

§ 11. Умножение многочленов



2.226. Выполните умножение:

а) $9x(2 - x^3)$; б) $3a^2(a^2 - 2a - 1)$.

2.227. Упростите выражение:

а) $3(2b - 4) + 12$; б) $2(5m + n) - 5(n - 2m)$.



Рассмотрим задачу. Для полива каждого из трех цветников площадью a , четырех цветников площадью b и семи цветников площадью c в июне затрачено $2k$ литров воды на единицу площади, а в июле — $3v$ литров воды на единицу площади. Сколько литров воды затрачено на полив всех цветников за оба летних месяца? Решение этой задачи приводит к произведению многочленов:

$$(2k + 3v)(3a + 4b + 7c).$$



Чтобы умножить многочлен на многочлен, можно применить распределительный закон умножения.

Например, найдем произведение $(a + b)(c + d)$. Обозначим $(c + d)$ через x и получим:

$$(a + b)(c + d) = (a + b)x = ax + bx = a(c + d) + b(c + d).$$

Снова применим распределительный закон:

$$a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Таким образом, $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

Получили правило умножения многочлена на многочлен.



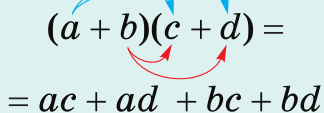
Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно:

- 1) умножить каждый член одного многочлена на каждый член другого многочлена;
- 2) полученные произведения сложить.

Например:

$$\text{а) } (x + 3)(4x - 2) = x \cdot 4x - x \cdot 2 + 3 \cdot 4x - 3 \cdot 2 = \\ = 4x^2 - 2x + 12x - 6 = 4x^2 + 10x - 6;$$


$$\text{б) } (5m - n)(m - 3n) = \\ = 5m \cdot m - 5m \cdot 3n - \\ - n \cdot m + n \cdot 3n = \\ = 5m^2 - 15mn - mn + 3n^2 = \\ = 5m^2 - 16mn + 3n^2.$$



$$(a + b)(c + d) = \\ = ac + ad + bc + bd$$



Замена произведения многочленов на многочлен является тождественным преобразованием.

 Умножение многочленов	
1. Выполните умножение многочленов $(x^2 + 3)(x^2 - 4)$.	$(x^2 + 3)(x^2 - 4) = \\ = x^2 \cdot x^2 - x^2 \cdot 4 + 3 \cdot x^2 - 3 \cdot 4 = \\ = x^4 - 4x^2 + 3x^2 - 12 = \\ = x^4 - x^2 - 12.$
2. Умножьте многочлен $x + 3$ на многочлен $x^2 - 4x + 1$.	$(x + 3)(x^2 - 4x + 1) = \\ = x \cdot x^2 - x \cdot 4x + x \cdot 1 + \\ + 3 \cdot x^2 - 3 \cdot 4x + 3 \cdot 1 = \\ = x^3 - 4x^2 + x + 3x^2 - 12x + 3 = \\ = x^3 - x^2 - 11x + 3.$
3. Выполните действия: $(a - b)(a + 2b) - (a - 3b)(a + b)$.	$(a - b)(a + 2b) - (a - 3b)(a + b) = \\ = a^2 + 2ab - ab - 2b^2 - (a^2 + ab - \\ - 3ab - 3b^2) = a^2 + 2ab - ab - 2b^2 - \\ - a^2 - ab + 3ab + 3b^2 = b^2 + 3ab.$
4. Докажите, что значение выражения $(2x - y)(y - 3x) + y(y - 5x)$ не зависит от значения переменной y .	<p>Выполним действия по порядку: умножение многочленов, умножение многочлена на одночлен и сложение полученных многочленов:</p> $(2x - y)(y - 3x) + y(y - 5x) = \\ = 2xy - 6x^2 - y^2 + 3xy + y^2 - \\ - 5xy = -6x^2.$ <p>Полученный результат не зависит от y.</p>

- ?** 1. Найдите ошибку в утверждении: «Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно умножить члены одного многочлена на члены другого многочлена и полученные произведения сложить».
2. Возможно ли при умножении двух двучленов получить многочлен, содержащий: а) четыре члена; б) три члена; в) пять членов?



