + 5)$ :

а)  $-3a - 15$ ;      б)  $-3a + 15$ ;      в)  $-15 - 3a$ .

**2.62.** Преобразуйте выражение  $(a^7)^3 : a^{18}$  в тождественно равное, используя свойства степени с целым показателем, и найдите значение полученного выражения при: а)  $a = -2$ ; б)  $a = 0,1$ .

**2.63.** Докажите, что выражения не являются тождественно равными:

а)  $a - 7$  и  $-7a$ ;      б)  $a^4$  и  $4a$ .

**2.64.** Как можно убедиться в том, что равенство не является тождеством? Докажите, что равенство  $a^2 - 9 = (a - 3)^2$  не является тождеством.



**2.65.** Среднее арифметическое двух чисел равно 20. Одно из этих чисел 13,29. Найдите другое число.

**2.66.** Найдите НОД (255, 238).

**2.67.** Были куплены четыре книги общей стоимостью 84 р., при этом стоимость первой книги составила 20 %, стоимость второй — 30 %, а стоимость третьей — 25 % от суммы потраченных денег. Верно ли, что за четвертую книгу заплатили не больше 19 р.?

## § 6. Одночлен

**2.68.** Вычислите:  $2\frac{1}{3} \cdot (-15)$ .

**2.69.** Упростите выражение  $b^{12} \cdot b^3 \cdot b$ .



### Определение одночлена

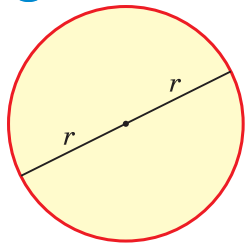


Рис. 3

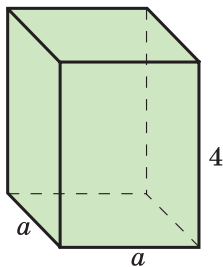


Рис. 4

Рассмотрим задачи. 1) Найдите площадь круга с диаметром  $d$ . Площадь круга вычисляется по формуле  $S = \pi r^2$ , где  $r$  — радиус круга (рис. 3). Так как радиус равен половине диаметра, то  $\pi r^2 = \pi \left(\frac{1}{2}d\right)^2 = \frac{1}{4} \pi d^2$ .

2) Запишите выражение для вычисления объема прямоугольного параллелепипеда, если его основание — квадрат со стороной  $a$ , а высота равна 4 см (рис. 4). Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания и высоты, т. е.  $a^2 \cdot 4$ , или  $4a^2$ .

При решении задач получаются выражения, которые содержат только произведение переменных, натуральных степеней переменных и чисел. Такие выражения называются **одночленами**.

#### Определение

**Одночленом** называется произведение чисел, переменных, натуральных степеней переменных.