2.228. Выполните умножение многочленов:

- | | |
|-----------------------|------------------------|
| а) $(a + m)(b + n)$; | б) $(x + 1)(x + 4)$; |
| в) $(3 + b)(b + 4)$; | г) $(a - c)(b + d)$; |
| д) $(x - y)(x + y)$; | е) $(b - 3)(b + 1)$; |
| ж) $(a - 2)(a - 5)$; | з) $(-x + 3)(x - 2)$. |

2.229. Представьте в виде многочлена выражение:

- | | |
|--------------------------|----------------------------|
| а) $(2x + y)(2y + x)$; | б) $(5a + 2b)(3a + 7b)$; |
| в) $(5c + 2a)(3c - a)$; | г) $(3x - 2y)(2x - 5y)$; |
| д) $(3n - 1)(5 - 3n)$; | е) $(-a - b)(3a - 2b)$; |
| ж) $(-2x + 1)(3x + 2)$; | з) $(-2n - 3m)(-3n + m)$. |

2.230. Выполните умножение многочленов и определите степень произведения:

- | | |
|---------------------------|-----------------------------------|
| а) $(b^2 - c)(b + c^2)$; | б) $(3m - 2)(5m^3 - 2m)$; |
| в) $(4y^2 - 3y)(y + 1)$; | г) $(5a^2 - 3b^2)(3a^2 - 5b^2)$. |

2.231. Выполните умножение:

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| а) $(a + b)(2c - d)$; | б) $(5y - 1)(3y + 2)$; |
| в) $(4m + n)(n - 4m)$; | г) $(x - 3y)(x + 6y)$. |

Сколько членов в полученном многочлене?

2.232. Решите уравнение, выполнив тождественные преобразования в его левой части:

- а) $(5 - x)(x + 3) + x^2 = 20$;
- б) $(2x - 3)(3x - 1) - 6x^2 = 16$.

2.233. Представьте в виде трехчлена выражение:

- а) $-(a - b)(a + 3b)$; б) $-(2x + 3)(x + 1)$;
в) $-(5n - 3m)(2n - m)$; г) $-(x^2 + y)(x^2 - 2y)$.

2.234. Упростите выражение $7 - (x - 2)(x + 2)$ и найдите его значение при $x = -2$.

2.235. Докажите, что значение выражения $a^6 - (a^3 - 5)(a^3 + 5)$ не зависит от значения переменной.

2.236. Выполните умножение многочленов:

- а) $(x^2 - 2x - 1)(x - 3)$; б) $(a - 1)(a^2 + 2a - 3)$;
в) $(4n^2 - 3n - 1)(2n + 3)$; г) $(5b + 4)(b^2 - b - 1)$.

Можно ли определить степень результата, не выполняя умножения?

2.237. Представьте в виде многочлена выражение:

- а) $5(x - 2)(x - 4)$; б) $-6(d - 3)(d + 2)$;
в) $2a(a - 3)(a + 4)$; г) $b(2b - 1)(2b + 1)$;
д) $-2c(5c - 3)(5c - 4)$; е) $-x(x + 6)(2x + 3)$.

2.238. Упростите выражение, используя тождественные преобразования:

- а) $(2a + 6b)(3a - 5b) - 8ab$;
б) $(3n + 7m)(2n - 3m) - 5mn$;
в) $(a - 2)(a + 2) - 2a(5 - a)$;
г) $-(y - 3)(1 + y) - 5y(2 + y)$;
д) $4x(2x - 1) - (x - 3)(x + 3)$;
е) $-3c(3c - 2) - (3c + 2)(2 - 3c)$.

2.239. Упростите выражение и найдите его значение:

- а) $(x - 4)(x - 1) - (x + 3)(x + 2)$ при $x = 0,26$;
б) $(a + 2)(a - 5) - (a - 1)(a - 4)$ при $a = 1,125$;
в) $-(x - 2)(5x - 4) + (5x - 1)(x + 3)$ при $x = -1,05$.

2.240. Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной:

- а) $3a(a - 2) - (a - 2)(3a - 1) - a$;
б) $(2x - 1)(3x + 1) - (x + 1)(6x - 1) + 3(2x - 1)$.

2.241. Решите уравнение:

а) $(x + 3)(x - 3) + (4 - x)x - 3x = 12$;

б) $-x(2x - 1) - (x - 3)(3 + x) + 3x^2 = 10$.

2.242. Упростите выражение

$(2a + 3x)(5a - x^2) - (a + x^2)(10a - 3x)$ и найдите его значение при $a = \frac{1}{6}$ и $x = -0,5$.

2.243. Упростите выражение

$$(a + 5b)(a - b + 3) - (a - b)(a + 5b - 3).$$

2.244*. Известно, что $a^2 + b^2 = 7$. Найдите значение выражения $2(a + 1)(b + 1) - (a + b)(a + b + 2)$.

2.245*. Докажите, что значение выражения $6(9x^3 + 2) - 2(1 - 3x + 9x^2)(3x + 1)$ не зависит от значения переменной.

2.246*. При каком значении a значение выражения $(x - a)(x + 8) - (x + 4)(x - 1)$ не зависит от x ?

2.247*. Докажите, что при любом натуральном значении переменной значение выражения $(n - 2)(n + 15) - (n + 5)(n - 6)$ кратно 14.

2.248*. Даны четыре последовательных натуральных числа. Докажите, что произведение крайних чисел меньше произведения средних на 2.



2.249. Выполните умножение многочленов:

а) $(b + c)(b - c)$;

б) $(a - 4)(a - 3)$;

в) $(x + 1)(5 - x)$;

г) $(4a - 1)(2 - 3a)$;

д) $(6c - 7b)(2c + 3b)$;

е) $(5m - 2n)(3n - 5m)$;

ж) $(-x + y)(2x - y)$;

з) $(-2a - 3b)(-3a + 4b)$.

2.250. Представьте выражение в виде многочлена и определите его степень:

а) $(a^2 + b)(a - b^2)$;

б) $(x + 4)(2x^3 - 3x)$;

в) $(8n^2 + 3n)(n - 1)$;

г) $(3x^2 - 7y^2)(7x^2 - 3y^2)$.

2.262*. Докажите, что при любом натуральном значении переменной значение выражения

$$(n - 1)(n + 12) - (n - 3)(n + 4) \text{ кратно } 10.$$

2.263*. Найдите, при каком значении a значение выражения $(x + a)(x - 3) - (x - 5)(x + 3)$ не зависит от x .



2.264. Найдите значение выражения:

а) $25^{-4} \cdot 5^8$; б) $9^{-6} : 3^{-13}$.

2.265. Вычислите: $(32,24 : 4 - 2,1) \cdot 0,1$.

2.266. Представьте 60 % в виде десятичной дроби и в виде обыкновенной дроби.

2.267. Фермер для уборки урожая нанял 10 работников, которые должны были собрать весь урожай за 8 дней. Когда они проработали 2 дня, прогноз погоды резко ухудшился и, чтобы не пропал урожай, фермеру потребовалось закончить работу за 3 дня. Сколько еще нужно нанять работников?

2.268. На круговой диаграмме (рис. 7) показано распределение числа плодовых деревьев в саду. Сколько в саду слив, если яблонь на 212 больше, чем груш?

2.269. Из пунктов A и B , расстояние между которыми равно 20 км, навстречу друг другу одновременно

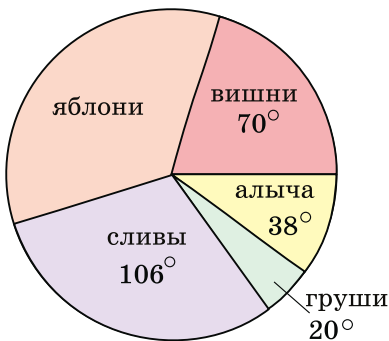


Рис. 7

вышел пешеход и выехал велосипедист. Скорость велосипедиста в 4 раза больше скорости пешехода. Они встретились через некоторое время после начала движения. Сколько километров осталось идти пешеходу после встречи до пункта B ?